Advances in Education 教育进展, 2023, 13(8), 5970-5974
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.138930

巧解抽象函数的奇偶性、对称性和周期性问题

余春蓉，陈 冲

西华师范大学数学与信息学院，四川 南充

收稿日期：2023年7月16日；录用日期：2023年8月15日；发布日期：2023年8月23日

摘 要

抽象函数没有具体的解析式，只给出函数满足一部分的运算法则或者性质。抽象函数综合体现学生数学抽象、逻辑推理、直观想象和数学运算等数学核心素养。本文从函数的对称性角度推导函数周期性，在抽象函数给出满足对称性的条件下，通过函数的轴对称和中心对称点“知二求一”。利用周期性轻松解决近十年高考中抽象函数求值和求和问题，巧用抽象函数的对称性满足的等式反推选项对称性是否正确。使得晦涩难懂函数问题解题思路清晰明了和简单易懂。

关键词

抽象函数，对称性，周期性

Skillfully Solving the Parity, Symmetry, and Periodicity Problems of Abstract Functions

Chunrong Yu, Chong Cheng

School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Jul. 16th, 2023; accepted: Aug. 15th, 2023; published: Aug. 23rd, 2023

Abstract

Abstract functions do not have specific analytical expressions, but only provide some operational rules or properties that the function satisfies. Abstract functions comprehensively reflect students' core mathematical literacy such as mathematical abstraction, logical reasoning, intuitive imagination, and mathematical operations. This article deduces the periodicity of a function from the perspective of its symmetry. Under the condition that the abstract function satisfies symmetry, the

文章引用: 余春蓉, 陈冲. 巧解抽象函数的奇偶性、对称性和周期性问题[J]. 教育进展, 2023, 13(8): 5970-5974.
DOI: 10.12677/ae.2023.138930

function is known as "knowing two and finding one" through its axial symmetry and central symmetry points. It is easy to solve the problem of abstract function evaluation and summation in the college entrance examination in the past ten years by using periodicity, and deduce whether the symmetry of the option is correct or not by using the equation that the symmetry of the abstract function satisfies. It makes the solution of obscure function problems clear and simple to understand.

Keywords

Abstract Function, Symmetry, Periodicity

1. 引言

关于求抽象函数周期性、奇偶性和对称性的结论非常多，推导过程繁杂，学生难以理解，经常死记结论，大多数同学还会记忆错乱，抽象函数的考点也就成为学生的难点和易错点[1]。如果给出的函数条件能满足以下对称性的形式，就可以将抽象函数的周期性都转化为找函数图像的对称轴和对称点，奇偶性问题也转化为对称性问题，还可从函数平移的角度更快解决两个复杂的抽象函数的对称条件。帮助学生减轻学习记忆负担和培养学生抽象函数能力，也为老师综合性专题教学提供参考。

2. 周期性和对称性的基本形式

对于定义域内的任意一个 x，都存在一个非零常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$，称 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，即周期函数的基本形式为 $f(x)=f(x+T)$。对于定义域内的任意一个 x，形如 $f(a-\lambda x)=f(b+\lambda x)$ 即满足轴对称，形如 $f(a-\lambda x)+f(b+\lambda x)=c$ 即满足中心对称。

周期性和对称性函数解析式 $f(x)$ 特征总结为“x 的系数同号是周期，异号是对称”。

2.1. 轴对称

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴 $x=0$ 对称，且满足函数 $f(x)=f(-x)$。

结论 1：函数 $f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=a$ 轴对称[2]。

推论 1：函数 $f(a-\lambda x)=f(b+\lambda x)\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 轴对称。

2.2. 中心对称

奇函数 $f(x)$ 的图像关于 $(0,0)$ 中心对称，且满足函数 $f(x)+f(-x)=0$。

结论 2：$f(a-x)+f(a+x)=0\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 $(a,0)$ 中心对称[2]。

推论 2：$f(a-\lambda x)+f(b+\lambda x)=c\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 中心对称。

结论 3：若 $g(x)$ 的对称轴为 $x=n$，对称中心为 (c,d) 且 $f(x)=g(x+a)+b$，则 $f(x)$ 的对称轴为 $x=n-a$，对称中心为 $(c-a,d+b)$。

推论 3：若 $f(x)$ 的对称轴为 $x=n$，对称中心为 (c,d) 且 $f(x)=g(x+a)+b$，则 $f(x)$ 的对称轴为

$x=n+a$，对称中心为$(c+a,d-b)$。

2.3. 对称性推导周期性

结论 4：函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=a$， $x=b$ 轴对称$\Rightarrow$函数 $f(x)$ 的周期$T=2|b-a|$。

证明：由题意和结论 1 可知$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(b+x)=f(b-x) \end{cases}$，用 $x+a$ 和 $x+b$ 分别替换 x 可得

$\begin{cases} f(2a+x)=f(-x) \\ f(2b+x)=f(-x) \end{cases}$，即 $f(2a+x)=f(2b+x)$，故 $f(x)=f(x+2(b-a))$,故$T=2|b-a|$。

