

由特殊到一般，培养数学思维

——基于初中数学“勾股定理”教学设计

徐 鹏¹, 卢维娜^{2*}, 薛 欣³

¹福建省厦门双十中学海沧附属学校, 福建 厦门

²新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

³福建省厦门实验小学, 福建 厦门

收稿日期: 2023年11月2日; 录用日期: 2023年12月1日; 发布日期: 2023年12月8日

摘 要

随着信息化教学的普及, 智慧课堂逐渐走向教学第一线, 不再是以前靠想象进行刻板教学, 可以灵活使用各种软件, GeoGebra动画的使用使得学生更好地理解几何图形的变换, 充分做到了教师少言语, 而学生自主认知的目的, 将课堂充分交给学生, 让学生在课堂中主动探索新知。在授课的过程中, 通过信息化教学, 极大地促进了学生的趣味学习。

关键词

GeoGebra动画, 勾股定理

From Special to Normal, Cultivate Mathematical Thinking

—Based on Junior High School Mathematics “Pythagorean Theorem” Teaching Design

Peng Xu¹, Weina Lu^{2*}, Xin Xue³

¹Xiamen Double Ten Middle School Haicang Affiliated School, Xiamen Fujian

²School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

³Xiamen Experimental Primary School, Xiamen Fujian

Received: Nov. 2nd, 2023; accepted: Dec. 1st, 2023; published: Dec. 8th, 2023

*通讯作者。

文章引用: 徐鹏, 卢维娜, 薛欣. 由特殊到一般, 培养数学思维[J]. 教育进展, 2023, 13(12): 9730-9738.
DOI: 10.12677/ae.2023.13121505

Abstract

With the popularization of informatization teaching, the wisdom class has gradually moved towards the front line of teaching. It is no longer a stereotype teaching by imagination. You can use various software flexibly. The use of GeoGebra animation allows students to better understand the transformation of geometric graphics, fully achieving the purpose of teacher's few words and students' independent cognition, which will fully hand over the classroom to the students so that students will take the initiative to explore new knowledge in the classroom. In the process of teaching, through information teaching, it has greatly promoted students' interesting learning.

Keywords

GeoGebra Animation, Pythagorean Theorem

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学是一门优雅的学科，当你企图用蛮力去撬开它的大门时，等待的恐只能是无功而返，所以正确开门是关键，在漫长的学习数学时光中，寻找到数学学习思维，培养数学能力，我想它们的重要性是不言而喻的，其中由特殊到一般的数学思维尤为重要，下面我将从勾股定理的教学设计中展开体现。

2. 教材分析

勾股定理出自人教版初中数学 17.1 章节，勾股定理在几何学中有着不可撼动的地位，它描述了直角三角形三边之间的数量关系，在之后数学学习中起关键作用，新课标明确指出对这一章的要求是：探寻发现勾股定理，并掌握在几何图形中勾股定理的简单应用。

3. 学情分析

新课程标准中指出学生应当报以积极主动，充满想象，灵活思考的状态参与学习，除接受学习外，发挥小组作用进行合作交流同样是数学学习的重要方式之一[1]。教师应该充分尊重信任学生，引导学生主动探索，自主发现问题，产生思考，通过如此激发学生对数学的探索求知欲，加深理解和掌握数学的基础知识和基本技能，体会数学基本思想，收获数学基本活动经验。

针对学生学习勾股定理的学情出发，我总结了以下三点：

1) 学生身心，从初二学生的认知水平看，要自主探索发现勾股定理的三边数量关系很有难度。因为学生之间从未接触三边之间的二次方关系，难以思考到三者之间的关系，对于学生来说是收获也是挑战。同时，勾股定理作为后续几何度量运算和代数学习必要的基础，难度适中，对于学生培养数学能力是一次非常好的机会。

