Advances in Education 教育进展, 2024, 14(2), 1982-1987
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.142307

Hans汉斯

浅谈初中生数学分类讨论思想的培养

孙晓曼，刘　君

北华大学数学与统计学院，吉林　吉林

收稿日期：2024年1月25日；录用日期：2024年2月22日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

分类讨论思想是初中数学学习中一种重要的思想方法，但初中生往往缺乏分类讨论的意识，不会熟练地运用分类讨论的思想分析问题，导致思考问题不够全面，解题时存在漏解的现象。这就需要教师深入挖掘教材，在知识讲解的过程中渗透分类讨论的思想，以及提出一些需要区分各种情况进行分类讨论的问题，启发诱导，培养学生有条理，严谨地思考问题的习惯。这种思想方法对提高学生的数学素养和解题水平意义重大。

关键词

分类讨论，初中数学，数学素养

On the Cultivation of Junior Middle School Students' Thoughts of Mathematical Classification Discussion

Xiaoman Sun, Jun Liu

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: Jan. 25th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

The idea of classification discussion is an important method of thinking in Junior high school mathematics learning, but junior high school students often lack the sense of classification discussion, not proficient in using the idea of classification discussion to analyze problems, resulting in insufficient comprehensive thinking problems and the phenomenon of missing solutions when solving problems. This requires teachers to dig deep into the textbooks, infiltrate the idea of classified discussion in the process of knowledge explanation, and put forward some problems that need to

文章引用: 孙晓曼, 刘君. 浅谈初中生数学分类讨论思想的培养[J]. 教育进展, 2024, 14(2): 1982-1987.
DOI: 10.12677/ae.2024.142307

distinguish various situations for classified discussion, inspire and induce students, and cultivate students' habit of thinking systematically and rigorously about problems. This method of thinking is of great significance to improve students' mathematical literacy and problem-solving level.

Keywords

Classification Discussion, Junior High School Mathematics, Mathematical Literacy

1. 引言

我国传统数学教学是实施“双基”教学，即注重基础知识和基本技能的培养，然而随着时代的发展，国家对人才要求的不断提升，在2011年颁布的新课程标准中将“双基”教学扩展为“四基”教学，即要求学生在掌握基础知识和基本技能的同时，也要注重基本的数学思想和基本活动经验的培养。正所谓“授之以鱼，不如授之以渔”，相对于对学生数学知识的直接传授，注重挖掘数学知识背后所蕴藏的数学思想，并引导学生去体会及掌握，才是数学学习的价值所在。在学生数学学习的过程中，常常遇到存在多种情形的问题，此时利用分类讨论的思想可以将复杂的问题简单化，将不确定的问题系统化、清晰化、条理化[1]。这对于培养学生的逻辑推理能力、严谨分析问题的能力以及解题能力具有积极的促进作用。

2. 分类讨论思想的界定

分类讨论思想，是当问题不能统一解决时，将问题进行合理、科学地划分，分成若干种情况，而后对每一种情况进行更深层次的分析和讨论，最后综合各方面的情况，让原题目得到完整的解答。实际上，分类讨论是一个“化整为零，各个击破，然后积零为整”的过程[2]。

3. 分类讨论思想的原则和步骤

分类讨论思想主要遵循了同一性、完整性、互斥性和层次性等几个方面的原则，即分类的标准要统一；分类要完整，不能出现某种情况遗漏的现象；分类之后每种情况都是独立的，不能出现重复的现象；当遇到分类较复杂的问题时，一次分类不能解决问题，需要按照统一的标准再次进行分类，直到符合需求为止。分类讨论思想的大致步骤主要有：1) 确定分类对象；2) 选择分类标准；3) 逐类讨论，得出初步结果；4) 归纳整合，得出结论[3]。

4. 初中生数学分类讨论思想的培养策略

4.1. 创设问题情境，激发学生分类的兴趣

问题是启动学生思维的先导，教师要设置合适的问题情境，启发学生对不确定的情况产生疑问，由问题引发思考，引导学生多方面思考问题，激发学生分类的兴趣。例如，对于有理数加法法则的学习，教师不必直接呈现有理数加法法则的多种情况，可以创设与实际生活有关的问题情境。

如：小刚从家出发，沿着一条由东向西的公路，先走了7米之后，后又走了2米，若以小刚家为原点，规定向东为正方向，在数轴上画出小刚的位置，并说明小刚在家的什么方向，距家多少米？学生根

