

初中数学问题链教学的案例研究

——以“勾股定理”为例

牟超惠

西南大学教师教育学院, 重庆

收稿日期: 2023年2月20日; 录用日期: 2023年3月21日; 发布日期: 2023年3月28日

摘要

问题链教学是培养学生四大能力的重要途径, 但有许多教师对问题链教学理解不深入。为了解初中数学课堂问题链教学现状, 现以“勾股定理”第一课时为主题的数学课堂进行分析。研究发现初中教师设计与实施问题链教学时存在以下三个问题: 第一, 注重数学知识, 方法等方面关联, 缺乏思考视角关联; 第二, 问题链所体现的数学思维较单一; 第三, 在教学过程中, 教师一问到底, 忽视学生主体地位。

关键词

初中数学, 数学问题链, 课堂教学

A Case Study of Mathematical Problem Chain Teaching in Junior High School

—Taking “Pythagorean Theorem” as an Example

Chaohui Mou

College of Teacher Education, Southwest University, Chongqing

Received: Feb. 20th, 2023; accepted: Mar. 21st, 2023; published: Mar. 28th, 2023

Abstract

Problem chain teaching is an important way to cultivate students' four abilities, but many teachers do not have a deep understanding of problem chain teaching. In order to understand the current situation of problem chain teaching in junior middle school mathematics classroom, this paper analyzes the mathematics classroom themed with “Pythagorean Theorem” in the first period. It is found that junior middle school teachers have the following three problems when designing and

文章引用: 牟超惠. 初中数学问题链教学的案例研究[J]. 教育进展, 2023, 13(3): 1321-1325.

DOI: 10.12677/ae.2023.133208

implementing problem chain teaching: First, they pay attention to the correlation of mathematical knowledge and methods, and lack the correlation of thinking perspective. Second, the mathematical thinking reflected in the problem chain is relatively simple. Thirdly, in the teaching process, teachers ask questions to the end and ignore students' subject status.

Keywords

Middle School Mathematics, Mathematics Problem Chain, Classroom Teaching

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

数学家哈尔莫斯说过“问题是数学的心脏”[1]。21世纪以来,学生的问题意识受到了重视,最新颁布的《义务教育数学课程标准(2022年版)》对学生发现问题、提出问题、分析问题以及解决问题的能力提出了更高的要求[2]。这意味着教师面临了一个巨大的挑战:如何在传统教学的基础上推进改革?如何改进教师传统的教学信念?

事实上,我国学者在数学问题提出、问题式学习、问题链教学等方面已有相关研究,并且我国中小学数学教师普遍接受问题驱动的数学教学观念。但在实践过程中仍存在不足[3],这主要是因为不少传统教师对于问题链教学设计的理解不够深入,他们能够感觉到探究教学、问题驱动教学与问题链教学三者之间有关联也有差异,但说不清道不明。因此,笔者将对初中数学课堂上的问题链教学进行分析,了解其现状。

2. 数学问题链教学

问题链最早是由黄光荣教授提出来的,他认为问题链是数学知识结构表现形式[4]。随着研究的不断深入,唐恒钧教授与张维忠教授通过实践摸索与理论概括,逐渐形成了关数学问题链教学的基本原理和实践策略。其中确立问题链的三大基点是教学目标、数学思维以及学生认知,在设计与实施问题链教学时应该把握三个关键:数学问题链设计以“关联”为起点;数学问题间的关系体现基本的数学思维;数学问题的呈现方式以教学功能为依据[5]。

基于此,我们认为设计数学问题链教学需要经历三个阶段:第一、寻找关联点。数学关联分为表层信息关联、思考方法关联与思考视角关联。关联点的选择不同时,最后呈现的课堂效果也不同。第二、呈现数学思维。常见的数学思维有一般化、特殊化、类比以及逆向思维,在教学中应该将数学思维方法体现在所设计的问题中,让学生明白教师为什么会在课堂上提出这样的问题。第三、选择恰当的方式应用问题链。教学目标不同,问题链的整体功能以及若干主干问题的教学功能都不同,其应用方式也有差异[6]。

