Advances in Education 教育进展, 2023, 13(8), 5680-5684
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.138885

热传导方程初边值问题的可视化教学

——《数学物理方程》的教学实践

陈映珊

华南理工大学数学学院，广东 广州

收稿日期：2023年7月10日；录用日期：2023年8月10日；发布日期：2023年8月17日

摘 要

《数学物理方程》的可视化教学有助于激发学生的学习热情、提高教学效果。本文通过数学软件Matlab求解具有三类典型边界条件的热传导方程初边值问题，通过绘制方程的解在不同时间下的函数图像，直观地展示了三类边界条件如何影响方程的解，加深了学生对抽象的初边值问题的理解，培养了学生的直觉思维能力和观察能力。

关键词

数学物理方程，可视化教学，初始条件，边界条件

Visualization Teaching of the Heat Equation with Initial-Boundary Conditions

—Teaching Practice of *The Equation of Mathematical Physics*

Yingshan Chen

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jul. 10th, 2023; accepted: Aug. 10th, 2023; published: Aug. 17th, 2023

Abstract

The visual teaching of *The Equation of Mathematical Physics* helps stimulate students' enthusiasm for learning and improve the teaching effect. This paper uses mathematical software Matlab to solve the heat equation with initial and three typical boundary conditions. By drawing function images of the equation's solutions at different times, we intuitively demonstrate how the three types of boundary conditions affect the solutions of the equation, which deepens students' under-

文章引用: 陈映珊. 热传导方程初边值问题的可视化教学[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5680-5684.
DOI: 10.12677/ae.2023.138885

standing of the abstract initial-boundary value problems, and cultivates their intuitive thinking ability and observation ability.

Keywords

***The Equation of Mathematical Physics*, The Visual Teaching, Initial Condition, Boundary Condition**

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 课程背景

《数学物理方程》是许多工科专业学生进行专业学习、发展专业能力必需的重要基础课程[1] [2]。该课程存在内容抽象、公式繁多、推导复杂的特点，容易让学生望而生畏，体会不到课程的价值[3] [4]。为了让该课程更好地服务于“新工科”人才培养，教师应与时俱进地开展理性自觉的教学改革，激发学生的学习兴趣，帮助学生真正掌握数学物理方法以便用于解决后续课程和科研中遇到的实际问题。

在传统的《数学物理方程》课程教学中，老师或通过板书，或通过 ppt 呈现三类典型的偏微分方程的建立和求解过程。课程内容抽象，再加上这种只强调公式符号的教学模式容易让学生感到枯燥乏味，更加提不起学习的兴趣。实际上，三类典型的偏微分方程均具有很强的实际应用背景，如果改变只用公式符号的教学模式，将抽象的数学表达式和生动的物理现象联系起来，就可以加深学生对课程内容的理解，唤起他们的学习兴趣，提高教学效果[5] [6]。下面我们以热传导方程为例展示如何利用数学软件 Matlab 实现可视化教学，将抽象的初边值问题所蕴含的物理现象通过动态图像生动地呈现给学生，从而加深学生对偏微分方程的初边值条件的理解。

2. 热传导方程初边值问题的可视化教学

考察一根各向同性的均匀细杆，假设它的侧面不产生热交换(即绝热)，且在同一截面上的温度分布是相同的。把它放在 x 轴上，杆上的每个点可以用唯一的 x 来表示，则温度函数 u 是空间变量 x 与时间变量 t 的二元函数，且满足一维热传导方程

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 .$$

建立了方程之后，我们希望通过求解方程从而了解杆中的温度如何随时间而变化。然而热传导方程本身只是决定温度函数的制约条件之一。学过常微分方程的同学容易理解，一个偏微分方程通常有许多不同的解。问题是我们究竟需要哪些附加条件才能唯一确定其中的某个解？显然，初始时刻杆上的温度分布会影响后续的温度变化，因此为了确定杆上的温度函数(即热传导方程的解)，我们需要附加一个初始条件

$$u(x,0) = \varphi(x) .$$

此外，细杆两端的外界条件也会影响热传导方程的解，因此除了初始条件，我们还需要考虑边界条件。关于边界条件的提法，通常有三种形式，一般教科书将它们分别称为第一、第二和第三边界条件。这三类边界条件对应着不同的物理背景，对细杆内部的温度分布产生不同的影响。在教学中，教师如果仅仅介绍三种边界条件的名称、给出相应的数学表达式，学生们常常是困惑的。此时，老师可以利用 Matlab

软件数值求解具有相同初始条件和不同边界条件的热传导方程，并绘制图像把温度函数如何随时间变化直观地展示给学生。

Matlab 中的 pdepe 函数可用于求解抛物型和椭圆型偏微分方程，它的调用格式是：sol = pdepe (m, pdefun, icfun, bcfun, xmesh, tspan)，其中 m 是与问题的对称性相关的常数，pdefun，icfun，bcfun 分别为待解方程、初始条件和边界条件的函数句柄，xmesh 和 tspan 分别指定空间变量和时间变量的求解区间。

