Advances in Education 教育进展, 2023, 13(8), 5930-5940
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.138925

Hans汉斯

大学物理课程教学中微积分方法使用的探讨

梁席民[1]，陈叶叶[2]

[1]衢州学院，教师教育学院，浙江 衢州
[2]衢州职业技术学院，机电工程学院，浙江 衢州

收稿日期：2023年7月16日；录用日期：2023年8月15日；发布日期：2023年8月23日

摘 要

大学物理教学过程中，教师常常会面临如何做好高等数学与大学物理中所用微积分知识的衔接；如何引导学生正确地使用微积分知识解决物理问题；以及如何在解决物理问题时选择合适的数学技巧的问题。作者根据多年的教学实践，总结出了解决以上三个问题的教学方法，并取得了良好的教学效果，本文将结合具体的教学案例详细介绍这几种方法。

关键词

大学物理，微积分，教学方法

Discussion on the Use of Calculus Method in College Physics Teaching

Ximin Liang[1], Yeye Chen[2]

[1]Teachers Education College of Quzhou University, Quzhou Zhejiang
[2]Mechanical and Electrical Engineering School of Quzhou Vocational and Technical College, Quzhou Zhejiang

Received: Jul. 16th, 2023; accepted: Aug. 15th, 2023; published: Aug. 23rd, 2023

Abstract

In the process of college physics teaching, teachers are often faced with how to connect the advanced math with the calculus knowledge used in college physics; How to guide students to correctly use calculus knowledge to solve physical problems; And how to choose appropriate mathematical techniques when solving physics problems. Based on years of teaching practice, the author has summarized teaching methods to solve the above three problems and achieved good teaching results. This article will introduce these methods in detail with specific teaching cases.

文章引用: 梁席民, 陈叶叶. 大学物理课程教学中微积分方法使用的探讨[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5930-5940.
DOI: 10.12677/ae.2023.138925

Keywords

College Physics, Calculus, Teaching Method

1. 引言

大学物理是高等学校理工科专业学生的一门重要的基础理论课程，系统地学习大学物理课程，理解大学物理课程中的基本知识，构建基本的物理知识体系，掌握解决物理问题的基本方法和技巧，是理工科学生学好其他专业课程的必要前提[1]。相比于中学物理，大学物理课程更加强调物理量的矢量性和瞬时性，以及物理过程的连续性和相对性，这些知识的学习和技能训练会使学生对这个世界的运动规律有更全面、更深刻的认识，解决问题的思维方式和逻辑能力也能得到显著的提升。当然，要想充分掌握这些知识、方法和技巧，从而达到课程要求，仅仅有中学数学基础是不够的，还需要学会使用一种重要的数学工具——微积分。微积分思想贯穿了整个大学物理[2]，许多物理概念、物理定律都是以微积分的形式给出，比如速度、加速度、力等概念是以微分形式给出的，而像位移、冲量、功等概念是以积分形式给出。因此，引导学生学会正确、熟练、灵活地使用微积分解决物理问题是大学物理教学中的重要内容。然而，在实际的教学过程中，常常会遇到部分同学微积分知识掌握不够充分，或者不知道该如何使用微积分知识解决物理问题的情况。此外，大部分大学物理教材不会再专门编排相关数学知识的章节，这就使得部分同学在大学物理的学习过程中因为数学原因遇到极大的阻力，甚至丧失学习大学物理的热情和兴趣，最后彻底放弃学习这门课程，实在是可惜。因此，大学物理教学过程中的以下三个问题仍然是值得探讨的：一、如何做好高等数学与大学物理中所用微积分知识的衔接；二、如何引导正确地使用微积分知识解决物理问题；三、如何使得学生能够深刻理解解决问题的根本方法。

2. 教学问题探讨

2.1. 强调数学概念和思想，注重数学应用过程——以几个动力学问题为例

部分学生在大学物理课程的学习过程中，由于数学基础不够牢固，无法理解大学物理中基本的解题思路。还有一部分同学对于一些模型清晰，过程简单的问题，尚能使用微积分方法解决，但是一些需要根据实际问题建立数学模型的题目，则显得束手无策[3]，这是因为他们在微积分的学习过程中，重视数学定理的结果和习题演练，忽视了对定理和推导和应用的深刻理解，所以会出现不会使用数学解决实际问题的情况。比如，部分同学没有深刻理解极限的思想，以及极限思想在微积分课程的基础地位，这就会造成他们能够正确地解出某个函数的微分或是积分问题，但是却无法使用微积分解决实际问题[4]。鉴于以上两种情况，教师在课程初始阶段——经典力学讲授阶段，1) 要注重强调基本的数学概念和数学思想(尤其是极限思想)，帮助学生快速回顾微积分知识；2) 在解题过程中，注重讲解把具体的物理问题转化为数学问题的过程和思路，引导学生建立数学模型解决物理问题，加深对于极限和微积分方法的理解。经典力学是大学物理开篇的重要内容，也是后续内容的重要基础，如果这部分内容学不好，想要学好后续内容是非常困难的。因此，教师在经典力学的讲授中，需要格外关注学生对于这部分内容的掌握程度。如果能在这部分内容的讲解过程中适当放慢速度，做好上文提到的两点，让学生打好基础，对学生学习后续课程内容大有裨益。

