Advances in Education 教育进展, 2023, 13(12), 10473-10480
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.13121614

例谈构造法在初等数学解题中的应用

胡　帆

石东路小学，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2023年11月25日；录用日期：2023年12月21日；发布日期：2023年12月28日

摘　要

构造法是数学研究中不可或缺的重要工具之一。对于构造法在初等数学解题中的应用，本文从以下三个方面进行论述：首先介绍构造法的概念；其次，举例说明构造法在初等数学中的应用，包括构造辅助函数法、辅助方程法、辅助图形法以及构造辅助模型法；最后总结了构造法在初等数学解题中的重要性。

关键词

构造法，解题应用，初等数学

Applications of Construction Method in Solving Elementary Mathematics Problems with Examples

Fan Hu

Shidong Road Primary School, Hohhot Inner Mongolia

Received: Nov. 25th, 2023; accepted: Dec. 21st, 2023; published: Dec. 28th, 2023

Abstract

Construction method is one of the indispensable and important tools in mathematical research. In this article, we discuss the applications of construction method in solving elementary mathematical problems in the following three aspects: Firstly, we introduce the concept of construction method. Secondly, to illustrate the applications of construction method in elementary mathematics, we provide some examples, including auxiliary function construction, auxiliary equation construction, auxiliary graph construction and auxiliary model construction. Finally, we summarize the importance of construction method in solving elementary mathematical problems.

文章引用：胡帆．例谈构造法在初等数学解题中的应用[J]．教育进展, 2023, 13(12): 10473-10480.
DOI: 10.12677/ae.2023.13121614

Keywords

Construction Method, Application of Solving Problem, Elementary Mathematics

1. 引言

数学知识通常具有较强的抽象性与复杂性，尤其是一些综合性试题，常常会让人陷入解题困境。随着教育的快节奏发展，对学生数学能力的考察不仅局限于公式、定理的学习，而且对数学思维能力有着更高的需求，以便达到数学核心素养的课程目标。构造法体现着数学中转化、类比和化归等重要思想，是一种极其重要的解题方法，也是一种极具技巧性和创造性的方法。近年来，有很多文献运用构造法分别解答了许多不同类型的数学问题，可参见[1] [2] [3]。

2. 构造法的概念

作为数学而言，数学的符号从一开始就是构造的。如把现实中的问题转化为一种数学符号的表述，把对空间的直觉的图像构造成几何符号等。在某种意义上可以认为数学就是人们把一种思维转化为符号的理性构造[4]。

构造法解题是根据已知题干的特点，用已知条件中的信息作为“线索”，通过观察、分析、联想、综合，有目的的构造出一个我们所需要的模型，从而把复杂的旧问题转化为更容易解决的新问题。我们在运用构造法时，要根据问题的特点，明确构造目的，这样更便于我们确定方案。

构造法是数学解题中非常重要的基本方法之一。在数学发展历史上，有许多数学家利用构造法证明了很多深刻的结果。例如，早在古希腊时期，数学家欧几里得在它的著作《几何原本》中，用构造法证明了“素数的个数是无穷多个”。数学家欧拉将大陆和桥梁构造成了点线图模型，进而解决了著名的哥尼斯堡七桥问题。在我国古代数学著作《周髀算经》中，商高运用“勾股圆方图”证明了勾股定理，其中的“弦图”，就是运用了割补构造法给出的。

构造法的形式多种多样，是一种极其灵活的方法。在初等数学中，我们不仅可以运用构造法构造辅助函数，辅助方程来解决代数问题，还可以通过构造辅助图形来解决几何问题，达到化繁为简，化难为易的效果，使得问题能够跨过抽象的难点，变得更为直观，使得问题便于解决。

