

基于多元表征的中学数学之椭圆曲线与方程 教学设计

陈裕城¹, 张盛奎²

¹嘉应学院数学学院, 广东 梅州

²梅林镇中心小学, 广东 梅州

收稿日期: 2024年1月25日; 录用日期: 2024年2月22日; 发布日期: 2024年2月29日

摘要

多元表征是数学教育研究的热点, 同时, 椭圆曲线与方程作为高中数学教学的重难点, 相关的研究也很多, 但关于多元表征在椭圆曲线与方程教学中的应用却少有论及。本文以数学多元表征理论为基础, 对椭圆曲线与方程进行教学设计。教学设计从学生学习时认知的心理机制出发, 引导学生逐步精致对椭圆曲线与方程的理解, 最终达到对椭圆曲线与方程的深度理解。

关键词

多元表征, 椭圆曲线, 教学设计

Teaching Design of Elliptic Curves and Equations in High School Mathematics Teaching Based on Multivariate Representation

Yucheng Chen¹, Shengkui Zhang²

¹School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou Guangdong

²Meilin Central Primary School, Meizhou Guangdong

Received: Jan. 25th, 2024; accepted: Feb. 22nd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

Multimodal representation is a hot topic in mathematics education research. At the same time, el-

Elliptic curves and equations are key difficult points in high school mathematics teaching, and there is a lot of research related to them. However, there is little discussion about the application of multimodal representation in the teaching of elliptic curves and equations. This article, based on the theory of mathematical multimodal representation, focuses on the instructional design of elliptic curves and equations. The instructional design starts from the cognitive psychology mechanisms of students' learning, guiding students to gradually develop a refined understanding of elliptic curves and equations, ultimately achieving a deep comprehension of them.

Keywords

Multiple Representations, Elliptical Curves, Teaching Design

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

良好的教学设计可以优化教学过程,提高课堂教学效果。同时,不断改进和完善教学设计也是教师成长与发展的一个重要途径。圆锥曲线一直是高考的重难点,但在实际的课堂教学中,很多学生对圆锥曲线产生不起兴趣,总是机械性地刷题,始终没有把握圆锥曲线与方程的本质属性。因此,合理地设计教学内容和运用教学策略,从而提升学生的学习效率、减少学生的认知障碍、多角度理解并掌握圆锥曲线的本质显得极为重要。将数学多元表征融入椭圆曲线与方程的教学中,能够让学生多角度地揭示椭圆方程的本质,从而提升学习效率。

针对椭圆方程的教学现状,结合高中新课标的课程要求和数学多元表征理论、关注学生的学习现状,对椭圆曲线及方程进行教学设计优化,本文研究的成果如下:

- 1) 数学多元表征理论和数学多元表征理论下的教学原则。
- 2) 基于数学多元表征理论对椭圆曲线与方程进行教学设计。

2. 椭圆曲线与方程教学设计理论基础

2.1. 数学多元表征

2.1.1. 表征

在《辞海》中,“表征”被解释为“事物显露在外的征象、揭示、解释”[1]。从认知心理学的观点出发,Palmer认为表征是“表征”世界与“被表征”世界之间的一种对应关系。而从人工智能的角度来看,Markman则认为表征包括信息和对信息的加工两个方面。

也就是说,表征可以是表征对象的一个替代,作名词含义。也可以是“被表征世界”到“表征世界”的一个对应过程,作动词含义。表征又分为外在表征和内在表征。

2.1.2. 数学表征

数学表征指将表征应用于数学领域。对于数学表征的研究,其理解主要基于认知心理学、教育心理学等领域对于表征的认识。根据Cuoco等学者的观点,表征是学生理解数学结构与一个更易理解的数学结构之间对应关系的过程。

Hiebert等学者将数学表征分为外在表征和内在表征。外在表征通常是指存在于人的头脑之外的言语

化或图形化的符号, 例如书面语言、口语和函数图像等。而内在表征是指存在于个体头脑中而无法直接观察到的心理特征, 包括个体的语言语义、数学情感体验等。

2.1.3. 数学多元表征

数学多元表征指同一数学学习对象可以用本质上不同的叙述性表征和描绘性表征的多种形式来进行表征。这个概念包含两个层面的含义: 首先, 同一个数学学习对象必须具备叙述性和描绘性两种本质不同的表征方式; 其次, 对数学学习对象的表征形式应至少包含叙述性或描绘性中的一种或一种以上的表征形式。可以用如图 1 用来总结数学多元表征的具体含义, 每个象限中的箭头方向表示表征的抽象水平逐渐增加。