例一、质量为 m、长为 l 的柔软细绳，一端系着放在光滑桌面上质量为 m'的物体，如图 1(a)所示，在绳的另一端加图中所示的力 $\boldsymbol{F}$。绳被拉紧时会略有伸长(形变)，一般伸长量很小，可忽略不计。现设绳的长度不变，质量分布均匀，求：1) 绳作用在物体上的力；2) 绳上任意点的张力。

解：此题要注意的是绳子质量不可忽略，如图 1(b)所示，如果把绳子分成无穷多小的质量元 Δm，则该问题就是一个质点系问题。质点系所受合外力为 $\boldsymbol{F}$，绳的长度不变，因此各质点间没有相对位置的变化，且在每一时刻各质点有相同的运动状态，根据牛顿第二定律可知，各质点的加速度大小为：

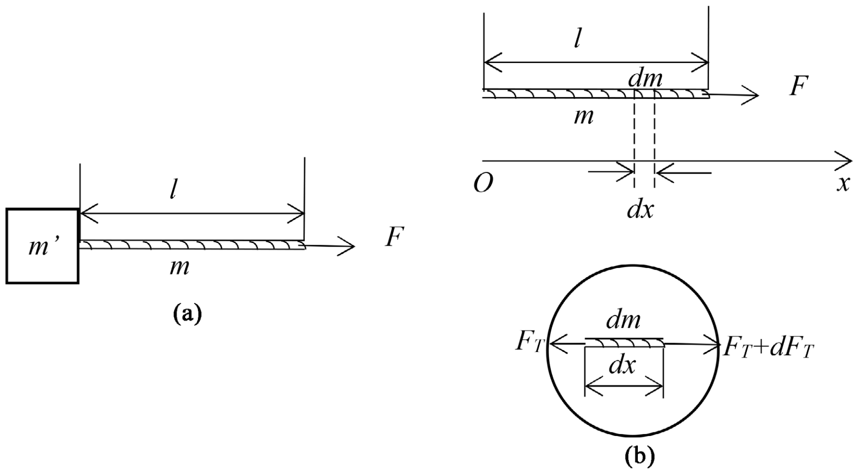

Figure 1. A rope connecting to an object with a mass of m'
图 1. 一根绳一端连接质量为 m'的物体

$$a=\frac{F}{m+m'} \tag{1}$$

每个质量元 Δm 必然受合外力大小为：

$$\Delta F_T=\Delta ma=\Delta m\frac{F}{m+m'} \tag{2}$$

取物体与绳连接处为原点 O，水平向右的轴为 x 轴，由于绳质量分布均匀，故其单位长度的质量(即质量线密度)为 $\frac{m}{l}$， $\Delta m=m\frac{\Delta x}{l}$，根据牛顿第二定律，有：

$$\left(F_T+\Delta F_T\right)-F_T=\left(\Delta m\right)a \tag{3}$$

将 $\Delta m=m\frac{\Delta x}{l}$ 和 $a=\frac{F}{m+m'}$ 代入(3)式，可得：

$$\Delta F_T=\frac{mF}{\left(m'+m\right)l}\Delta x \tag{4}$$

由(4)式可知随着 x 增加(绳上位置从左向右移动)，绳上的张力大小 F_T 也是变化的，即 F_T 是 x 的函数，可记为 $F_T(x)$， $\Delta x\to 0$ 时，极限：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F_T}{\Delta x}=\frac{mF}{\left(m'+m\right)l} \tag{5}$$

存在，这正是导数定义，用不定积分可求得 $F_T(x)$：

$$F_T\left(x\right)=\int\frac{mF}{\left(m'+m\right)l}\mathrm{d}x=\frac{mF}{\left(m'+m\right)l}x+C \tag{6}$$