据实际生活经验，可以分析出运动方向有多种可能，并结合数轴，意识到问题不确定时需要分情况讨论，从而激发学生的分类意识，为有理数加法法则的学习创设良好的思维开端。① 如果小刚两次都是向东走，结果在离家向东 9 米处；② 如果小刚两次都是向西走，结果在离家向西 9 米处；③ 如果小刚先向东走 7 米，后向西走 2 米，结果在离家向东 5 米处；④ 如果小刚先向西走 7 米，后向东走 2 米，结果在离家向西 5 米处。并引导学生根据数轴，列出相应的算式：① $7+2=9$；② $(-7)+(-2)=-9$；③ $7+(-2)=5$；④ $(-7)+2=-5$。除此之外，还可以引导学生创设情境，探究有理数与零，互为相反数的两个数相加的情形，由此自然而然的得出有理数的加法法则。

4.2. 在定义、概念和法则等教学中渗透分类讨论思想

数学定义、概念、法则是构成数学知识的一部分，有很多定义、概念和法则本身就是分类定义的[4]，在学习它们的过程中，学生在数学活动中积累了经验，数学能力也得到了锻炼。初中生最先接触到需要分类讨论的数学内容是有理数，有理数可以按照定义划分，也可以按照正负性划分，学生经历对有理数组成的探讨，初步体会到分类可以有不同的标准，但无论采用哪种分类方法，都要做到不重复，无遗漏。在研究相反数和绝对值时，都是按照正数、负数和零这三个类别来分别进行的。在研究乘除运算法则的时候，也是按照同号、异号、零运算这三类来分别研究的。又如，在比较线段长短的教学过程中，利用线段叠加，一端点重合另一端点位置关系进行分类讨论，在取得相应的数学活动经验后，再来学习比较角的大小这部分内容就会轻松的多。在研究一次函数 $y=kx+b\left(k,b\text{是常数，}k\neq 0\right)$ 的图象和性质时，要讨论 k 和 b 的取值范围，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，函数图像从左至右呈上升趋势，图像一定经过第一、三象限；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数图像从左至右呈下降趋势，图像一定经过第二、四象限。当 $b>0$ 时，图象与 y 轴正半轴相交，当 $b<0$ 时，图象与 y 轴负半轴相交，在研究反比例函数与二次函数时，也同样需要分类讨论参数的取值范围。像这样经过长时间潜移默化的影响，能够增强学生分类讨论的意识，有助于对知识的全面理解，有助于数学能力的提高。渗透分类讨论的思想方法，对发展学生的全面观察和灵活处理问题的能力起到了积极的推动作用。

4.3. 在解题过程中强化分类讨论思想

在解答某些数学问题时，分析题目的过程中可能会产生很多种情况，这时就需要对各种情况进行分类，然后逐个题型进行求解，最后将各种情况综合起来进行解答。下面以几种常见的与分类讨论有关的问题为例来说明在解题过程中如何加强学生分类讨论的思想的培养。

4.3.1. 几何问题的分类讨论

例 1 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AB 的垂直平分线与 AC 所在的直线相交所得的锐角为 40°，则底角的大小为多少？

当题目未给定三角形的形状时，一般需要分三种情况来讨论：锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。如图 1，当$\angle A$ 为锐角时，$\angle A=50°$，则底角为 65°；当$\angle A$ 为直角时，AB 的垂直平分线与 AC 所在的直线不相交，此种情况不存在；当$\angle A$ 为钝角时，$\angle A = 130°$，则底角为 25°。综上所述，底角为 65° 或 25°。而学生做题时常常只想到一种情形，未能对三角形的形状进行分类讨论，导致丢解，在教学中要注重强调分类讨论的思想。

例 2 已知$\odot O$ 的半径为 13 cm，该圆的弦 $AB/\!/CD$，且 $AB=10$ cm，$CD=24$ cm，则 AB 和 CD 之间的距离为多少？

由于两弦与圆心的位置关系不确定，可能在圆心同侧，也可能在圆心异侧，因此需要分类讨论。如图 2，过点 O 作 $EF\perp AB$ 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F。① 当圆心同侧有弦 AB 与 CD 时，$\because AB=10$ cm，

DOI: 10.12677/ae.2024.142307

$CD = 24$ cm，由垂径定理得 $AE = 5$ cm，$CF = 12$ cm∵$OA = OD = 13$ cm，由勾股定理得 $OE = 12$ cm，$OF = 5$ cm∴$EF = OE - OF = 7$ cm。② 当圆心异侧有弦 AB 与 CD 时，同理可求 $OE = 12$ cm，$OF = 5$ cm，此时 $EF = OE + OF = 17$ cm。综上所述，AB 与 CD 之间的距离为 7 cm 或 17 cm.

