

类比法在高中数学教学中的应用

张贺一, 赵雪*

北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

收稿日期: 2023年3月14日; 录用日期: 2023年4月11日; 发布日期: 2023年4月20日

摘要

类比法作为一种有效的学习方法, 有助于学生触类旁通, 实现数学综合素养的提升, 是提高学生逻辑推理能力和创新思维能力的有力工具。本文从高中教学视角出发, 对类比法在实际教学实践中的实践意义及具体应用进行探究, 以期提升教学实效。

关键词

类比法, 高中数学教学, 应用与研究

The Applications of Analogy in Teaching High School Mathematics

Heyi Zhang, Xue Zhao*

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Mar. 14th, 2023; accepted: Apr. 11th, 2023; published: Apr. 20th, 2023

Abstract

As an effective learning method, the analogy can help students learn by analogy and improve their comprehensive mathematical literacy. It is also a powerful tool to improve students' logical reasoning and innovative thinking abilities. In order to improve teaching effectiveness, this research examines the practical significance and specific application of the analogy approach in actual teaching practice from the perspective of high school teaching.

Keywords

Analogy, High School Mathematics Teaching, Applications and Research

*通讯作者。



1. 引言

类比法在人们认识和改造客观世界的活动中具有重要意义, 它能触类旁通, 获得创造性的启发或灵感, 不仅是解决日常生活中大量问题的基础, 而且是数学教学实践中的有力工具。随着高中数学学习难度加大, 学习内容逐渐抽象, 学生需要更加深入地理解和掌握所学知识, 与此同时也更加考验学生的知识迁移能力与逻辑思维能力, 很多学生因此降低了学习兴趣, 甚至对数学产生畏难心理。作为一种思维方法, 类比法的应用可以帮助学生激发创造性思维, 构建完整的知识体系, 提升学生的逻辑思维能力和数学解题能力。在教学实践中教师合理的运用类比法能够启发学生在遇到新知识时建构自己的思维方式, 在数学实践中不断拓展自身的数学知识范围, 大大提升课堂教学效率与效果的同时还提升了学生的数学学习能力, 符合新课程提倡的自主建构、自主探究的新型学习方式。

2. 类比法在高中数学教学中的重要实践意义

2.1. 注重知识归纳, 有助于学生构建知识体系

高中数学知识存在一定广度, 但很多知识点的结构、内容和特点等关联性很强, 教师在进行教学时运用类比法定定期对所学知识进行归纳和梳理, 引导学生建构完整的知识体系, 从而使学生对整个知识网络有更清晰的认知, 实现前后知识的融会贯通, 学生在深化知识理解的同时强化了逻辑思维能力, 知识点掌握起来变得更加轻松, 从而起到事半功倍的教学效果。

2.2. 建立新旧知识之间的联系, 提高知识迁移能力

知识迁移能力是学生数学学科核心素养的重要组成部分。高中的数学知识逻辑性与系统性极强, 新知识的教学往往是对旧知识的延伸, 新时代的教师在教学实践中应变教为引, 巧用类比法, 引导学生对新旧知识进行迁移, 寻找前后知识之间存在的关联性, 在已经掌握的旧知识的基础上去分析理解新知识, 不仅可以使以前的知识理解扎根于思维深处, 而且对新知识也会有更加清晰的认知, 这样就大大的降低了学习难度, 使学生在思考时产生更多联想与灵感, 激发学生的学习兴趣的同时启发学生学会知识迁移[1]。

2.3. 强化创新意识, 拓宽学生的解题思路

新课程改革的实施, 要求加强学生的基础性学习的同时发挥学生的主体作用, 培养学生的创新意识, 提高创新能力。类比法在各种逻辑推理方法中创新性极强, 学生针对具体数学问题运用类比法时, 可以通过相关知识的本质特征来比较, 找到新旧知识之间的共同性和差异性, 去发现问题本质内在的规律。解题过程中学生主动探索解题思路, 通过充分调动个人主观能动性的自主学习, 拓宽学生的解题思路, 极大的提高了解题效率, 使学生获得长远的、具有创造性的发展, 对培养学生良好的数学素养具有重要意义[2]。

3. 类比法在高中数学教学中的具体应用

3.1. 类比法在数列教学中的应用

数列是近代数学重要的研究对象, 在高中数学中占据着紧要地位。高中阶段数列的学习主要分为等

差数列和等比数列, 等差数列相对等比数列学习难度低也易于掌握, 为了缓解学生对新知识的迷茫和焦虑情绪, 教师可以通过等差数列的定义、通项公式、前 n 项和等基础知识作为载体, 类比研究等比数列的规律与结论。例如, 在学习等比数列的性质时, 教师可以鼓励学生自主学习, 引导学生回顾等差数列的性质, 即 $a_n = a_m + (n-m)d$, 合理利用类比法对等比数列相似的性质进行推导。学生通过观察和分析等差、等比数列的关联性, 推导出等比数列 “ $a_n = a_m \cdot q_{n-m}$ ” 这一性质, 在学生自主探究这一过程中, 教师应该及时纠正学生的错误理解, 使学生能够准确合理的运用类比思维解决问题。