3. 构造法在初等数学中的若干应用

3.1. 构造辅助函数法的应用

在遇到某些函数问题的求解时，根据题目的已知条件，构思如何将其组合成一种新的函数关系至为重要。用这种新的函数关系去替换原来的函数关系，使旧问题通过构造辅助函数转化成新问题。这时我们就可以利用函数的相关性质去解决原有问题。构造辅助函数法是一种很灵活的思维方法，也是一种效果非常显著的解题手段，我们在应用时要有意识的进行构造。下面我们举一些例子来说明构造辅助函数法在初等数学中的应用。

例 1 求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值。

解：由已知可得：$x \ge 0$ 且 $1-x \ge 0$，则 $0 \le x \le 1$。根据 x 的取值范围，令

$$x=\sin^2\theta\text{，}\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$$

所以

$$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

故当 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\frac{1}{2}$，此时 y 有最大值为 $\sqrt{2}$。

注 1 本题是根据 x 的取值范围联想到构造三角函数关系式。

例 2 求证 $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$ [5]。

证明：构造函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}, x \in [0,+\infty)$$

注意到 $f(x)=1-\frac{1}{1+x}$，则函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $x \in [0,+\infty)$ 上单调递增。

又因为 $|a+b| \le |a|+|b|$，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|},$$

从而该命题得证。

注 2 由三角不等式可得，$|a+b| \le |a|+|b|$。观察要证明的不等式两端，只要当 $t_1 \ge t_2 \ge 0$ 时，有 $\frac{t_1}{1+t_1} \ge \frac{t_2}{1+t_2}$ 成立即可。因此我们考虑在 $[0,+\infty)$ 区间上构造辅助函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$。

3.2. 构造辅助方程法的应用

方程是初等数学的重要内容之一，也是数学解题中的一个重要工具。它与数、式、函数等很多知识密不可分。它是联系已知量和未知量的重要桥梁，是整个初等数学体系中不可或缺的部分。我们在遇到有关方程的问题时，可以根据条件中的结构特征和数量关系构造出一个新的方程，然后根据方程的某些特点，使原问题转化为新的关系，从而将问题化繁为简。在运用构造辅助方程法时，要善于观察、分析、整理数量关系，进而构造相应的辅助方程。如鸡兔同笼问题、和倍问题、差倍问题等可以列方程去求解，还可以利用构造方程法求动点的轨迹等等。

构造方程解题可以归纳为以下三个步骤：

1) 将要求解的问题转化为方程问题；
2) 讨论这个方程的相关性质或解这个方程(对于一元二次方程，我们常常应用判别式和韦达定理)；
3) 将方程的相关结论再返回到原问题的结论，使二者相通。

例 3 求 $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$ 的值。

解：由观察可以知道 $x=\frac{2\pi}{5}$，$\frac{4\pi}{5}$ 是方程

$$\cos x+\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$$

的两个解。进一步整理可得

$$2\cos^2 x+\cos x-\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=0\text{。}$$

故 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 与 $\cos\frac{4\pi}{5}$ 是方程

$$2y^2+y-\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

的两个不同的根。由韦达定理可得 $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$。

注 3 这类题目如果直接计算比较困难，我们观察之后发现，可以通过构造一元二次方程，利用根与系数之间的关系(韦达定理)解决问题。

例 4 已知实数 x,y,z 满足 $x+y=5$，$z^2=xy+y-9$，求 $x+2y+3z$ 的值。

解：由已知可得

$$\begin{cases}(x+1)+y=6\\(x+1)y=z^2+9\end{cases}$$

以 $x+1,y$ 为两个实数根，构造方程

$$t^2-6t+z^2+9=0\text{。}$$

因为方程有实数根，所以 $\Delta=(-6)^2-4(z^2+9)=-4z^2\geq 0$。由此可得 $z^2=0$，且 $\Delta=0$。即方程 $t^2-6t+9=0$ 有两个相等的实数根 $t_1=t_2=3$，于是 $x+1=y=3$。综上：

$$x+2y+3z=2+2\times 3+0=8\text{。}$$

注 4 本题通过构造一元二次方程，可以使问题化难为易。由题干可能会使我们联想到韦达定理，但是仍然需要我们进行适当的变形，才能构造出辅助方程去求解。

例 5 设 $a>b>c$ 且 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=1$，求 $a+b$ 的范围[6]。