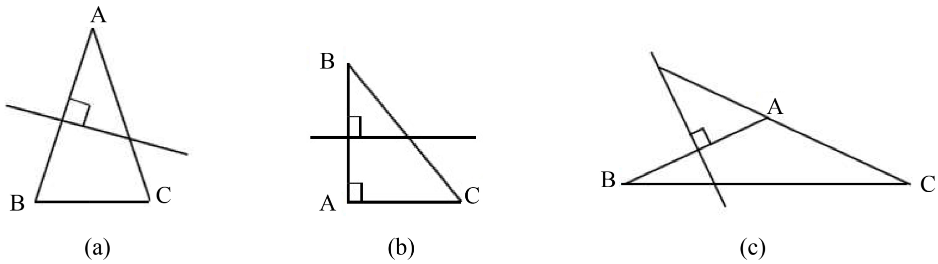

Figure 1. Triangle shape analysis diagram
图 1. 三角形形状分析图

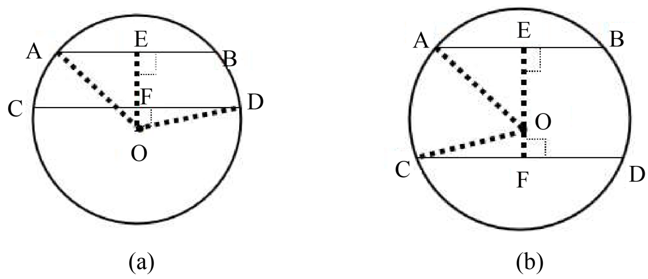

Figure 2. Diagram of the position of the string and the center of the circle
图 2. 弦与圆心位置关系图

此外，在三角形的学习中，等腰三角形顶角和底角，腰和底边，直角三角形斜边和直角边，三角形全等和相似对应边不确定性等问题都会涉及分类讨论思想；在圆的学习中，点与圆、圆与圆等相关问题经常会由于两者位置关系不确定导致结果不唯一，因此在求解圆的相关问题时，也要注意分类讨论思想。教师在平常的教学中要加以总结，学生加强训练，使学生养成有条理的分析问题的习惯。

4.3.2. 代数问题的分类讨论

例 3 已知，n 是一个实数，关于 x 的不等式 $(n+4)x \ge n^2 - 16$，求 x 的取值范围。

解这个不等式，需要利用不等式的性质，不等式左右两边同时除以 $n + 4$。但此题未明确指出 n 的取值范围，不能确定 $n + 4$ 是正数，负数还是零，因此需要分类讨论。① 当 $n+4=0$，即 $n=-4$ 时，不等式恒成立，此时 x 可以取任意实数。② 当 $n+4>0$，即 $n>-4$ 时，$x \ge n-4$。③ 当 $n+4<0$，即 $n<-4$ 时，$x \le n-4$。

例 4 已知函数 $y = ax^2 + 2x + 1$ (a 为常数)的图象与 x 轴有一个交点，求 a 的值。

当遇到此类问题时，很多同学默认为这个函数是二次函数，要让其图象与 x 轴有一个交点，则需要使用根的判别式，使 $\Delta = 0$，解得 $a = 1$，这样就遗漏了 $a = 0$ 的情况。实际上只有当 $a \ne 0$ 时，$y = ax^2 + 2x + 1$ (a 为常数)才是二次函数，当 $a = 0$ 时，函数 $y = ax^2 + 2x + 1$ (a 为常数)是一次函数：$y = 2x + 1$，与 x 轴一定存在一个交点。所以此题要分为 $a = 0$ 和 $a \ne 0$ 两种情况：① 当 $a = 0$ 时，原函数为 $y = 2x + 1$，与 x 轴有一个交点；② 当 $a \ne 0$ 时，原函数 $y = ax^2 + 2x + 1$ 中的 $\Delta = 0$，$4 - 4a = 0$，$a = 1$。综上所述，a 的值为 0 或 1。

当遇到方程，不等式，函数中出现含参数的问题时，我们需要考虑参数的取值范围，进行分类讨论。此外，绝对值，平方根，完全平方式等相关问题，也往往需要进行分类讨论，此类问题可以根据各自的性质和特点，分开计算即可。教师在教学时要反复强调，使学生加深对分类讨论思想的理解和运用。

4.3.3. 动点问题的分类讨论

例 5 如图 3 所示，已知线段 AB 长 6 cm，动点 P 从点 A 出发，以 2 cm/s 的速度沿射线 AB 作匀速运动。动点 Q 从点 B 出发，以 3 cm/s 的速度沿着 $B \to A \to B$ 向终点 B 做匀速往返运动，点 A 与点 B 同时出发同时停止。设点 P 的运动时间为 t s，用含 t 的代数式表示 BP 和 BQ 的长。