2) 优劣势：

优势：① 学生已了解过直角三角形，有一定的数形结合能力。② 初中生对于新事物容易产生好奇，求知欲强，喜于探索。

劣势：① 学生之间从未接触三边之间的二次方关系，难以想到。② 学生逻辑思维能力较薄弱，需要形象直观的去感受发现新事物。

3) 教学的重难点：

重点：探索和证明勾股定理。

难点：拼图的方式如何得到勾股定理。

4. 教学目标与策略

根据以上学情的分析与总结，制定了以下教学目标：

1) 从内容上，学生重走古人之路，站在古人的视角历经勾股定理的发现与产生，知晓勾股定理的内容，理解勾股定理的证明，同时能够在勾股定理的题型中简单的运用。

2) 从思想上，学生跟随古人一起观察，思考，猜测，最终总结验证，锻炼合情推理的能力；同时让学生领会到由特殊到一般的思考方式。且通过拼图设计的自主探究活动，让学生感受严谨理性的数学思维，培养形象思维。

3) 从活动经验上，小组间的探讨学习，培养了学生交流意识和表达能力，及时地对勾股定理历史文化的阐述，使学生感叹古人数学理解的出神入化，激发学生对数学学习的高涨热情。

基于学情和目标，制定了如下教学策略：

很多时候学生在面对勾股定理时常是直接接受，对于其如何得到完全不知，从而导致学生对于勾股定理的掌握时常遗忘，始终没有形成自己的知识。首先我们通过对已学知识直角三角形内角和相加等于 180° 的旧知进行回顾的过程中发现新问题，“既然角有如此特殊的关系，那么直角三角形的三边是否也有类似的特殊数量关系呢？”通过问题的提出，从而引出本节课的内容，同时也引起学生的探索与思考，接着我们跟随古人的步伐一起来探索直角三角形三边的关系，在探索的过程中，要包含着从特殊到一般的数学思想，开始先从特殊的等腰直角三角形入手，使学生独立思考、主动探索、合作交流，随后抛出一般的直角三角形，使得学生二次思考，联系两者，最终猜想出勾股定理，并带领学生通过拼接的方式先学生自己动手，再老师一起完成勾股定理的证明[2]。接着阐述勾股定理的数学历史，使学生体会其魅力，最后再做题巩固。最终完成本节课教学。

策略流程见图 1：

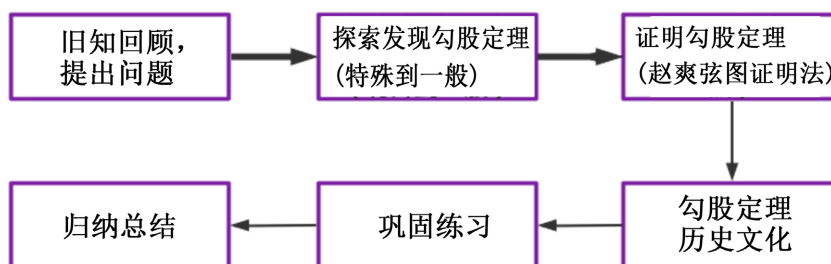


Figure 1. Flow-process diagram

图 1. 流程图

5. 教学过程

(一) 回顾旧知，提出新问题

引入语：同学们，今天我们来学习勾股定理，学习之前咱们先来看一个咱们的老朋友——直角三角形见图 2。有谁还记得直角三角形三个角有什么样的特点吗？

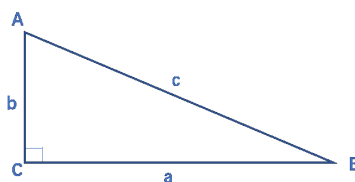


Figure 2. Right triangle
图 2. 直角三角形

学生回答：举手回答。

教师引导：总结回答“在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 。”提出疑问：既然直角三角形的角有如此特殊的关系，那么直角三角形的三边是否也有类似的特殊数量关系呢？只是我们不知道呢？

【设计意图】通过旧知识的回顾，启发提出未知问题，过渡自然，引起学生对未知问题的探索欲望。

(二) 创设情境，引入课题

相传 2500 年前，毕达哥拉斯见图 3 (公元前 580 年~约前 500，古希腊著名哲学家，数学家，天文学家。)有一次在朋友家做客，发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了三个正方形 A，B，C 的面积之间的数量关系，进而发现等腰直角三角形三边的某种关系[3]。