解：由 $a+b+c=1$ 可得，$a+b=1-c$。将 $a+b=1-c$ 两边同时平方得

$$a^2+b^2+2ab=1-2c+c^2\text{。}$$

再将已知条件 $a^2+b^2+c^2=1$ 代入上式，得 $c^2-c=ab$。由上可知，a，b 是方程

$$x^2+(c-1)x+(c^2-c)=0$$

的两个不相等的实数根。于是

$$\Delta=(c-1)^2-4(c^2-c)=-3c^2+2c+1>0\text{。}$$

解得，$-\frac{1}{3}<c<1$，也即 $-\frac{1}{3}<1-(a+b)<1$。所以有 $0<a+b<\frac{4}{3}$。

注 5 根据题干条件及其特点，我们可以构造一元二次方程“$x^2+(c-1)x+(c^2-c)=0$”，进而用判别式给出要求的取值范围。

例 6 是否存在周长为 6，面积为整数的直角三角形。若存在，请给予证明并说出有几个，若不存在请说出理由。

解：设这个直角三角形的两条直角边分别为 a，$b(a \le b)$ 斜边为 c，面积为 s，可得

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$$

整理得：$\begin{cases} a+b=6-c \\ ab=18-6c \end{cases}$。显然 a，b 是方程 $x^2-(6-c)x+(18-6c)=0$ 的两个实数根，由此得出：

$$\Delta=(6-c)^2-4(18-6c)\ge 0,$$

解得 $c \ge 6\sqrt{2}-6=2.4$。又因为 $c<a+b=6-c$，所以 $c<3$。另一方面，由条件

知 $s=\frac{1}{2}ab=9-3c$ 是整数，故 $3c$ 也是整数。又由 $7.2 \le 3c<9$ 知：$3c=7$ 或 $3c=8$。

当 $3c=7$ 时，$s=2$，方程组 $\begin{cases} 3(a+b)=11 \\ ab=4 \end{cases}$ 无解，所以 $3c \ne 7$。

当 $3c=8$ 时，$s=1$，方程组 $\begin{cases} 3(a+b)=10 \\ ab=2 \end{cases}$ 有解，解得

$$a=\frac{5-\sqrt{7}}{3}, b=\frac{5+\sqrt{7}}{3}, c=\frac{8}{3}。$$

综上所述，这样的直角三角形有且只有一个。

注 6 本题是有关三角形的几何问题，通过已知条件，我们构造一个一元二次方程，将几何问题“代数化”，使得问题更为容易的解决。

3.3. 构造法在几何图形中的应用

构造图形法是指根据已知条件中数量关系所具有的几何意义，构造出多种图形，使旧的数量关系在新的几何图形中予以直观展示，进而利用几何性质去解决问题。若想熟练运用构造法，首先我们要熟悉掌握一些基本的几何构图。对于条件和结论联系较为隐蔽的问题，要善于发现题设条件中的几何意义，通过构造适当的几何图形，将已知条件和结论联系起来，再添加合理的联想从而巧妙地构造辅助图形。这不仅使几何图形与代数知识相互渗透，还可以锻炼学生分析、处理、解决问题的能力。通过联系几何图形，发散学生的思维，并培养学生数学建模的能力。通常在数形结合中我们会遇到以下问题：

