Advances in Education 教育进展, 2023, 13(9), 6376-6383
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.139992

定积分应用中的思政元素探究

邵　仪，阿春香

肇庆学院数学与统计学院，广东 肇庆

收稿日期：2023年7月29日；录用日期：2023年8月27日；发布日期：2023年9月4日

摘　要

本文从定积分应用中求一般图形的面积、由平行截面面积求体积以及求曲线弧长三个方面探究了其中所蕴含的马克思唯物主义辩证法、我国古代数学家的研究成果及历史古迹等思政元素，从而提高学生分析问题和解决问题的能力，同时培养学生的爱国情怀和“工匠”精神。

关键词

数学分析，定积分应用，思政元素

The Exploration of Ideological and Political Elements in the Application of Definite Integral

Yi Shao, Chunxiang A

School of Mathematics and Statistics, Zhaoqing University, Zhaoqing Guangdong

Received: Jul. 29th, 2023; accepted: Aug. 27th, 2023; published: Sep. 4th, 2023

Abstract

In this paper, we explore ideological and political elements, such as Materialist dialectics of Marx doctrine, research achievements of ancient mathematicians of China, historical sites in China, which hide in three aspects of the application of definite integral: computing the area of a general figure, computering the volume by Parallel sectional area and computering arc length of curve. These ideological and political elements can improve students' ability to analyze and solve problems, and cultivate students' feelings of patriotism as well as a craftsman spirits.

文章引用: 邵仪, 阿春香. 定积分应用中的思政元素探究[J]. 教育进展, 2023, 13(9): 6376-6383.
DOI: 10.12677/ae.2023.139992

Keywords

Mathematical Analysis, Application of Definite Integral, Ideological and Political Elements

1. 引言

2020 年 5 月教育部发布的《高等学校课程思政建设指导纲要》[1]中指出，全面推进课程思政建设是落实立德树人根本任务的战略举措，也是全面提高人才培养质量的重要任务。理学类专业课程，要在课程教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力。要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感。而要全面推进课程思政建设，教师是关键。所以在课堂教学中结合课程和专业特点，挖掘课程中的思政元素，强化育人意识，提升育人能力是新时代一线高校教师亟待解决的问题。

《数学分析》是数学类各专业必修的基础专业课，其基本概念、基础理论和基本方法，也是数学专业学生学习后续课程的基础。《数学分析》课程知识体系庞大，逻辑性与理论性强，包含了许多经典的数学思想、数学方法，数学文化和历史。本文以华东师范大学数学科学学院编著的《数学分析》(第五版) [2]教材为例，从定积分应用一章中的平面图形的面积、由平行截面面积求体积以及平面曲线的弧长等内容挖掘教材所隐含的思政元素，并将这些思政元素巧妙的融入教学内容，能够让学生运用马克思辩证唯物主义观点思考和学习数学专业知识，培养学生学习科学家不畏艰险，勇于探索的创新精神以及增强学生对国家的民族自豪感和责任心，这也是以培养应用型人才为目标的地方性高校教师教书育人的核心任务。

2. 定积分应用中蕴含的马克思唯物主义辩证法

对立统一规律和质量互变规律是马克思唯物辩证法的两大基本规律。对立统一规律也称矛盾规律，它揭示了任何事物的内部都存在矛盾，事物矛盾双方既统一又斗争，从而推动事物的运动、变化和发展. 矛盾的两个方面当具备一定的条件时可以相互转化，同时它们相互排斥又相互依存。数学中许多知识点都体现着这一规律，诸如从有限到无限；从个别到特殊，再提高到一般；曲与直的关系转化，变量与常量的统一[3]；从实践到理论，理论反过来对实践具有积极的指导作用等。

质量互变规律就是指事物的发展变化存在两种基本形式，即量变和质变，量变表现为事物及其特性在数量上的增加或减少，是一种连续的、不显著的变化，质变是事物根本性质的变化，是渐进过程的中断，是由一种质的形态向另一种质的形态的突变。量变和质变是相互区别，又相互联系、相互转化的。量变是质变的前提和基础，质变是量变的必然结果。比如《数学分析》中的求极限，运用定积分求面积，求体积及曲线的弧长等许多知识都体现着质量互变规律。