根据边界条件，$x \in [0,l]$，在 $x = l$ 处，$F_T = F$，解得：$C = F\dfrac{m'}{m'+m}$

$$F_T = \frac{mF}{(m'+m)l}x + \frac{m'F}{m'+m} \tag{7}$$

1) 根据牛顿第三定律，物体所受拉力大小等于 $x = 0$ 时，绳的张力的大小，方向沿 x 轴正方向。只需把 $x = 0$ 代入上式，可得物体 m' 所受拉力大小为：

$$F_{T0} = \frac{m'F}{m'+m}$$

2) 绳上任意点的张力大小为：$F_T = \dfrac{mF}{(m'+m)l}x + \dfrac{m'F}{m'+m}$

对于第一问，也可直接根据牛顿第二定律

$$F_{T0} = m'a$$

加速度 $a = \dfrac{F}{m+m'}$，求得：

质点 m' 所受合外力则为 $F_{T0} = \dfrac{m'F}{m+m'}$。

例二：如图 2(a)所示，有一绳索围绕在圆柱上，绕圆柱的张角为 θ_0，绳与圆柱间的摩擦因数为 μ，求绳索处于滑动的边缘时，绳两端的张力 F_{TA} 和 F_{TB} 间的关系。绳的质量可忽略不计。

解：如图 2(b)所示，在绕于圆柱的绳索 AB 上，取一微小段绳索 ΔS,其相对圆心的张角为 $\Delta\theta$，设 ΔS 两端的张力分别为 $\boldsymbol{F}_T(\theta)$和 $\boldsymbol{F}_T(\theta + \Delta\theta)$，圆柱对 ΔS 的支持力为 $\boldsymbol{F}_N$。假设圆柱有顺时针旋转的趋势，圆柱对 ΔS 的摩擦力为 $\boldsymbol{F}_f$。由于绳索的质量略去不计，故 ΔS 所受重力亦不予考虑。由于绳索处于滑动边缘，加速度 $\boldsymbol{a} = 0$。绳索上的每一段 ΔS 所受合外力为 0，在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量式分别为

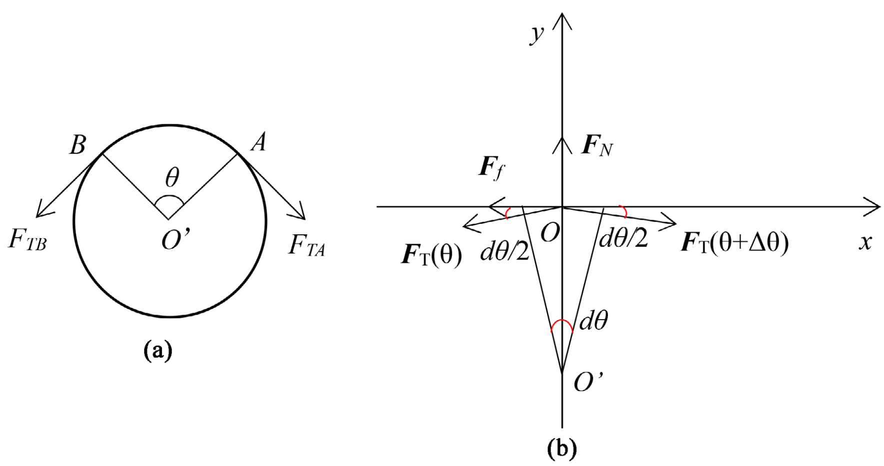

Figure 2. A rope surrounds a cylinder
图 2. 一绳索围绕在圆柱上

$$F_T(\theta+\Delta\theta)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - F_T(\theta)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - F_f = 0 \tag{8}$$

$$-F_T(\theta+\Delta\theta)\sin\frac{\Delta\theta}{2} - F_T(\theta)\sin\frac{\Delta\theta}{2} + F_N = 0 \tag{9}$$

此外，由摩擦力的定义，有

$$F_f = \mu F_N \tag{10}$$

ΔS 相对于圆心的张角 $\Delta\theta \to 0$ 时，$\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$ 等价于 $\dfrac{\Delta\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\Delta\theta}{2}$ 等价于 1，记 $F_T(\theta+\Delta\theta)-F_T(\theta)=\Delta F_T$，(8)式和(9)式可分别写为：

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\Delta F_T = F_f = \mu F_N \tag{11}$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{1}{2}\Delta F_T\Delta\theta + F_T\Delta\theta = F_N \tag{12}$$

当 $\Delta\theta \to 0$ 时，实际上也必然会有 $\Delta F_T \to 0$，否则的话，绳两端的力必然会有一个是无穷大的，与实际情况不符，所以 $\Delta\theta\,\Delta F_T$ 可以看作二阶无穷小量，直接略去，整理可得：

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta F_T}{\Delta\theta} = \frac{\mathrm{d}F_T}{\mathrm{d}\theta} = \mu F_T \tag{13}$$

上式即为 F_T 对 θ 求导的结果，F_T 对角度 θ 的导函数显含 F_T，上式为一阶常系数线性其次微分方程，可分离变量求解：

$$\int\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T} = \mu\int\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