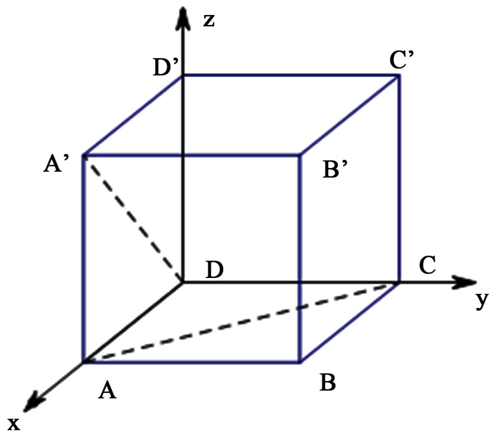
1) 实数与数轴上点的对应关系(例如：数对、直角坐标系)；
2) 函数与图像的对应关系(正比例函数、反比例函数等)；
3) 曲线与方程的对应关系(例如：椭圆、抛物线、双曲线等)；
4) 已知条件中给出的代数式或等式的结构具有明显的几何意义(例如：三角函数等)。

无论在生活中还是学习中，运用数形结合的思想解决问题时，不仅直观而且非常容易发现解题途径，同时能够避免复杂的计算与推理，还可以大大简化题解过程。这在完成填空题、选择题中更能显示其优越性。在学习初等数学解题时应该注意培养这种构造图形的思想意识。

例 7 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 棱长是 a，求异面直线 DA' 与 AC 的距离。

解：首先创立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0,0,0)$、$A'(a,0,a)$、$A(a,0,0)$、$C(0,a,0)$、向量 $DA'(a,0,a)$、向量 $AC=(-a,a,0)$。

设向量 $n=(x,y,z)$。因为向量 n 与向量 AC、向量 DA'都垂直。则 $\begin{cases} n\cdot AC=0 \\ n\cdot DA'=0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} -ax+ay=0 \\ ax+az=0 \end{cases}$，解得 $x=y=-z$。



令向量 n 的坐标为 $(1,1,-1)$。因为向量 $A'C=(-a,a,-a)$。因此 DA'与 AC 的距离为

$$d=\frac{|A'C\cdot n|}{|n|}=\frac{|-a+a+a|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

所以直线 DA'与直线 AC 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

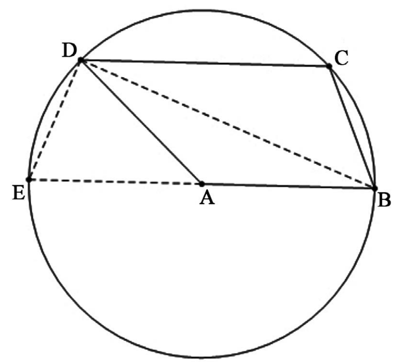
注 7 直接求解这类题是极其困难的，因此我们构造空间直角坐标系使得问题一目了然，更加容易求解。

例 8 在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=AC=AD=a$，$BC=b$，求 BD 的长。

解：以 A 为圆心 AB 为半径构造圆 A，由于 $AB=AC=AD=a$，则点 C 和点 D 在圆 A 上，延长 BA 交圆 A 与 E，连接 DE 得 BDE 是直角三角形，由于 $AB//CD$，$BC=b$，所以 $DE=BC=b$。又由于 $EB=2AB=2a$，故

$$BD=\sqrt{(2a)^2-b^2}=\sqrt{4a^2-b^2}\ 。$$

构造的图形如下：



注 8 求线段的长度一般是把线段放在直角三角形或比例式中，根据题意构造辅助圆 A，由于直径所对的圆周角是直角可得，三角形 BDE 是直角三角形，在直角三角形中很容易求出 BD 的长度。

3.4. 构造法在排列组合问题中的应用

在现实生活、学习和工作中我们会遇到某些抽象难以理解的问题，这时需要通过一种方法将困难的

问题转化为简单的问题或者是转化为我们熟悉的问题。而构造模型法在此就显得尤为重要，特别是在排列组合中的运用，即构造模型解决实际问题[7]。

例 9 将 7 个矿泉水瓶放成一排，其中有三个水瓶编号为甲、乙、丙，求甲、乙、丙三个水瓶必须相邻的排法总数。

解：这个问题较为简单，这属于排列组合中的相邻问题。在构造模型中我们常常使用“捆绑法”，首先要将相邻的甲、乙、丙 3 个矿泉水瓶捆在一起，将它看作一个整体，从而由原来的 7 个矿泉水瓶变为现在的“5 个矿泉水瓶”，之后进行全排列，再对甲、乙、丙 3 个矿泉水瓶进行全排列，所以排列总数为 $A_5^5A_3^3$。