3. 课例对比研究过程

研究所选用的是一位初中数学教师H教师的教学视频,课例研究的主题是“勾股定理”第一课时,学生均具备一定的分析与归纳能力,初步掌握研究图形性质的基本方法。

所收集的数据包括勾股定理教学设计、课堂录像视频、其他教师的点评,其中已将视频转译为文字。

在数据分析的过程中，提炼出了课堂上的问题链，并对 H 教师的问题链及其目的进行深入分析。

4. 研究发现

H 教师在课堂上一共提出 61 个问题，其中数学问题有 53 个，此处数学问题指学术性问题，不包括非学术性问题，例如“这道题谁来回答？”将其整理为一个包含 6 个一级问题的问题链，其课堂上呈现的问题链及其目的如表 1 所示。

Table 1. H teacher's problem chain and purpose

表 1. H 教师问题链及其目的

课堂上的问题链	目的
Q1: 看见动态的勾股树有什么感觉? 这么美的图形蕴含什么数学知识呢? Q1-2: 图中三个正方形的面积之间有怎样的关系? 为什么? Q1-3: 从中可以转化得到等腰直角三角形三边在数量上有什么关系?	创设情境, 引入新知。
Q2: 任意一个直角三角形的三边也有这样的关系吗? Q2-1: 运用割补法分别计算正方形 A、B、C 和正方形 A'、B'、C' 的面积, 看看它们之间有怎样的关系? 你能展示一下思路吗? 还有其他思路吗? Q2-2: 记正方形的边长分别为 a、b、c, 直角三角形三边的关系如何表示? Q2-3: 如果直角三角形两直角边长分别为 a、b, 斜边长为 c, 那么我们可以得到什么?	特殊到一般
Q3: 请大家思考如何证明这个命题呢? Q3-1: 这两个正方形的面积之和如何来表示? Q3-2: 这两个直角三角形全等吗? 你是怎么判定的? Q3-3: 将这两个三角形分别进行旋转得到新的四边形, 新四边形的面积如何来表示? 为什么? Q3-4: 你能用四个全等的直角三角形拼成一个新的正方形吗? 有几种拼法? 如何用拼图验证你的猜想? Q3-5: 第一种拼图如何证明我们的猜想? 第二幅图呢?	动手操作, 验证猜想。
Q4: 如果给出三个正方形, 如何根据已知的面积求未知的边呢? Q4-1: 观察这幅图, E 的面积等于? 黄色的正方形面积等于? 绿色的呢? 那么正方形 E 的面积可以如何表示?	知识提升, 思维训练。
Q5: 若直角三角形中, 有两边长是 3 和 4, 则第三边的平方为多少? Q5-1: 解这道题我们应该注意什么? 你有什么感悟? Q5-2: 当斜边不确定的时候, 我们应该利用数学中的什么思想?	勾股定理的应用
Q6: 这节课我们都学到了哪些知识? 用到了什么数学思想? 经历了怎样的探究过程?	总结与归纳

4.1. 勾股定理与其他主题的关联

从教材的横向比较与纵向比较来看，勾股定理的知识可以解决许多三角形长度与角度的计算题，在高中学段，利用赵爽弦图可以得到基本不等式的几何意义，将勾股定理推广到一般三角形中还可以得到余弦定理。勾股定理的证明过程中将数量关系转换为面积关系的思路在学习完全平方公式和平方差公式的几何解释时也有所体现。除此之外，其所涉及的等面积变换思想还可以延伸至立体几何通过等体积变换进行计算与证明。总之，勾股定理在整个中学阶段的重要性不言而喻。

通过表 1 可以发现，H 教师关注知识上的关联，虽然也有注重方法的联系，让学生亲自动手操作、拼图、演算，但是更多的只是将这种联系聚焦在学生学会应用勾股定理，忽视了学生对数学方法本身的掌握。

4.2. 对一级问题的研究

H 教师一级问题体现了一般化的数学思维，其教学思路是：观察在网格中发现等腰直角三角形三边

之间的数量关系，并过渡到一般的直角三角形，提出猜想，体现了一般化思维。让学生动手拼图验证之前的猜想。H 教师的教学过程直观地展示出勾股定理，让学生“知其然”，但是未能让学生“知其所以然”。