Figure 3. Pythagorean statue
图 3. 毕达哥拉斯像

1) 特殊的等腰直角三角形

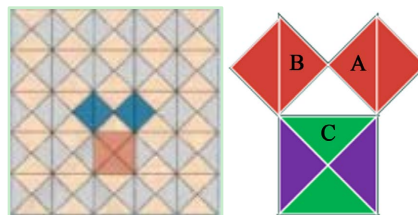


Figure 4. Area relationship
图 4. 面积关系

教师提问：尝试和古人一起思考正方形 A、B、C (见图 4) 的面积之间有什么关系？

学生回答：举手回答分享讨论结果。

教师总结：以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形

形的面积。

教师引导：学生观察正方形的边长所围成的等腰直角三角形，联系刚才所得的面积关系，即提出问题：由这三个正方形 A、B、C 的边长构成的等腰三角形三条边长度之间有怎样的特殊关系？

学生回答：举手回答分享讨论结果

教师总结：“等腰直角三角形斜边的平方和等于斜边的平方。”同学们，通过地砖图形的摆放，我们发现了特殊的直角三角形三边的数量关系，那一般的直角三角形是否也具备这样的数量关系呢？

【设计意图】穿越时空，来到毕达哥拉斯在朋友家发现地砖的情景，使学生站在和数学家一样的视角去思考发现新知识，激发学生勇于探索，过程中将课堂交给学生，激发学生独立思考和小组探讨。同时引入的切入点先是等腰直角三角形，随后再延展到一般直角三角形，培养了学生从特殊到一般的数学思想。

2) 一般的直角三角形



Figure 5. Area relationship

图 5. 面积关系

填表(每个小方格的面积均为 1)

教师引导：同学们我们来看看这两幅图(见图 5)，图中是一般的直角三角形，以它的三边为边长所构成的正方形 A、B、C 的面积是否具有类似的关系呢？请同学们带着问题来填写表格。

学生回答：完成表格

教师提问：相信 A、B 的面积难不到大家，通过正方形的面积公式就能计算，但是大家去计算 C 时，是不是发现它是倾斜，如果再用面积公式没法实施，那该怎样去计算 C 的面积呢？

相信聪明的同学已经想到了方法，下面老师给大家介绍一种方法

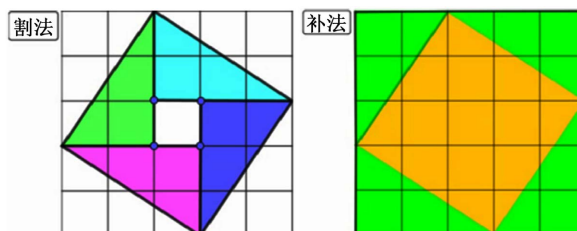


Figure 6. Cut and complement method

图 6. 割补法

教师讲解：割法，是将难以计算的大正方形分割成规整简便的直角三角形和正方形再进行计算。类比刚才的方法，是否还有其他方式得出，交给学生思考，再由老师公布：补法，可以将正方形填补成规整的正方形，再计算出规整正方形的面积和填补区域的面积，相减得到所求。学习了以上方法，相信面积 C 的计算已经难不到大家了。下面我们完成剩下的表格吧。

(通过运用 GeoGebra 动画见图 6，直观地给学生展示割补法是如何操作的，加深学生对新方法的印象)

学生填表：完成剩余表格。

教师引导：带领学生完成表格，同时进行思考，分析表中的数据，请同学们小组探究学习，看看有什么发现？

学生回答：分享小组讨论结果

教师总结：可以发现，以直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积之和，等于以斜边为边长的正方形的面积。即：直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方。结合以上我们思考的内容，请同学们大胆猜测任意的直角三角形三边之间有怎样的数量关系？