下面我们主要以计算平面图形的面积为例详细探讨对立统一规律和质量互变规律在运用定积分理论计算平面图形的面积、立体图形的体积以及弧长中的具体应用。

我们知道，在众多平面图形的面积计算中，求曲边梯形的面积是最简单而且是最基本的面积计算类型，它也是定积分产生的背景之一，其基本思想就是：“分割，近似，求和，取极限”，具体细节陈述

如下[2]：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$。则由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$， $x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形(见图 1)，称为曲边梯形，为了求面积，

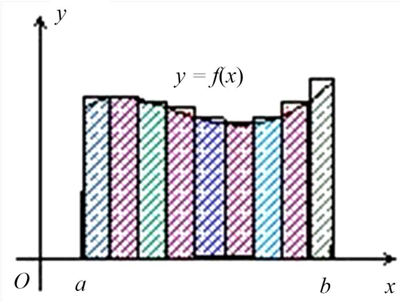

Figure 1. Segmentation of area of trapezoid with curved edge
图 1. 曲边梯形面积分割

(1) 分割：在区间 $[a,b]$ 内任取 $n-1$ 个分点，依次为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

它们将区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$， $i=1,2,3,\cdots,n$， 再用直线 $x=x_i$， $i=1,2,3,\cdots,n$， 把曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形；

(2) 近似：记 Δx_i 为区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度，$i=1,2,\cdots,n$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作以 $f(\xi_i)$ 为高， Δx_i 为底的小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$， 用这些小矩形的面积近似代替相应的小曲边梯形的面积；

(3) 求和：曲边梯形面积的近似值为 $S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；

(4) 取极限： $S=\lim\limits_{\|T\|\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$， 其中 $\|T\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$。

上述过程很好的蕴含了唯物辩证法对立统一规律和质量互变规律。首先分割将所求的曲边梯形划分为有限个小曲边梯形，体现了整体与部分[4]既相互联系又相互区别的对立统一关系。其次近似就是用小矩形面积近似代替小曲边梯形的面积，体现了直线和曲线，常量和变量，特殊与一般等两种矛盾的转化和对立统一。最后求和就是用 n 个小矩形面积近似代替曲边梯形的面积，即将部分转化为整体，又一次体现部分与整体的辩证关系。

取极限就是将曲边梯形分割得越来越小，这样将所求大的曲边梯形分割成的小曲边梯形就越来越多，从而小曲边梯形的面积和对应小矩形的面积近似度就越高，当小曲边梯形的个数趋于无限的时候，就得到了所求曲边梯形的准确面积。这个过程中，小曲边梯形的个数增加属于量变的范畴，取极限就是量的积累达到质的飞跃的过程，从而形象准确地体现了唯物辩证法的质量互变规律，同时有限和无限也是对立统一关系[5]。

对于一般平面图形，根据图形的具体情况我们总可以将它分割为若干个特殊图形如三角形、四边形、梯形以及曲边梯形等，然后运用这些特殊图形的面积求出一般图形的面积，从而实现特殊到一般，理论到实践的转化，进一步说明了在求一般平面图形面积的过程中对立统一规律的广泛应用。

由平行截面面积求体积和求一段曲线的弧长的方法还是运用定积分的基本思想“分割，近似，求和，取极限”，和求曲边梯形的面积不同的是将所求立体图形或一段弧分割为 n 个部分后，用来近似每个小部分的几何图形不同。在求体积中，将每个部分近似为一个小薄片柱体(见图 2)，其中柱体的底面积为截面面积，n 个小薄片柱体体积的和就近似等于这个立体图形的体积。而在求弧长过程中，将整个所求弧

段分割为 n 个小弧段，每个小弧段用直线段来近似，n 个直线段相加就近似整个所求弧长，最后取极限就可以得到整个立体体积或所求弧段的长度。

在求立体体积和弧长的过程中，和求曲边梯形的过程类似，也蕴含了唯物辩证法的量变与质变互换规律，以及对立统一规律的诸多方面：理论与实践、整体与部分、特殊与一般、直线与曲线、常量与变量以及有限与无限等众多类型的两个矛盾体之间相互转化，相互排斥与相互依存的关系。

通过在讲解定积分应用中求面积、体积及弧长公式的过程中，恰当的引入唯物辩证法基本规律，不仅可以让学生对所学专业知识有更深的理解，而且也教会学生理解数学中所蕴含的辩证法思想，能够从哲学方法论角度分析和解决问题。