4.3. 对二级问题的研究

进一步分析 H 教师课堂中的二级问题，从问题链的整体教学功能来看：问题链的设计为学生学习勾股定理提供了载体，在学生的头脑中建构了其关于勾股定理的知识结构。从问题链各主干问题的教学功能来看：H 教师表现出对数学知识的关注，注重学生对知识的应用。

起点问题性(Q2-1~Q2-2)，将研究对象从正方形面积关系过渡到等腰直角三角形三边数量关系；随后，教师设计延伸性问题让学生通过割补法探究正方形之间的面积关系(Q3-1)，但子问题之间跨度太小；教师将问题延伸，追问学生新构造出来的正方形的面积如何表示？(Q4-3)，学生能够通过图像直观地感受到勾股定理的巧妙；最后让学生动手拼图验证猜想(Q5)，切身体验勾股定理的呈现过程；最后，Q6~Q9 这一系列问题都体现了对勾股定理的应用。

5. 结论

通过深度剖析这节课上的数学问题链可知：H 教师注重数学知识的教学。学生对方法的掌握还不牢固，如果将赵爽弦图变为青朱出入图，学生便会被难倒，究其原因是学生对于证明勾股定理方法的实质并未掌握。H 教师虽然通过设计问题链引导学生利用赵爽弦图的思路证明勾股定理，但要让学生自发的想到这个思路还存在一定的困难，这就需要教师做好“脚手架”的工作，可参考吴增生老师的做法[7]，这样的设计易使学生通过类比形成探究思路，从而自然地发现勾股定理的结论。

基于以上的分析，可以发现初中数学课堂问题链教学还存在很多问题，如下：

一、注重数学知识，方法等方面关联，缺乏思考视角关联。思考视角关联有助于学生形成思考某一领域数学问题的基本框架。教师在设计与实施问题链教学时能有意识的以知识关联与方法关联为起点，但容易忽视思考视角关联的重要性。这是由于教师缺乏从整体把握的教学观念，过分关注知识与方法的教学，忽视其在整个数学学习中的地位与作用。

二、问题链所体现的数学思维较单一。数学问题链教学主要倡导一般化，特殊化，类比，逆向等多种基本思维。在教学中，数学思维通常不是单一出现的，有可能是多种思维独立并存，也有可能是相互融合。但初中数学教师对教材理解不够深入，设计问题链教学时通常只体现一种或者两种数学思维，这对学生造成负面影响，限制了学生思考的空间。

三、实施过程中，教师一问到底，忽视学生主体地位。问题链教学的实施过程中，教师需要根据教学目标选择恰当的方式呈现问题，不是全程只有教师一个人提问，而是由教师引导学生提出问题。课堂中，学生活动是一个不可控因素，教师要学会设计教学活动处理好预设与生成的关系。

了解到目前初中数学问题链教学的现状，那么，中学教师该如何利用“问题链”创设出“活”的课堂呢？事实上，教师需要做到以下三点：第一、培养“高观点教学”意识。教师以高等数学中的思想、方法以及思考视角等与学生所学的数学知识建立起联系，促使学生深入浅出的理解数学本质。第二、树立“大单元整体教学”理念。既要掌握数学学科整体知识体系，又要整体把握中学数学教学目标，还要具备系统思维，对教学内容问题化，再以问题链驱动课堂。第三、重视学生主体地位。以人为本的教育理念强调尊重学生的主体地位，知识是学生主动在头脑中建构而成的，而非教师被动灌输。

参考文献

- [1] Halmos, P.R. (1980) The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, **87**, 519-524.
<https://doi.org/10.2307/2321415>

-
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [3] 唐恒钧, 张维忠. 数学问题链教学: 缘起、进展与展望[J]. 中学数学教学参考, 2021(16): 71-73.
- [4] 黄光荣. 问题链方法与数学思维[J]. 数学教育学报, 2003(2): 35-37.
- [5] 唐恒钧, 黄辉. 数学问题链教学设计与实施的三个关键[J]. 中学数学, 2020(5): 78-80.
- [6] 唐恒钧, 张维忠. 数学问题链教学的理论与实践[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2021.
- [7] 吴增生, 郑燕红, 李宏彦, 陈娅芬. 勾股定理教学实验研究——让学生真正经历勾股定理的“再发现”过程[J]. 数学教育学报, 2017, 26(1): 50-54+75.