结果为：

$$\ln F_T + \ln C = \mu\theta \tag{15}$$

上式中由于是求不定积分，所以加一个常数考虑到边界条件，所以在等式左边加一个常数 $\ln C$。整理得：

$$F_T = C\mathrm{e}^{\mu\theta} \tag{16}$$

利用边界条件：当 $\theta = 0$ 时，$F_T = F_{TB}$，可解得常数 $C = F_{TB}$，方程满足边界条件的解为：

$$F_T = F_{TB}\mathrm{e}^{\mu\theta} \tag{17}$$

$\theta = \theta_0$ 时，$F_T = F_{TA}$，F_{TA} 与 F_{TB} 的关系为：

$$F_{TA} = F_{TB}\mathrm{e}^{\mu\theta_0}$$

例三：如图 3 所示，一条软链条长为 l，质量线密度为 λ，链条放在桌面上，一端从桌边垂落，其余部分在桌上，链条因自身重量开始下落，求链条下落速度与下落距离之间的关系。链条与各处摩擦均可忽略不计，且认为链条柔软可自由伸开。

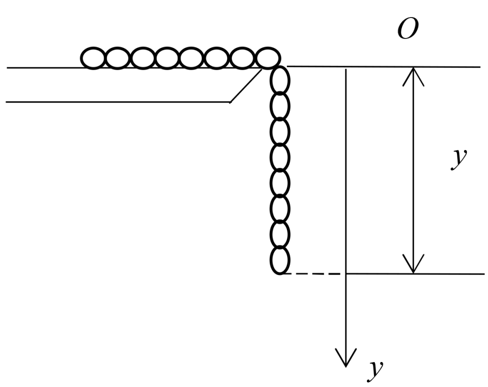

Figure 3. A soft chain placed by the table, with one end hanging down
图 3. 一条软链条放在桌上，一端垂落

解：如图 3 所示，选桌面上一点为坐标原点 O,竖直向下的轴为 Oy 轴正向。在某时刻 t，下垂部分链条长度为 y，在桌面上链条长度为 l-y。整个链条为一质点系，各质点之间作用的力为内力。桌面山的链条所受重力 $\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{g}$，所受支持力 $\boldsymbol{F}_N = -m_2\boldsymbol{g}$，由于链条与各处的摩擦力略去不计，故桌面上那部分链条所受合外力为 0，下垂部分链条所受的重力 $\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{g}$，为系统的所受合外力，其中 $m_1 = \lambda y$。

方法 1：根据质点系的动能定理：作用于质点系的合外力所做的功，等于该质点系动能的增量。对于整个链条，只有下垂部分链条所受重力对其做功，在 y 处取很小的一段链条，链条长度为 Δy，链条质量为 Δm，$\Delta m = \lambda\Delta y$，$\Delta m$ 所受重力大小为 Δmg，所做功大小为 Δmgy，下垂部分链条重力所做功为 Δm 所受重力做功之和，由于 $\Delta y \to 0$，有：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{\Delta y=1}^{\infty}\Delta y\lambda gy = \int_0^y \lambda gy\mathrm{d}y \tag{18}$$

整个体系动能的增量为整个链条的动能之和，即每一小段链条 Δm 动能之和：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{\Delta y=1}^{\infty}\frac{1}{2}\lambda\Delta yv^2 = \int_0^l \frac{1}{2}\lambda v^2\mathrm{d}y \tag{19}$$

根据动能定理，有：

$$\int_0^y \lambda gy\mathrm{d}y = \int_0^l \frac{1}{2}\lambda v^2\mathrm{d}y \tag{20}$$

求积分得：

$$\frac{1}{2}\lambda gy^2 = \frac{1}{2}\lambda lv^2 \tag{21}$$

整理可得：

$$v = y\sqrt{\frac{g}{l}}$$

方法 2：对于整个链条，只有下垂部分链条所受重力对其做功，所以质点系机械能守恒。取桌面为零势能面，初始时刻，系统机械能为 0，链条下垂长度为 y 时，系统机械能为这个链条的动能和下垂部分链条重力势能之和。将下垂部分链条分割成无穷多长度趋于 0 的小分段，每段长度为 Δy，重力势能为 $-\lambda\Delta ygy$,下垂部分链条重力势能为所有小分段链条重力势能之和：

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{\Delta y=1}^{\infty}-\lambda\Delta ygy = -\lambda g\int_0^y y\mathrm{d}y \tag{22}$$

动能为整个下垂链条长度 y 时，整个链条动能：$\frac{1}{2}\lambda lv^2$

根据机械能守恒定律：

$$-\lambda g\int_0^y y\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\lambda lv^2 = 0 \tag{23}$$