3. 引入我国古代数学家的研究成果，增强民族自豪感和爱国情怀

由平行截面面积求体积是定积分思想方法的又一具体应用，《数学分析》教材设置了两道经典例题，其中一道是求两个等底面半径圆柱垂直相交围成的几何体体积，这正是我国古代数学家刘徽当年研究过的“牟合方盖”体积，另一道例题是求椭球体与球体体积公式，其中求球体体积公式是我国齐梁时代数学家祖暅当年的研究内容之一，从而在教学中引入我国古代著名的数学成果——祖暅原理。

为了详细说明两位古代数学家的研究成果，下面我们简要介绍由平行截面面积求体积的思想方法：

一般体积公式[2]：设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是三维空间的一立体图形，它夹在 $x=a$ 和 $x=b$ ($a<b$)两个平行平面之间，若过任意一点 $x\in[a,b]$ 作垂直于 x 轴的平面截 $\boldsymbol{\Omega}$ 得一截面，截面面积显然是 x 的函数，记为 $A(x)$。如果 $A(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则该几何体 $\boldsymbol{\Omega}$ 的体积为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$，见图 2。

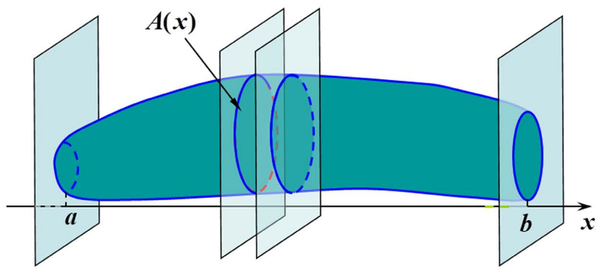

Figure 2. Solid figure $\boldsymbol{\Omega}$
图 2. 立体图形 $\boldsymbol{\Omega}$

3.1. 牟合方盖

作为上述一般体积公式的应用，教材设置的例题 1 如下：

例 1：求两圆柱 $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$ 所围的立体体积(见图 3)。

这个立体图形的体积用现代定积分思想的一般体积公式很容易求得。我们只需要求出第一卦限的体积(见图 4)，所求图形的体积就是第一卦限体积的 8 倍，而第一卦限图形的截面面积是边长为 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的正方形，其截面面积函数为 $A(x)=a^2-x^2$，于是所求立体图形的体积为：$V=8\int_0^a A(x)\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}a^3$。

上述几何图形正是当年我国数学家刘徽研究球体公式时创建的几何模型，称为“牟合方盖”。在《九章算术》中他的描述如下：“取立方棋八枚，皆令立方一寸，规之为圆困，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸其中，即圆率也。”它就是两个在等半径圆柱躺在平面上垂直相交的公共部分，由于这个立体的外形像两个对称的正方形雨伞，所以称它为“牟合方盖”。

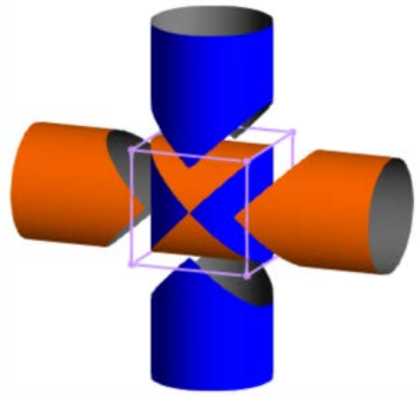

Figure 3. Two orthogonal cylinders with equal base radius
图 3. 两等地面半径圆柱正交

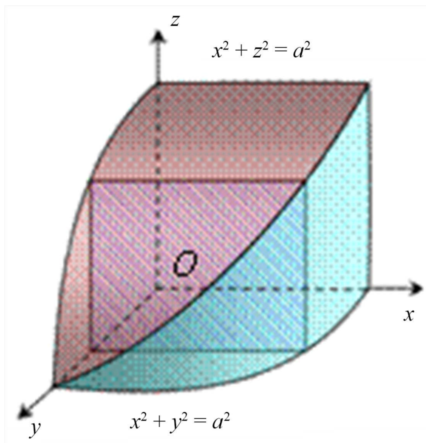

Figure 4. Solid figure in the first octant
图 4. 第一卦限立体图

刘徽当年为了计算球体体积，他发现“牟合方盖”体积与其内接球体体积之比为$4:\pi$，一旦求得“牟合方盖”的体积，球体体积就迎刃而解，遗憾的是当时他没有能够求出“牟合方盖”的体积。