下面我们假设常数 $a=1$，空间变量范围为 $[0,\pi]$ (即细杆的长度为 π)，杆上的初始温度分布如图 1 所示($u(x,0)=\sin(x)$)。

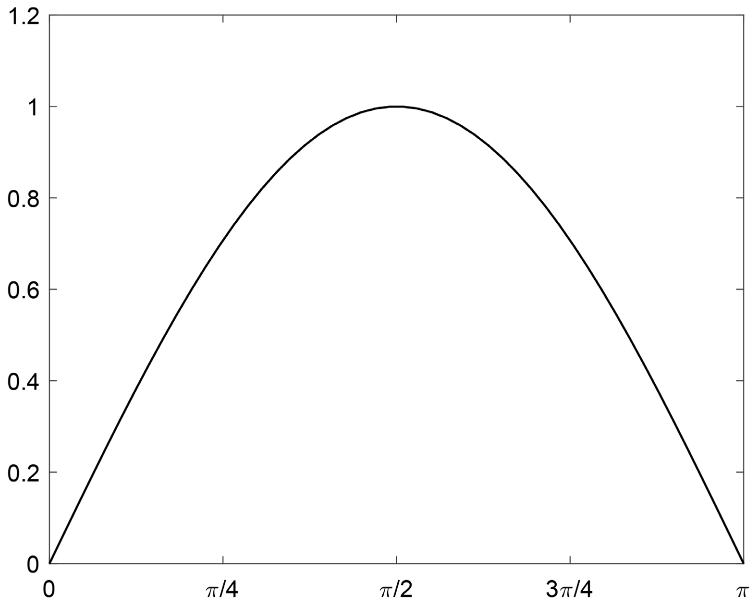

Figure 1. Initial temperature distribution
图 1. 初始温度分布

基于上述假设，我们将在例 1、例 2 和例 3 中分别考察第一、第二和第三类边值条件对热传导方程描述的温度函数的影响。

例 1. 第一边界条件

如果细杆两端接触的是冰水混合物，而且温度保持在零度不变，这时边界条件是

$$u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0\ .$$

我们利用 pdepe 函数求出温度函数 $u(x,t)$ ，并运行如下代码：

```
for t=0:0.5:2
plot(x,u(:,t/dt+1))
pause(0.5)
end
```

学生将清晰地看到初始时刻杆上的温度分布，以及每隔 0.5 个时间单位杆上的温度分布如何变化。

如图 2 所示，初始的温度分布是中间高两边低，当细杆两端的温度保持在零度不变，细杆上各点温度随着时间的推移均慢慢地降低，直至整个杆上的温度都变为 0。

例 2. 第二边界条件

如果细杆两端是绝热的，根据 Fourier 热传导定律，这时边界条件是

$$u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0.$$

我们再次利用 pdepe 函数求出温度函数 $u(x,t)$，并类似例 1 向学生动态地展示细杆上的温度分布如何随着时间的推移而变化。

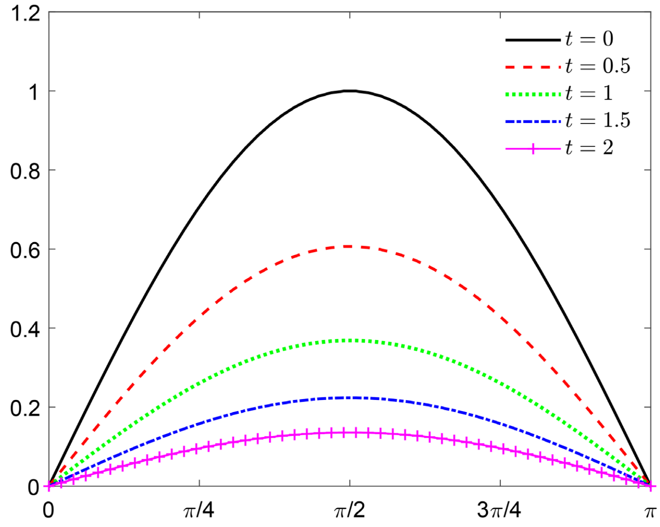

Figure 2. The temperature distribution at different times with the first type of boundary condition
图 2. 第一边界条件下不同时间对应的温度分布