求积分得：

$$-\frac{1}{2}\lambda gy^2 + \frac{1}{2}\lambda lv^2 = 0 \tag{24}$$

整理得：

$$v = y\sqrt{\frac{g}{l}}$$

此即链条下落速度与下落距离之间的关系。

上述几道例题是经典力学中的典型题目，在解题过程中，可以根据微分的定义，直接找到物理量的微分形式，然而这就需要学生具备将具体的物理问题迅速转化成抽象的数学问题的能力，这对于部分同学显然困难的事。如果能如上文例题所示，在解题过程中，从最基本的数学概念出发，步骤详细，注重数学的规范严谨，既能带领学生快速回顾微积分知识，找到所学数学与物理问题之间的联系，加深对于数学的理解，又能引导学生学会将实际问题转化成数学问题，建立数学模型，提升应用数学解决实际问题的能力。

2.2. 引入数学知识，淡化不必要的数学技巧——以几种匀质刚体绕定轴转动的转动惯量推导为例

在大学物理课程教学中，刚体转动惯量的是一个非常重要的概念，在求解刚体定轴转动的动力学问题中，刚体的转动惯量类似于质点模型中质点的质量。刚体转动惯量的求解对于学生来说是一个重难点，它要求学生能够深刻理解刚体转动惯量的概念，同时要求学生能熟练掌握高等数学中积分学的方法和知识。对于教师来说，对于这部分内容讲解的详略安排，方法技巧也需要仔细斟酌。如果对数学推导一语带过，可能会导致部分学生对于转动惯量理解不够深刻的情况，也可能会导致部分学生不能自己推导出特定情况下刚体的转动惯量，只能靠死记硬背，事倍功半的情况。如果讲解太过详细，又需要占用大量课时，且会打断物理知识的连贯性。所以选择一种基本的，能使学生抓住问题本质的方法，是很有必要的。

刚体绕定轴转动的转动惯量定义为[5]： $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ ，转动惯量 J 等于刚体上各质点的质量与各质点到转轴的距离二次方的乘积之和，如果刚体上的质点是连续分布的，则其转动惯量可以用积分进行计算： $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ 。部分教师在讲授刚体转动部分时，可能会考虑到此阶段学生还未学习高等数学中的多重积分、曲线积分和曲面积分知识，对各类坐标系不够熟悉，因此在教学中常用的方法是根据刚体几何形状的对称性选取形状上具有相同对称性的微元 dm，从而简化积分，然而，这种貌似简便的方法，却容易给学生带来理解上的困难，也容易使得学生在自己解决问题时犯错[6]。本人认为这种数学技巧是完全不必要的。教师可以提前引入多重积分和各类坐标系的知识，在教学过程中淡化这种不必要的数学技巧。根据刚体转动惯量的定义 $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ ，以质量 m 作为积分变量，r 作为 m 的函数显然是不方便计算的，在坐标系中将 dm 写成 ρdv，这样以空间坐标为积分变量进行积分计算便可。如果在直角坐标系中，$\rho \mathrm{d}v = \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，则积分可以写成 $J = \int r^2 \mathrm{d}m = \iiint \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的形式，积分变量转化成了空间坐标变量，被积函数 $r^2\rho(x, y, z)$ 则是坐标变量 x, y, z 的函数。如果具体问题中积分区域具有明显的对称性，则可根据积分区域的对称性，选取不同的坐标系，以简化计算。这是一种很容易被想到，而且对于学生来说更加容易理解的方法，学生可以很自然地把高等数学中的积分知识应用到物理问题中，然而，在教学中却是被忽略了的方法。两种方法本质上都是选取便于求解积分的微元 dm，只不过第二种方法是把 dm 写成 ρdv，并不特别强调 dm 的选取，而是通过选取坐标系来决定体积元 dv，进而决定 dm。为了区分两种方法，下文中把上文提及的第一种方法称为“巧取微元法”，第二种方法称为“定义法——巧取坐标系”。

下文给出几种常见的形状规则、质量分布均匀的刚体绕定轴转动的转动惯量的两种推导方法，并指出两种方法本质上是相同的，以及选取合适的坐标系计算刚体转动惯量的优点。

例一、质量为 m，且分布均匀的薄圆盘，半径为 R，面密度为 σ，绕通过其圆心且垂直于圆盘所在平面的轴做定轴转动的转动惯量：

方法 1、定义法——巧取坐标系：

以转轴所在轴为 Z 轴，垂直 Z 轴的平面为 xOy 平面建立直角坐标系，如图 4(a)所示，积分区域为 xOy 平面上 $x^2 + y^2 \le R^2$ 的区域；积分元 dv 就是 dxdy；积分函数 r^2 则为 $x^2 + y^2$。则：