在针对等比数列具体问题教学时, 教师可以通过讲解相关例题, 帮助学生感受类比思想, 提高课堂教学效率。

例 1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 设 m, n, k 均为正整数, 则 $(m-n)a_k + (n-k)a_m + (k-m)a_n = 0$, 试运用类比推理写出等比数列 $\{b_n\}$ 中的相应结论, 并予以证明。

解析: 应用类比推理, 得等比数列 $\{b_n\}$ 中, 设 m, n, k 均为正整数, 则 $b_k^{m-n} \cdot b_m^{n-k} \cdot b_n^{k-m} = 1$ 。证明如下:

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $b_m = b_k \cdot q^{m-k}$, $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, 于是有

$b_k^{m-n} \cdot b_m^{n-k} \cdot b_n^{k-m} = b_k^{m-n} \cdot b_k^{n-k} \cdot b_k^{k-m} \cdot q^{(m-k)(n-k)(k-m)} = b_k^0 \cdot q^0 = 1$ 。可以类比这里的证明方法, 证明等差数列中的结论。

3.2. 类比法在平面向量教学中的应用

向量知识在数学知识体系中的重要性不容忽视, 它的工具性特点在数学的许多分支中都有体现, 应用范围非常广泛。平面向量作为高中数学必修课程的一部分, 能够很好的培养学生的数学能力与数学素养, 提高学生整体的数学综合能力。

首先, 在讲解平面向量的概念教学实践时, 教师可以通过引导学生提问实数的相关概念, 合理利用类比法更加直观的理解向量, 降低学生对新知识的陌生感。例如在讲解向量的模的概念时, 教师在课堂导入环节可以通过回顾实数绝对值的概念, 给学生渗透类比思想, 但在知识迁移的过程中教师要提醒学生不能盲目地使用类比法, 实数的相关知识并不是完全适用于平面向量, 例如向量是带有方向的, 而实数只是表示数量[3]。

其次, 在学习向量的运算时, 部分学生会因为实数运算的思维习惯而混淆向量运算, 此时教师应该及时激发学生的学习兴趣, 通过类比法归纳总结实数运算和向量运算的异同点, 使学生在脑海里对向量有更加清晰地认知, 在解题时更加灵活, 大大降低出错率。例如通过类比向量和数量的不同意义, 利用两次连续的位移合成理解向量和的意义, 从而理解向量加法的三角形法则和平行四边形法则。学生在类比实数运算律学习向量运算律时发现, 实数中的交换律和结合律同样适用于向量, 向量加法交换律满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, 向量加法结合律满足 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, 但有的学生运用类比法时出现思维固化, 认为乘法结合律依然适用于向量运算, 但经过验证这个结论是错误的, 所以只有合理运用类比法并善于辨别前后知识的相同属性与不同属性, 才能真正帮助学生生活化思维, 提高数学运算素养。

3.3. 类比法在立体几何教学中的应用

立体几何知识在高中数学中有着十分重要的地位和教育价值, 是高中数学教学中的重难点。作为高考中分值占比较大的章节, 非常考验学生的逻辑思维能力与空间想象能力, 这就要求学生运用直观感知、操作确认、类比推理、度量计算等认识和探索空间图形的性质, 建立空间观念。对于高中学生而言, 初中时已经掌握了平面几何的基础知识, 在教学实践中, 教师应该类比平面几何的知识, 把立体几何抽象的数学问题变得简单、直观, 引导学生进行大胆地想象, 帮助学生形成类比思维的应用意识。

一方面, 教师在引入立体几何概念时, 为了克服学生对立体几何的恐惧心理, 可以通过类比平面几

何的知识降低学生对立体几何的陌生感。例如在学习二面角的定义时, 教师可以从平面角的概念出发, 通过点线、线面、平面空间进行类比, 最终得出二面角的定义[4]。此外, 在落实类比法的渗透过程中, 还可以配合多媒体教学法将抽象的立体图形变得直观具体, 激发学生探索新知的兴趣。

另一方面, 立体几何章节中的题型多种多样, 学生在解题时运用传统方法很难得出正确答案而且耗时耗力, 教师在应用讲解时应给学生渗透类比思维, 提高解题效率, 降低学生理解的难度。

例 2. 由三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 上任一点 O 作直线 OA', OB', OC' 分别平行于棱 SA, SB, SC 与面 SBC, SCA, SAB 相交于 A', B', C' , 如下图(图 1),

$$\text{求证: } \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1.$$

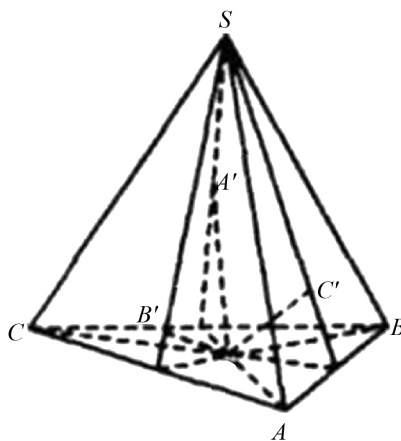


Figure 1. Triangular pyramid $S-ABC$

图 1. 三棱锥 $S-ABC$

解析: 本题的证明与在平面几何中证明 $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1$ 这类式子相似。通常的处理方式是把左边的几个式子转化为面积比后再证。在立体几何中, 用类比的方法解决问题时需设法把等式左边化为体积之比, 在分母相同的情况下, 化简各式证明本题。