结论 5：函数 $f(x)$ 的图象关于$(a,0)$，$(b,0)$中心对称$\Rightarrow$函数 $f(x)$ 的周期$T=2|b-a|$。

证明：由题意和推论 2 可知$\begin{cases} f(a+x)+f(a-x)=0 \\ f(b+x)+f(b-x)=0 \end{cases}$，用 $x+a$ 和 $x+b$ 分别替换 x 可得

$\begin{cases} f(-x)=-f(2a+x) \\ f(-x)=-f(2b+x) \end{cases}$，即 $f(2a+x)=f(2b+x)$。所以 $f(x)=f(x+2(b-a))$，故$T=2|b-a|$。

结论 6：函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=a$ 轴对称，关于$(b,0)$中心对称$\Rightarrow$函数 $f(x)$ 的周期$T=4|a-b|$。

证明：由题意和推论 1 和推论 2 可知$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x) \\ f(b+x)+f(b-x)=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} f(-x)=f(2a+x) \\ f(-x)=-f(2b+x) \end{cases}$，所以

$f(2a+x)=-f(2b+x)$，即 $f(2a-2b+x)=-f(x)$用 $2a-2b+x$ 替换 x 得，

$f(x+4(b-a))=-f(2a-2b+x)=f(x)$，故周期$T=4|b-a|$。

3. 高考题应用举例

下面是近十年全国卷高考题的关于抽象函数周期性和对称性的考题。

题型一：判断函数的周期性、奇偶性和对称性

判断函数的性质，根据函数对称点和奇偶性满足的函数关系式，假设选项结果正确，反推函数是否满足条件。

例 (2013 全国 II 卷理科)已知函数 $f(x)=\cos x\sin 2x$，下列结论错误的是( )。

A. $y=f(x)$的图像关于点$(\pi,0)$中心对称。

B. $y=f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称。

C. $f(x)$是偶函数。

D. $f(x)$是周期函数。

解析：对于 A，如果$y=f(x)$的图像关于点$(\pi,0)$中心对称，则由推论 2 可知得满足 $f(x)+f(2\pi-x)=0$。因为 $f(2\pi-x)=\cos(2\pi-x)\sin 2(2\pi-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$，所以 $y=f(x)$图像关于点$(\pi,0)$中心对称，A 正确。

对于 B，如果$y=f(x)$的图像关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称，则由推论 1 可知得满足 $f(x)=f(\pi-x)$。因为 $f(\pi-x)=\cos(\pi-x)\sin 2(\pi-x)=\cos x\sin 2x=f(x)$，所以 B 正确。

对于 C，因为 $f(-x)=\cos(-x)\sin 2(-x)=-\cos x\sin 2x=-f(x)$。所以 C 错误。

对于 D，由 A 和 B 正确由结论 6 可知周期$T=2\pi$。所以 D 正确。

题型二：利用周期性求函数值

在抽象函数题目中求函数值利，用函数周期性的周期性质，适当转化自变量的数值，结合已知条件，进行求得函数值，这是通法。同时可以结合条件和以上结论和推论直接求出周期，在进行求函数值。高考主要是以选择题、填空题的形式出现，考察函数周期性的基本应用。以下高考题都用两种不同的思路求解函数周期性。

例 1 (2014 年全国 II 卷文科)奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(1)=2$，则 $f(8)+f(9)=(\ )$。

解析：方法一：由题意可得 $\begin{cases} f(x)=-f(-x) \\ f(x+2)=f(-x+2) \end{cases}$，即 $\begin{cases} f(x)=-f(-x) \\ f(x+4)=f(-x) \end{cases}$，所以 $f(x)=-f(x+4)$，$f(x+4)=-f(x+8)=-f(x)$ 即所以周期 $T=8$。所以 $f(8)+f(9)=f(0)+f(1)=0+2=2$。

方法二：因为 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(x)=-f(-x)$，得函数 $f(x)$ 的图像关于 $(0,0)$ 对称。因为 $f(x+2)$ 为偶函数，即 $f(x+2)=f(2-x)$，由推论 2 得函数 $f(x)$ 的图像 $x=2$ 对称。由结论 6 得 $T=2\times4=8$。$f(8)+f(9)=f(0)+f(1)=0+2=2$。

例 2 (2021 年全国甲卷文科 T12)设 $f(x)$ 的定义域为 R 的奇函数，且 $f(x+1)=f(-x)$，若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=(\ )$。

解析：方法一：由题意可得 $\begin{cases} f(x)=-f(-x) \\ f(1+x)=f(-x) \end{cases}$，即 $f(1+x)=-f(x)$，所以 $f(2+x)=-f(x+1)=f(x)$，得 $T=2$。$f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$。

方法二：由推论 1 和推论 2 得 $f(x)$ 的图像关于 $(0,0)$ 中心轴对称，$x=\frac{1}{2}$ 轴对称，由结论 6 可得 $T=2$。$f\left(\frac{5}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$。