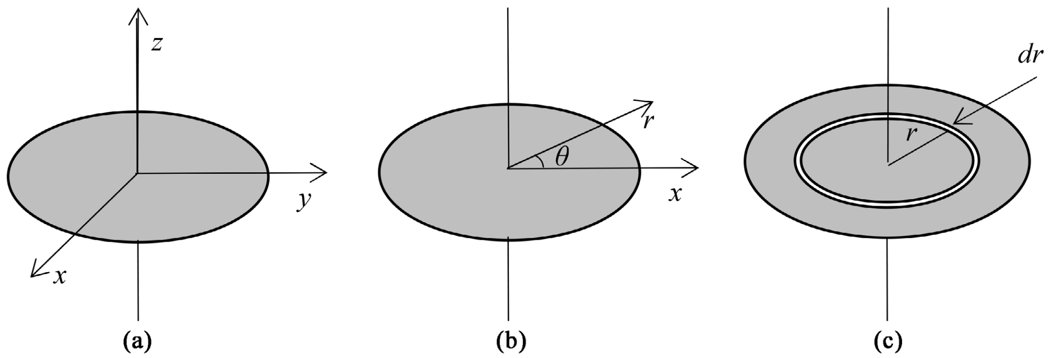

Figure 4. Thin disk rotating around its geometric axis
图 4. 薄圆盘绕其几何轴转动

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

显然，上式中的积分在直角坐标系中计算并不容易，但观察到积分区域是以坐标原点为圆心的圆，且被积函数是 $x^2 + y^2$ (r^2)，所以建立极坐标，如图 4(b)所示，在极坐标系下计算：

$$J = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \sigma r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\sigma \int_0^r r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\sigma \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R = \frac{1}{2} \sigma\pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

方法 2、巧取微元法：

取半径为 r，厚度为 dr 的小圆环质量为质量元 dm，如图 4(c)所示，由于圆环厚度 dr 是无穷小量，所以圆环面积等于长为 $2\pi r$，宽为 dr 的矩形面积 $2\pi r$dr，质量元 dm 等于圆盘面密度 σ 乘以面积 $2\pi r$dr，因此：

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \sigma 2\pi r \mathrm{d}r = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 \mathrm{d}r$$

此结果与用定义法在极坐标下完成对角度 θ 的积分后得到的结果一致，即选取微元的过程已完成了对角度的积分，进一步对 r 积分得到如下结果：

$$J = \sigma 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot \sigma\pi R^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

例二、质量为 m，且分布均匀的圆柱体，高为 h，截面半径为 R，

密度为 ρ，绕其几何轴(通过其圆心且垂直于圆面所在平面的轴)做定轴转动的转动惯量：

方法 1、定义法——巧取坐标系：

以转轴所在轴为 Z 轴，垂直 Z 轴的平面为 xOy 平面建立直角坐标系，如图 5(a)所示，积分区域为 xOy 平面上 $x^2 + y^2 \le R^2$， $0 < Z < h$ 的区域；积分元 dv 是 dxdydz；积分函数 r^2 则为 x^2+y^2。则

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \iiint_v r^2 \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

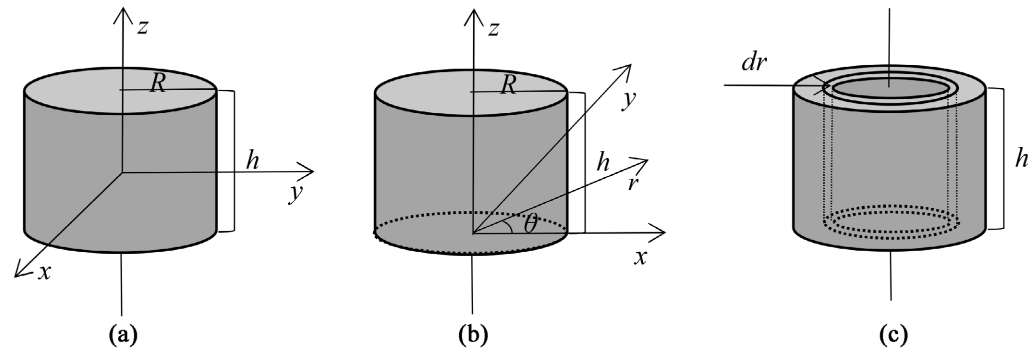

Figure 5. Cylinder rotating around its geometric axis
图 5. 圆柱体绕其几何轴转动

显然，上式中的积分在直角坐标系中计算并不容易，但观察到积分区域是圆柱体，且被积函数是 $x^2+y^2\ (r^2)$，所以建立柱坐标，如图 5(b)所示，在柱坐标系下计算，则：

$$J=\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho r^2 r\mathrm{d}r=h2\pi\rho\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi h\rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R=\frac{1}{2}\pi R^2 h\rho\cdot R^2=\frac{1}{2}mR^2$$