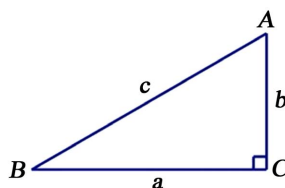


Figure 7. Right triangle
图 7. 直角三角形

见图 7，在直角三角形中，两直角边分别为 a ， b ，斜边为 c ，则有： $a^2 + b^2 = c^2$ 。可是猜想不一定正确，还需要我们去证明。

【设计意图】根据之前的疑问，引入一般直角三角形，置于网格中，通过计算其各边长所组成的正方形的面积，从而引导学生自主思考，发现“直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方”规律。根据所得结论猜测是否任意的直角三角形都有 $a^2 + b^2 = c^2$ 这个规律，为下一步猜想的证明做铺垫。

3) 赵爽弦图证明法

教师引入：其实有很多种证明方法，今天给同学们介绍的是赵爽弦图证明法：要想证明 $a^2 + b^2 = c^2$ ，可以先得到一个任意直角三角形，然后以它的两条直角边 a 、 b 为边作两个正方形。

如图 8 是以直角三角形的两条直角边 a 、 b 为边所作的两个正方形，通过剪、拼把它拼成图 9 的样子，你能做到吗？试试看。

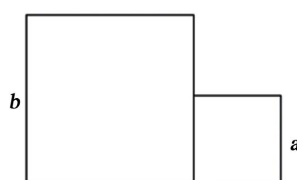


Figure 8. Square
图 8. 正方形

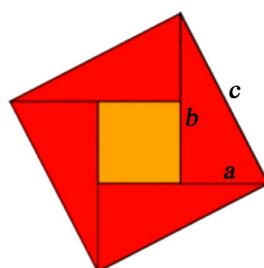


Figure 9. Square after splicing
图 9. 拼接后的正方形

学生实践

教师总结：相信每位同学都有自己的思路，下面和老师一起看看老师是怎样拼的吧。

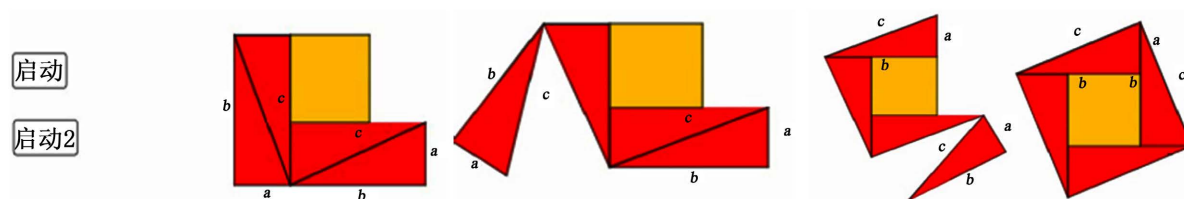


Figure 10. Splicing process diagram

图 10. 拼接流程图

演示 GeoGebra 动画，见图 10 (我们可以在底下边长上截取一段 a ，那剩下那一段就是 b ，然后按照如图这样的分割，那这样我们就也分成了四个全等的三角形和一个小正方形，然后再进行旋转，我们发现拼成的正方形刚好是以 c 为边长的大正方形，而左边的面积是 $a^2 + b^2$ ，利用这种拼图的方式我们证明出 $a^2 + b^2 = c^2$ 是不是很巧妙呀！而我们证明的这个猜想其实就是我们今天学习的最重要内容 - 勾股定理)。

任意的直角三角形见图 11，记它的两直角边为 a ， b ，斜边为 c ，则有： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

聪明的同学们，请思考为什么要叫勾股定理呢？

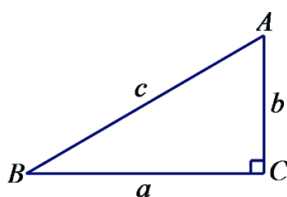


Figure 11. Right triangle

图 11. 直角三角形

【设计意图】猜想是否任意的直角三角形都有 $a^2 + b^2 = c^2$ 这个规律，为证明猜测，我们学习了“赵爽弦图证明法”。通过对图形进行切割、拼接的方式，巧妙的利用了面积关系证明了勾股定理。同时其中采用到 GeoGebra 动画演示，使切割拼接形象化，更能加深学生印象，同时激发学生学习兴趣。最后巧提勾股定理名字的产生，引出下一步数学史的讲解。