3.4. 类比法在圆锥曲线教学中的应用

圆锥曲线是解析几何的重要内容, 也是高考重点考察的内容之一。圆锥曲线涵盖的知识点十分广泛、综合性强、试题涉及面广、题型变幻多端。在高中阶段学习的圆锥曲线主要包括抛物线、双曲线、椭圆、圆等基础知识点, 这些知识之间的定义、标准方程的形式、几何性质及研究问题的方法等许多方面具有一定相似性, 教师在进行教学实践时, 应重视对新旧知识的类比, 帮助学生发现圆锥曲线本质下蕴藏的规律, 实现快速、准确的解决问题[5]。

其一, 在学习双曲线时, 椭圆的很多性质都可以类比到双曲线上, 例如讲解双曲线的定义时, 可以通过类比椭圆的定义进行导入, 平面内到一个定点的距离和到一条定直线的(不经过定点)距离的比值是一个常数 e 的点的轨迹, 当 $0 < e < 1$ 时, 轨迹是椭圆; 当 $e > 1$ 时, 轨迹是双曲线。正是由于椭圆与双曲线定义类似特征使得它们具体相似的标准方程和许多的对偶性质。

其二, 在圆锥曲线的日常练习中, 会遇到很多关于证明类的题目, 部分学生由于对基础知识的方法和技能还不够熟练, 会产生退缩心里。为了攻克这一难题, 教师应该引导学生运用类比发现问题的结论,

并在其他的圆锥曲线图形中对得出的结论进行推广, 找到解题思路。

例 3. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右两个焦点。已知椭圆具有性质: 若 M, N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM, PN 的斜率都存在, 并记为 K_{KM}, K_{PN} 时, 那么 K_{KM} 与 K_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值, 试对双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 写出其具有类似的性质, 并加以证明。

解析: 类比椭圆与双曲线的性质: 若 M, N 是曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上关于原点对称的两个点, 点 P 是双曲线上任意一点, 当直线 PM, PN 的斜率都存在, 并记为 K_{KM}, K_{PN} 时, 那么 K_{KM} 与 K_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值, 证明如下:

设点 M 坐标为 (m, n) , 则点 N 的坐标为 $(-m, -n)$, 其中 $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1$ 。又设点 P 的坐标为 (x, y) , 则

$$K_{KM} = \frac{y-n}{x-m}, K_{PN} = \frac{y+n}{x+m}, K_{KM} \cdot K_{PN} = \frac{y-n}{x-m} \cdot \frac{y+n}{x+m} = \frac{y^2 - n^2}{x^2 - m^2}。$$

将 $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, n^2 = \frac{b^2}{a^2}m^2 - b^2$ 代入, 得 $K_{KM} \cdot K_{PN} = \frac{b^2}{a^2}。$

4. 结语

类比法是知识转移的桥梁, 在高中教学实践中, 教师应及时转变教学观念, 科学利用类比法与多种教学方式结合开展教学, 在扎实基础知识的基础上渗透类比思想, 尤其是数列、向量、立体几何、圆锥曲线等相关知识, 要合理地将同类知识进行类比迁移, 使学生在巩固旧知识的同时掌握新知识, 对整个知识网络有更清晰的认知。与此同时, 教师要调动学生学习的积极性, 引导学生发挥学习的主体作用自主学习, 鼓励学生大胆进行猜测, 主动运用类比去探索未知领域, 拓宽解题思路的同时提高解题效率, 使学生提升自身数学综合素养, 获得长远的、具有创造性的发展。

基金项目

项目号: 吉林省教育科学“十三五”规划课题; 基于职后融合理念的硕师“数学教学设计与案例研究”课程的混合式教学模式设计与应用研究; 项目号 GH20271。

面向硕师群体开设的“数学教学设计与案例研究”课程混合式教学模式设计与实践研究, 项目号: JG2021022, 北华大学 2021 研究生教育教学改革与实践项目。

参考文献

- [1] 杨建国. 类比法在高中数学教学中的作用[J]. 江西教育, 2022(9): 14-15.
- [2] 董鹏. 浅谈类比法在高中数学教学中的应用[J]. 甘肃教育研究, 2022(3): 131-133.
- [3] 张亚红. 类比法在高中数学教学中的应用与思考[C]//福建省商贸协会. 华南教育信息化研究经验交流会 2021 论文汇编, 福州: 福建省商贸协会, 2021: 834-837.
- [4] 李德华. 类比思维在高中数学学习中的应用[J]. 语数外学习(高中版中旬), 2018(12): 53.
- [5] 光吉苗. 试论类比法在高中数学教学中的应用[J]. 数学学习与研究, 2018(19): 120.