例 3 (2021 年全国甲卷理科 T12)设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$，若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=(\ )$。

解析：方法一：由题意可得 $\begin{cases} f(x+1)+f(-x+1)=0 \\ f(x+2)=f(-x+2) \end{cases}$，即 $\begin{cases} f(x)=-f(-x+2) \\ f(x+2)=f(-x+2) \end{cases}$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，故 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以周期 $T=4$。所以 $f(3)=f(1)=0$。因为 $f(0)=f(-1+1)=-f(1+1)=-f(2)$。因为 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$，所以由 $f(1)=0$ 得 $a+b=0$。因为 $f(0)+f(3)=6$，所以 $f(0)=6$，$f(2)=-6$。即 $4a+b=-6$。所以 $a=-2,b=2$。故 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$。

方法二：由推论 1 和推论 2 得 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 和 $(1,0)$ 对称，又由结论 6 得 $T=4$。

分析： 例 2 至例 3 的都是对于求解，对于方法一都是使用通法解抽象函数周期性，利用周期性，将括号内的值进行变换，根据恒等式，进行周期推导。第一步列出解析式，第二部通过替换和等量代换转化为周期函数的基本形式[3]。例 4 整个过程逻辑性和抽象性很强，对于学生的基础有很高的要求，推导过程困难且复杂。对于方法二，找出对称点和对称轴，根据以上结论和推论直接得出周期，整个解题过程简单、准确且快速。我们可以看出通过对称性解周期，思路更加清晰简单，能够快速准确解题。

题型三：利用周期性求函数和

求解函数的本质还是求解函数值，对于一个相对大的函数值的和肯定是对于抽象函数周期性的结合应用。它的难度一般更加困难，几乎都是以选择压轴题形式出现，对学生抽象、运算、逻辑推理的综合考察。

例 4 (2022·全国乙理科 T12)已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 R，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$。若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=(\ )$。

解：方法一：用 $2-x$ 替换 $g(x)-f(x-4)=7$ 中的 x 得 $g(2-x)-f(-x-2)=7$ ①，又由题可知 $f(x)+g(2-x)=5$ ②，由②和①可得 $f(x)+f(-x-2)=-2$ ③。由推论 2 可得 $f(x)$ 的图像关于 $(-1,-1)$ 对称。又因为 $g(x)=f(x-4)-7$，$y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，由推论 3 可得 $f(x)$ 的图像关于 $x=-2$ 对称，又由结论 6 得 $T=4$。当 $x=0$，$f(0)+g(2)=5$，即 $f(0)=5-g(2)=1$，所以 $f(4)=f(0)=1$。当 $x=2$ 时，$g(2)-f(-2)=7$。即 $f(-2)=g(2)-7=-3$，所以 $f(2)=f(-2)=3$。当 $x=1$ 时，$f(1)+g(1)=5$，$g(1)-f(3)=7$，即 $f(1)=-1$，$f(-1)=f(1)=-1$，所以 $f(3)=f(-1)=-1$。故 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=5[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=5\times(-1-3-1+1)-1-3=-24$。

方法二：由方法一 $f(x)$ 的图像关于 $(-1,-1)$ 中心对称，又因为 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，即 $g(2-x)=g(2+x)$ ④，用$-x$ 替换②中 x 得 $f(-x)+g(2+x)=5$ ⑤。由②④⑤可得 $f(x)=f(-x)$，即 $f(x)$ 的图像关于 $x=0$ 对称，由结论 6 得 $f(x)$ 周期 $T=4$。同方法一得 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=-24$。

分析：本题是两个抽象函数的结合，本题不仅需要替换变量，而且还要应用方程思想求 $f(x)$ 的关系式，增加了求函数周期的难度，是本题的第一个突破口。例 4 是题型一和题型二的综合性应用，处理 $g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称的条件处理是本题解题的另外一个突破口。要求学生各种结论、关系的理解且熟记，才能在短时间把结果算出来。

4. 结论

抽象函数对称性和周期性是数学核心素养的体现，对应的高考题逐年变难。在数量上，从一个抽象函数变成两个，数量关系与空间形式更加抽象，逻辑推理更加复杂；在计算上，代换和变换增多，运算的思维加强。所以在老师教学中需要深入解析奇偶性与对称性、对称性与周期性的本质，巧妙把奇偶性转换为对称性，把对称性转换为周期性。在学生学习中不提倡学生死记很多二级结论，必要时借助一些特殊函数图像进行理解、推导和记忆。理清奇偶性、对称性和周期性的关系，很多复杂抽象函数的周期性问题就会更加简单。

参考文献

[1] 王美华. 高一学生抽象函数学习障碍研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2006.

[2] 陈玉兰, 吴志鹏. “两次还原”破解抽象函数的周期性与对称性问题[J]. 中学数学研究, 2022(10): 26-27.

[3] 郑艳. 从抽象函数形式看函数性质——抽象函数在周期性、对称性、奇偶性上的体现[J]. 教育教学论坛, 2011(15): 200+108.