4) 勾股定理数学文化

教师引入：在中国古代，对手臂进行描述时，将手臂弯曲的上半部分叫作“勾”，下半部分叫作“股”。则引申入直角三角形时，便喜欢称直角边的短边为“勾”，长边为“股”，斜边称为“弦”。这便是勾股定理名字的由来(见图 12)。



Figure 12. Example of pythagorean string

图 12. 勾股弦示例

发现勾股定理的国家有很多，但是我国确是时间最早的。三千多年前，早在周朝时期，数学家商高就提出，若将直尺折成一个直角，将弯折的直尺看作直角三角形，如果有勾等于三，股等于四，那么弦就等于五，即“勾三，股四，弦五”，它被收录于我国古代著名的数学著作《周髀算经》中，所在我国也把勾股定理称作“商高定理”。

古希腊数学家毕达哥拉斯，在公元前 5 世纪发现了这个定理并且证明了，所以勾股定理又叫作“毕达哥拉斯定理”，传闻他在得到定理之后欢呼雀跃，为了庆祝杀了一百头牛，于是后人又有趣的称“毕达哥拉斯定理”为“百牛定理” [4]。

【设计意图】通过学习勾股定理数学史，我国与外国发现的有趣经历和时间对比，一是使学生了解数学历史魅力，二是对学生进行爱国主义教育，激发他们奋发向上。

(三) 巩固提高

教师引入：学习了勾股定理，同学们来和老师一起完成课堂练习

练习一：图 13 中四边形都是正方形，正方形边长构成的三角形都是直角三角形，已知正方形 A、B、C、D 的边长分别是 12，16，9，12，求最大正方形 E 的面积。

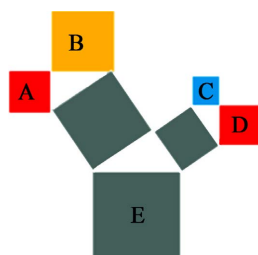


Figure 13. Pythagorean tree

图 13. 勾股树

$$SE = SA + SB + SC + SD = 122 + 162 + 92 + 122 = 625$$

【设计意图】通过练习题的解答，培养了学生解决问题的能力 and 掌握正方形面积与直角三角形三边关系的联系，实践勾股定理知识，规范学生书写。科学的课堂练习，也是增强学生学习效果的重要环节，它能够达到夯实基础，升华知识的目的。

(四) 课堂小结与作业

教师引入：最后我们来总结一下今天所学的内容。

- 1) 对于任意的直角三角形，如果两直角边分别为 a ， b ，斜边为 c ，那么有 $a^2 + b^2 = c^2$ 。
- 2) 特殊到一般的数学思想：等腰直角三角形 → 网格中的直角三角形 → 一般直角三角形。
- 3) 证明勾股定理的一般思路：赵爽弦图证明法，图形经过没有重叠，没有空隙，的割补拼接后，其面积仍然保持不变。

作业：

- 1) 必做：回顾体会赵爽弦图证明法。
- 2) 选做：通过网络的途径了解勾股定理的其他证明方法。

【设计意图】课堂尾声交给学生，集思广益，对本节课所学知识点进行总结，理清知识脉络，强化重点。最后留下课后作业，通过作业完善自身不足。

6. 总结

本文通过对人教版初中数学教材八年级下册 17.1 勾股定理的教学设计的阐述，体现了由特殊到一般

的数学思维, 引发学生深层次思考, 培养学生思维品质, 为学生今后在碰到数学问题时提供了良好解决途径, 更有利于锻炼学生自主探究学习能力。

基金项目

本文受到新疆师范大学教学改革研究项目(SDJG2021-08)“‘双一流’背景下数学与应用数学一流专业建设与实践研究”的资助。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准(2011年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.
- [2] 许琛. 浅谈勾股定理教学中的真探究[J]. 山东教育, 2014(1): 74.
- [3] 董涛, 黄炳锋, 杨勤春. 中学数学教材与课例分析[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [4] 吴骏, 汪晓勤. 国外数学史融入数学教学研究述评[J]. 比较教育究, 2013, 35(8): 78-82.