3.2. 祖暅原理

作为一般体积公式的又一次应用，教材设置了另一道例题：

例 2：求由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围的几何体体积，其中$(a,b,c>0)$。

容易知道椭球体平行于三个坐标轴的截面都是椭圆，利用已知的椭圆面积可知平行于 xOy 坐标面的椭圆形截面面积为$A(x)=\pi bc\left(1-x^2/a^2\right)$，从而得到所求椭球体体积为$V=\pi bc\int_{-a}^{a}A(x)\mathrm{d}x=4\pi abc/3$。

球体可以看作是椭球体的特殊情形，即当椭球体中$a=b=c$时，椭球体即为球体，易知球体体积$V=4\pi a^3/3$，可见用现代数学理论求球体体积是很容易计算。从球体的体积公式引入祖暅原理，让学生了解我国数学家祖暅的这一伟大成就。

祖暅为了求球体体积，沿用了刘徽的思想方法，只要求出“牟合方盖”的体积，就能得到球体的体积。为了得到“牟合方盖”的体积，他创立了有名的祖暅原理。根据《九章算数》记载的祖暅原理：“夫叠棊成立积，缘幂势既同则积不容异”，其中幂就是截面面积，势就是高。即是说：等高处的截面面积

既然相等，则两立体的体积不可能不相等(见图 5)，这是祖暅一生最有代表性的发现。以长方体体积公式和祖暅原理为基础，可以求出柱体、锥体、台体、球体等的体积。

在西方，直到 17 世纪，这一原理才由意大利数学家卡瓦列利(Bonaventura-Cavalieri)发现。1635 年出版的《连续不可分几何》中，提出了等积原理，所以西方人把它称之为卡瓦列利原理。其实，他的发现要比我国的祖暅原理晚一千一百多年。

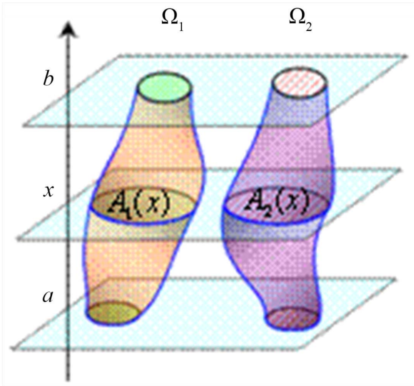

Figure 5. Schematic diagram of Zu Geng's principle
图 5. 祖暅原理示意图

通过介绍上述两位我国古代数学家的研究成果，一方面加深学生对所学内容的理解和掌握，开阔知识视野，另一方面，可以启发学生的民族自豪感和爱国情怀，培养学生的责任意识。从其研究过程让学生学习科学家严谨的科学探索和创新精神以及对科学的敬畏精神，同时激发学生对科学研究的兴趣。

4. 激发学生的创新精神和“工匠”精神

求平面曲线的弧长是中学数学圆周长、扇形的弧长等特殊图形弧长的一般化理论，也是定积分理论的再一次应用，其基本方法是：

设 $C=\overset{\frown}{AB}$ 是一条没有自交点的非闭平面曲线(见图 6)，其方程为：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，在 C 上依次取分点 $A=P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},P_n=B$ 构成 C 的一个分割，记为 T，联结 T 的相邻分点得到由 n 条线段构成的内折线，内折线的长度近似等于弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，取极限得到弧长公式 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$。

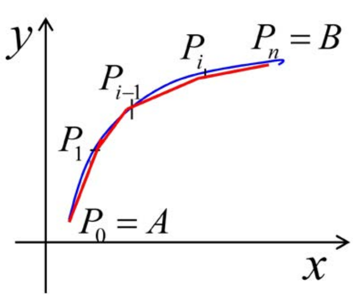

Figure 6. Segmentation of plane curve
图 6. 平面曲线的分割

在讲解完平面曲线的弧长的推导及公式后，引导学生联想日常生活中一些弧形的物品或著名建筑，思考如何求它们的弧长，可以设置如下例题：

例 3 已知赵州桥的主桥拱是圆弧形，它的跨度(弧所对的弦)长为 37.4 米，拱高(弧的中点到弦的距离)为 7.2 米，运用上述的弧长公式求赵州桥主桥拱的弧长(见图 7)。