方法 2、巧取微元法：

取高度为 h，厚度为 dr 的薄圆筒质量为质量元 dm，如图 5(c)所示，由于圆筒厚度 dr 是无穷小量，所以圆筒体积等于长为 $2\pi r$，宽为 h，高为 dr 的长方体体积 $2\pi rh\mathrm{d}r$，质量元 dm 等于圆筒密度 ρ 乘以体积 $2\pi rh\mathrm{d}r$，因此：

$$J=\int r^2\rho 2\pi rh\mathrm{d}r=\rho 2\pi h\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

此结果与用定义法在柱坐标下完成对积分变量 θ 及 z 的积分得到的结果一致，即选取微元的过程已完成了对积分变量 θ 及 z 的积分，进一步对积分变量 r 积分得到如下结果：

$$J=\rho 2\pi h\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R=\frac{1}{2}\rho\pi R^2 h\cdot R^2=\frac{1}{2}mR^2$$

例三、质量为 m，且分布均匀的球体，半径为 R，密度为 ρ，绕其任一直径做定轴转动的转动惯量：

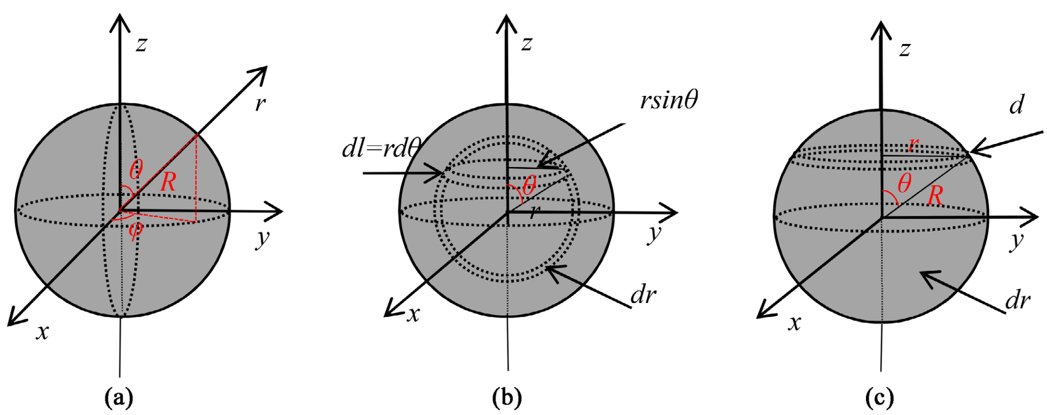

Figure 6. The sphere rotating around its arbitrary diameter
图 6. 球体绕其任意直径转动

方法 1、巧取坐标系：

以转轴所在轴为 Z 轴，垂直 Z 轴的平面为 xOy 平面建立直角坐标系，积分区域为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 的区域；积分元 dv 是 dxdydz；积分函数 r^2 则为 x^2+y^2。则

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\iiint_v r^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_v\left(x^2+y^2\right)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

显然，上式中的积分在直角坐标系中计算并不容易，但观察到积分区域是球体，且被积函数是 $x^2+y^2(r^2)$，所以建立球坐标系，如图 6(a)所示，在球坐标系下计算[7]，则：

$$J=\rho\iiint_v\left(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\rho\iiint_v r^4\sin^3\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^4\mathrm{d}r$$

对积分变量 φ 积分后得：

$$J=\rho\cdot2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^4\mathrm{d}r$$

对积分变量 θ 积分后得：

$$J=\rho\cdot2\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\int_0^R r^4\mathrm{d}r$$

对积分变量 r 积分后得最终结果：

$$J=\rho\cdot\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{1}{5}\left[r^5\right]_0^R=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{2}{5}R^2=\frac{2}{5}mR^2$$

方法 2、巧取微元法：

先取半径为 r，厚度为 dr 的薄球壳，然后在薄球壳上取一边缘弧长为 dl，半径为 $r\sin\theta$ 的圆环带，以圆环带质量 dm 为质量元，求薄球壳转动惯量，如图 6(b)所示，圆环带质量 dm 等于其体积乘以密度，由于圆环带的宽度 dl 及厚度 dr 为无穷小量，其体积等于长为 $2\pi r\sin\theta$，宽为 dl，厚度为 dr 的长方体体积：

$$\mathrm{d}V=2\pi r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}l=2\pi r\sin\theta\mathrm{d}r\cdot r\mathrm{d}\theta=2\pi r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

上式中的 2π 等同于在球坐标系下对积分变量 φ 积分后的结果。

薄球壳的转动惯量为：

$$\mathrm{d}J=\int_m r^2\mathrm{d}m=\int_s r^2\sin^2\theta\rho\mathrm{d}v=\int_0^{\pi}\rho\cdot2\pi r^4\mathrm{d}r\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\rho\cdot\frac{8}{3}\pi r^4\mathrm{d}r$$