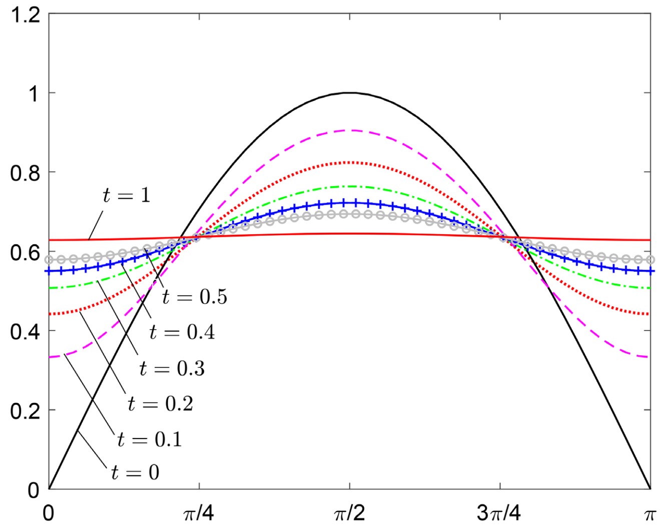

Figure 3. The temperature distribution at different times with the second type of boundary condition
图 3. 第二边界条件下不同时间对应的温度分布

如图 3 所示，当细杆两端与外部环境不存在热交换，细杆中间的温度逐渐降低而两边的温度逐渐升高，直至细杆上各点温度相同。

例 3. 第三边界条件

如果细杆两端分别置于另一介质中，且假设介质的温度 $u_1\equiv 1$，由于初始时刻，细杆两端的温度为 0，这时会有热交换。根据牛顿热交换定律和 Fourier 热传导定律，相应的边界条件变成

$$u_x(0,t)=k\big(u(0,t)-1\big),$$

$$u_x(\pi,t)=k\left(1-u(\pi,t)\right),$$

其中k是常熟，依赖于细杆与两端介质的热传导系数。我们取$k=1$，利用pdepe函数求出温度函数$u(x,t)$，并将结果动态地展示给学生。

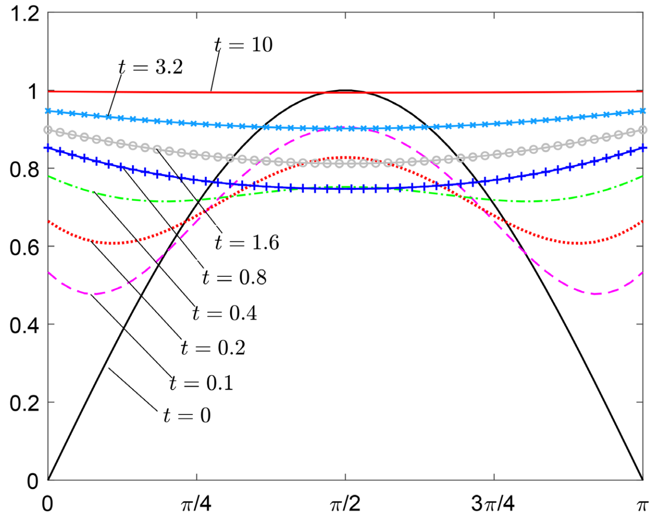

Figure 4. The temperature distribution at different times with the third type of boundary condition
图 4. 第三边界条件下不同时间对应的温度分布

如图 4 所示，当细杆两端分别接触的是温度恒等于 1 的介质，且存在热交换，中间和外部的热量将逐渐流向两端导致两端的温度持续升高而中间的温度先下降再逐渐回升，直至细杆上各点温度达到与外界一致。

3. 结论

通过例 1、例 2 和例 3，学生可以清楚地了解三类典型的边界条件背后的物理意义，而且可以直观地观察到：对于同一个热传导方程，即使初始条件完全相同，仅仅是边界条件不同，最后也会导致方程的解完全不同。这种直观的展示，一方面可以加深学生对抽象的数学物理问题的理解，从而有效地激发学生对《数学物理方程》的兴趣，另一方面可以培养学生的直觉思维能力和观察力，从而有助于培养学生的创新思维能力。

基金项目

华南理工大学校级教研教改项目——新工科背景下的《数学物理方程》教学改革(x2lx C9213107)。

参考文献

[1] 朱长江，阮立志．偏微分方程简明教程[M]．北京：高等教育出版社, 2015.

[2] 王元明．工程数学——数学物理方程与特殊函数[M]．第 5 版．北京：高等教育出版社, 2019.

[3] 艾军. "数学物理方程"教学上的"三突出" [J]．高等理科教育, 2006(2): 94-96.

[4] 王培光，高春霞，刘素平．数学物理方法教学改革初探[J]．高等理科教育, 2008(1): 44-45.

[5] 彭芳麟. "图解"数学物理方法的教学实践[J]．物理教育, 2007, 36(2): 153-158.

[6] 廉海荣，雷昕，罗万静，江国明，马兆海，赵俊芳．新时代功课"数学物理方程"课程教学改革探索[J]．中国地质教育, 2021(4): 71-74.