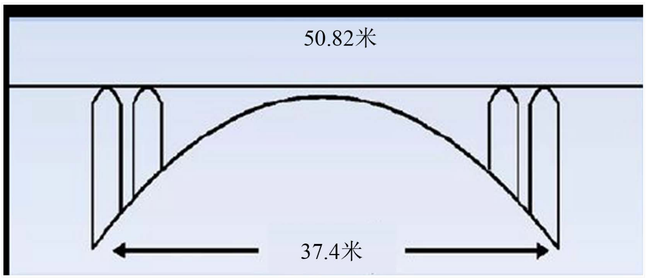

Figure 7. Schematic diagram of the Zhaozhou Bridge
图 7. 赵州桥示意图

如果我们建立直角坐标系，把主桥拱的圆弧看作是以原点为圆心的一段弧，弦与 y 轴正半轴垂直，易求得圆弧所在圆的半径为 27.9 米，从而主桥拱的参数方程为：

$$x = 27.9\cos t,\quad y = 27.9\sin t,\quad t \in [0.78, 2.36],$$

利用弧长公式可以求得主桥拱的弧长为 44.1 米。

在讲解这个例题的过程中可以及时给学生介绍赵州桥这一中国古代建筑史上的奇迹，它结构新奇，造型美观。迄今为止，中国境内只有赵州桥和万里长城被美国土木工程学会命名为“国际土木工程历史古迹”，与巴黎埃菲尔铁塔、巴拿马运河、埃及金字塔等世界著名景观齐名。

赵州桥又名安济桥，建于隋大业(公元 605~618)年间，是著名匠师李春建造，桥的跨度为 37.4 米，扁平率为 0.38。直到十三世纪，欧洲才出现跨度 29.9 米，扁平率为 0.37 的大跨度圆弧拱桥——佛罗伦萨桥。因此赵州桥是当今世界上跨径最大、建造最早的圆弧拱桥，也是世界造桥史的一个奇迹性创造[6]。

赵州桥距今已 1400 多年，经历了 10 次水灾，8 次战乱和多次地震都没有遭到破坏。并且古时缺少计算工具，计算理论也很欠缺，赵州桥能屹立千年而不倒，在工程和美学上都堪称是古桥之中的魁首，这有赖于古代匠师的高超建筑技巧，对工程的整体把握能力和灵活应用力学概念进行结构创新的精神。

通过上述对我国古迹赵州桥的介绍，引导和激励学生学习古代匠师的创新精神，在学习和工作中要发扬一丝不苟、精益求精、执着坚持及追求突破的“工匠”精神[7]。

5. 结语

本文以《数学分析》教材定积分应用中的求面积、体积以及弧长为例，探究了其中所蕴含的思政元素。数学作为自然科学的一门基础学科，它的产生和发展是客观世界量的矛盾对立统一的结果，同时也包含了许多数学思想方法、数学文化和历史。因此，我们要改革传统教学中以讲解专业知识为重点的教学方式，钻研教材中所隐含的唯物辩证法和方法论，以及数学家的伟大研究成果，在教学中适宜的穿插和介绍这些数学思想方法和数学文化，不仅能够提升学生对专业知识的理解和掌握程度，增加课堂的趣味性，而且可以培养学生做人做事的优良品质，同时鼓励学生要有爱国情怀，要有创新思想和“工匠”精神。

致 谢

本文感谢肇庆教育发展研究院和肇庆学院思政项目的基金支持。

基金项目

肇庆教育发展研究院教育研究一般课题项目(ZQJYY202208)；2022年肇庆学院课程思政示范课堂建设项目。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知[EB/OL]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603_462437.html?eqid=bc4ffc2f00025ba40000000364292d2e, 2020-5-28.

[2] 华东师范大学科学学院. 数学分析[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 222-235.

[3] 邱念慈. 高等数学: 辩证法的渊薮——高等数学中的对立统一规律例谈[J]. 扬州教育学院学报, 2005, 23(3): 16-19.

[4] 王丹. 探究在应用数学中融入思政元素的教学案例[J]. 数学学习与研究, 2021(23): 6-7.

[5] 魏小巍. 有限和无限的辩证关系新探[J]. 佳木斯教育学院学报, 2020(1): 8-11.

[6] 浩舟. 永远的赵州桥[J]. 知识就是力量, 2000(8): 48-49.

[7] 论“工匠”精神. 求是网[EB/OL]. http://www.qstheory.cn/dukan/hqwg/2017-05/24/c_1121024529.htm, 2017-05-24.