注 9 构造“捆绑法”主要用于求解“必须相邻”的题型，而另外一种“必须不相邻”的题型我们需要构造“插入法”模型求解。

例 10 现在有完全相同的 10 本练习册全部分给七名学生，每名学生至少一本练习册，问共有多少种不同的分法。

解：题目中练习册的分法有三类：

1) 有 3 名学生每名学生分到两本练习册，其余 4 名学生每名学生分到一本练习册，其分法总数为 C_7^3；

2) 有一名学生分到 3 本练习册，另外一名学生分到两本练习册，剩余 5 名学生每名学生分到一本练习册，其分法总数为 $C_7^1C_6^1$；

3) 有一名学生分到 4 本练习册，剩余 6 名学生每名学生分到一本练习册，其分法总数为 C_7^1。

从上面如此多的解题过程中我们可以看到，这类问题进行分类计算比较繁琐，如果这道题中练习册的本数较多，我们就非常不好处理，但是我们可以运用“插入法”。

将十本完全相同的练习册排成一行，则十本练习册中间出现了九个空隙(首尾两个空隙不算)。现在我们用“隔板”将十本练习册分隔成有序的七份，每名学生依次按序号分到对应位置的几本练习册中(可能是一本、二本、三本、四本)，通过上面情境分析我们便可以知道，分练习册的方法其实是为隔板的插法，即在九个空隙之中插入六个“隔板”，算得方法总数为 $C_9^6=84$ 种。这种方法使得解题过程更为简洁明了，这便是“插入法”。

注 10 本题通过构造插板模型将原有分类计算的方法简单化、模型化，使之更加容易解答。

4. 总结

构造法在初等数学解题中的应用，它是极其富有创造性和技巧性的一种解题方法。本文通过 10 个例子分别对构造辅助函数法，辅助方程法，辅助图形法以及构造辅助模型法进行了阐述，突出了构造法在数学解题中的广泛应用和重要价值。数学构造法作为一种数学方法和一种数学思维方式为数学的发展和应用做出了重要的贡献。在初等数学的学习中，熟练运用构造法会对数学有着更进一步的理解。我们在讲授中小学数学的过程中，在实现知识进阶的同时，也要体现核心素养的进阶。注重培养学生兴趣的同时，以核心素养为导向，对于提高学生空间思维能力以及锻炼学生分析处理问题的能力是非常有益的。进而达到会以数学的眼光观察现实世界，分析问题的同时会用数学的思维思考现实世界，并且在用数学方法解决问题时会用数学的语言表达现实世界。

参考文献

[1] 郑玉军, 邓宇龙, 华玉春. 有关定积分问题的构造法[J]. 湖南科技学院学报, 2023(3): 5-8.

[2] 王雪. “构造辅助圆”在初中数学解题中的灵活运用[J]. 中学数学, 2023(18): 21-22.

[3] 刘少锋. 指向整体关联的构造法教学——以“直角三角形全等的判定”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(20):

19-22.
[4] 王宪昌. 数学思维方法[M]. 第 2 版. 北京: 人民教育出版社, 2010.
[5] 李明振. 数学方法与解题研究[M]. 第 2 版. 上海: 上海科技教育出版社, 2002.
[6] 陈克胜. 关于“构造法”解题的构思途径[J]. 高等函授(自然科学版), 2005(2): 33-35.
[7] 方亚萍. 用构造法巧解数学排列, 组合题例谈[J]. 教学月刊, 2007(9): 48-49.