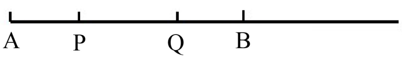

Figure 3. Ray AB
图 3. 射线 AB

此类问题由于点 A 是在射线上运动，点 B 是做匀速往返运动，因此需要分类讨论。当 $0 \le t \le 3$ 时(点 P 在线段 AB 上运动)，$BP = AB - AP = 6 - 2t$；当 $3 < t \le 4$ 时(点 P 在线段 AB 延长线上运动)，$BP = AP - AB = 2t - 6$。当 $0 \le t \le 2$ 时(点 Q 由点 B 到点 A 运动)，$BQ = 3t$；当 $2 < t \le 4$ 时(点 Q 由点 A 到点 B 运动)，$BQ = 2AB - 3t = 12 - 3t$。

例 6 如图 4 所示，在ΔABC 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$AB = 5$，$BC = 3$，动点 P 从点 A 出发，沿着线路 $A \to C \to B \to A$ 以每秒 2 个单位长度的速度运动。设点 P 的运动时间为 t s，求当$\triangle BCP$ 为等腰三角形时 t 在整个运动过程中的值。

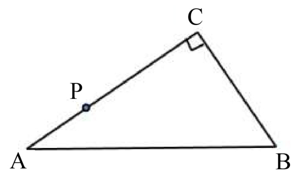

Figure 4. $\triangle ABC$
图 4. $\triangle ABC$

分析此题可知当$\triangle BCP$ 是等腰三角形时，点 P 可能在线段 AC 上或线段 AB 上。① 当点 P 在线段 AC 上时，因为$\angle C$ 是直角，所以$\angle C$ 只能做顶角，只有一种情况，$CP = CB$，$4 - 2t = 3$，$t = 0.5$；当点 P 在线段 AB 上时，出现三种情况：② 当$\angle B$ 为顶角时，$BC = BP$，$3 = 2t - 7$，$t = 5$；③ 当$\angle CPB$ 为顶角时，$PC = PB$，$\because \angle PCA + \angle PCB = 90^\circ$，$\angle A + \angle B = 90^\circ$ $\therefore \angle PCA = \angle A$ $\therefore PC = PA = PB = 2t - 7$；$\because PA + PB = AB$ $\therefore 2(2t - 7) = 5$，$t = 4.75$；④ 当$\angle PCB$ 为顶角时，$CP = CB = 3$，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H。由面积可求 $CH = 2.4$，在 $Rt\triangle CBH$ 中，勾股定理可求 $BH = 1.8$，则 $BP = 2BH = 3.6$ $\therefore 2t - 7 = 3.6$，$t = 5.3$。综上所述，当$\triangle BCP$ 是等腰三角形时 t 的值为 0.5 或 5 或 4.75 或 5.3。

运用分类讨论思想解答动点问题时，首先应根据动点所在的不同位置进行分类，如动点位于几何图形的不同边长进行分类[5]，求出一些线段的表达式，然后根据等量关系列方程求解。很多同学在做题时常常只考虑一种情形，教师在教学中要提醒学生注意点是在线段上，射线上，还是折线上运动，以及点是沿同一方向运动还是往返运动，准确地得出所求线段的表达式，分段的去分析问题，将各种情况归类总结，帮助学生提升做题的信心。

5. 结语

分类讨论思想贯穿于整个数学学习的始终，随着学习的不断深入，使学生养成分类讨论的习惯，并掌握一定的分类技巧，以及常见题型的分类方法，形成一定的分类体系，是至关重要的。通过加强对分类讨论思想的培养，使学生全面地思考问题，对待问题能够有更严谨、缜密的思维。学生自觉地运用分类讨论的思想解决相关的问题，能够在解题中避免丢值漏解，从而增强综合分析问题的能力。

参考文献

[1] 龚丽蓉. 初中生分类讨论思想的掌握现状及培养策略研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2022.

[2] 彭恩. 分类讨论思想在高中数学中的研究与应用[D]: [硕士学位论文]. 信阳: 信阳师范学院, 2017.

[3] 刘润慧. 初中数学分类思想教学现状调查研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2021.

[4] 张涛. 分类讨论思想解初中数学问题的不同情形应用分析[J]. 数理天地(初中版), 2023(19): 22-23.

[5] 杨继梓. 初中数学教学中的分类讨论思想[J]. 陕西教育(教学版), 2011(5): 76.