(在求解薄球壳的转动惯量时要注意，只能对圆环带的宽度 dl 求积分，即对变量 θ 求积分，不能对 r 求积分，此时薄球壳的厚度 dr 是一个常量。)此结果与用定义法在球坐标下完成对积分变量 φ 及 θ 的积分得到的结果一致，即选取微元的过程已完成了对积分变量 φ 及 θ 的积分。球体转动惯量为各薄球壳转动惯量之和，由于薄球壳半径 r 是连续分布的，对 dJ 积分即可得到球体的转动惯量：

$$J=\int_0^R\rho\frac{8}{3}\pi r^4\mathrm{d}r=\frac{8}{15}\pi\rho\cdot\left[r^5\right]_0^R=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot R^2=\frac{2}{5}mR^2$$

另一种方法[8]是先选取半径为 r，厚度为 dz 的薄圆盘为微元，如图 6(c)所示薄圆盘绕其几何轴转动的转动惯量在上文中已作阐述，即选取极坐标求解或选取厚度为 dr 的小圆环作为微元求解，其结果为：

$$\mathrm{d}J=\frac{1}{2}m'r^2$$

式中 m'薄圆盘的质量，m'等于圆盘体积 $\pi r^2 dz$ 乘以其密度 ρ，根据几何关系 $r^2 = R^2 - z^2$，因此可得：

$$dJ = \frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz$$

球体转动惯量为各薄圆盘转动惯量之和，对 dJ 积分即可得到球体的转动惯量：

$$J = \int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\rho\pi\left(R^2 - z^2\right)^2 dz = \frac{2}{5}mR^2$$

从以上分析可以看出，三种方法本质上都是选取便于求解积分的微元 dm，第一种“定义法——巧取坐标系”中 dm 是由球坐标系的体积元 $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ 决定的，这种方法对于学生来说，只要熟悉球坐标系，则不用刻意去选取微元 dm，也不容易出错。后面两种方法是选取具有一定对称性的 dv，从而简化积分的求解过程，这两种方法与第一种方法在一定程度上是相同的，因为在选取 dv 时，完成了在球坐标系下对于某些坐标变量的积分。这种做法虽然使得求解积分简单了，但是 dv 的选取却给学生带来了更多的理解和计算上的困难，稍有不慎就会出错。

从上文中几种匀质刚体绕定轴转动的转动惯量推导中可以看出，选取微元是一种技巧性很强的方法，对于数学掌握得不够熟练的同学，在使用这种方法时很容易犯错，如果教师能在课堂上花点时间引入多重积分和坐标系的知识，刚体转动惯量的求解则会变成一件轻松的事。虽然这会拖延课程进度，但是对后续的教学开展仍有帮助，比如在电磁学部分，带点圆环和圆盘轴线上的电场强度和电势的求解也会用到这些知识。

3. 总结

本文针对大学物理教学中，为应对学生微积分知识不够牢固，以及不会使用微积分解决物理问题的情况，教师面临的如何做好高等数学与大学物理中所用微积分知识的衔接；如何引导学生正确地使用微积分知识解决物理问题；以及如何在解决物理问题时选择合适的数学技巧三个问题，分别给出了一种解决方法，并进行了举例论证：1) 在课程初始阶段注重强调基本的数学概念和数学思想，帮助学生快速回顾微积分知识；2) 在动力学问题的解题过程中，注重将具体的物理问题转化为数学问题的过程和思路；3) 必要的时候提前引入数学课程中没学到的微积分知识，淡化不必要的数学技巧。这几点建议都是根据作者在教学过程中的经验总结得出的，并取得了良好的教学效果，希望能对面临同样问题的老师有稍许帮助和启发。

基金项目

衢州市科技计划指导性项目(2022168)“基于智能制造的纵剖优选锯主轴调整系统结构研究”。

参考文献

[1] 宋士贤. 工科物理教程(第 3 版)教师参考书[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
[2] 王白音其其格. 论大学物理中的矢量和微积分思想[J]. 教育教学论坛, 2015(41): 173-174.
[3] 阳喜元, 蒋彬. 有关大学物理微积分应用的若干问题[J]. 物理通报, 2011, 40(6): 13-16.
[4] 黄熙, 饶识, 谭艳蓉, 等. 微积分思想和方法在大学物理教学中的应用和研究[J]. 湖北师范大学学报(自然科学版), 2021, 41(3): 99-104.
[5] 马文蔚, 周雨青. 物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019: 114-119.
[6] 唐淑红. 对学生求球壳、球体转动惯量计算中的错解分析[J]. 湖南人文科技学院学报, 2009, 2(2): 146-147.
[7] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021: 174-176.
[8] 崔晶磊, 樊实. 求解匀质球体转动惯量的 4 种方法[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(11): 85-88.