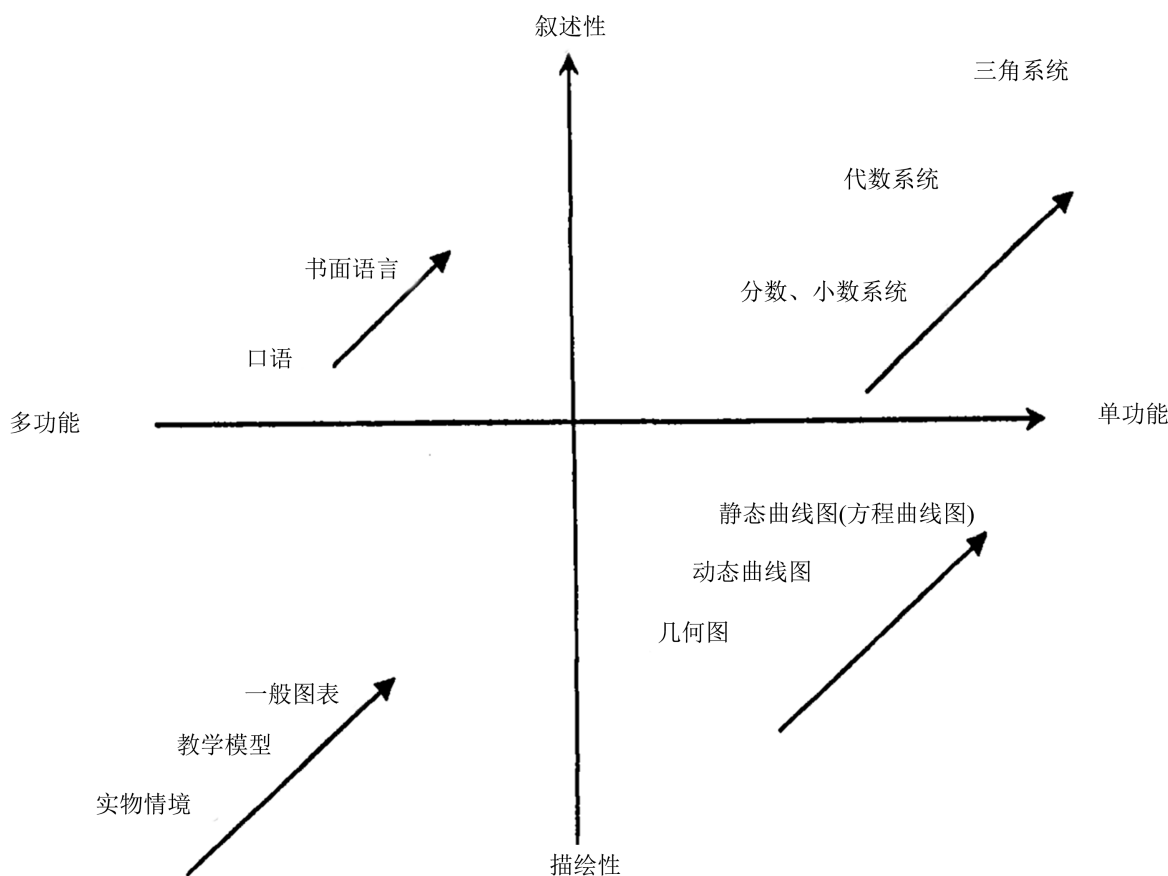


Figure 1. Mathematical multivariate representation [2]

图 1. 数学多元表征[2]

2.2. 数学多元表征的认知模型

为了研究人脑是如何对数学多元表征信息进行加工、提取和储存的, 唐剑岚[2]构建了数学多元表征学习的认知模型, 如图 2 所示。该模型主要反映了大脑对数学多元表征信息进行提取、加工(自身转换、参照转译、精致)和储存的五种认知过程, 以及数学多元表征学习过程生成的编码及其特征。

这五种认知过程包括: 建构浅层心象码的过程、建构深层心象码的过程、建构浅层言语码的过程、建构深层言语码的过程以及建构整合码的过程。数学多元表征学习的认知模型揭示了数学多元表征学习的认知机制, 为优化数学多元表征学习的教学设计提供了理论支持。

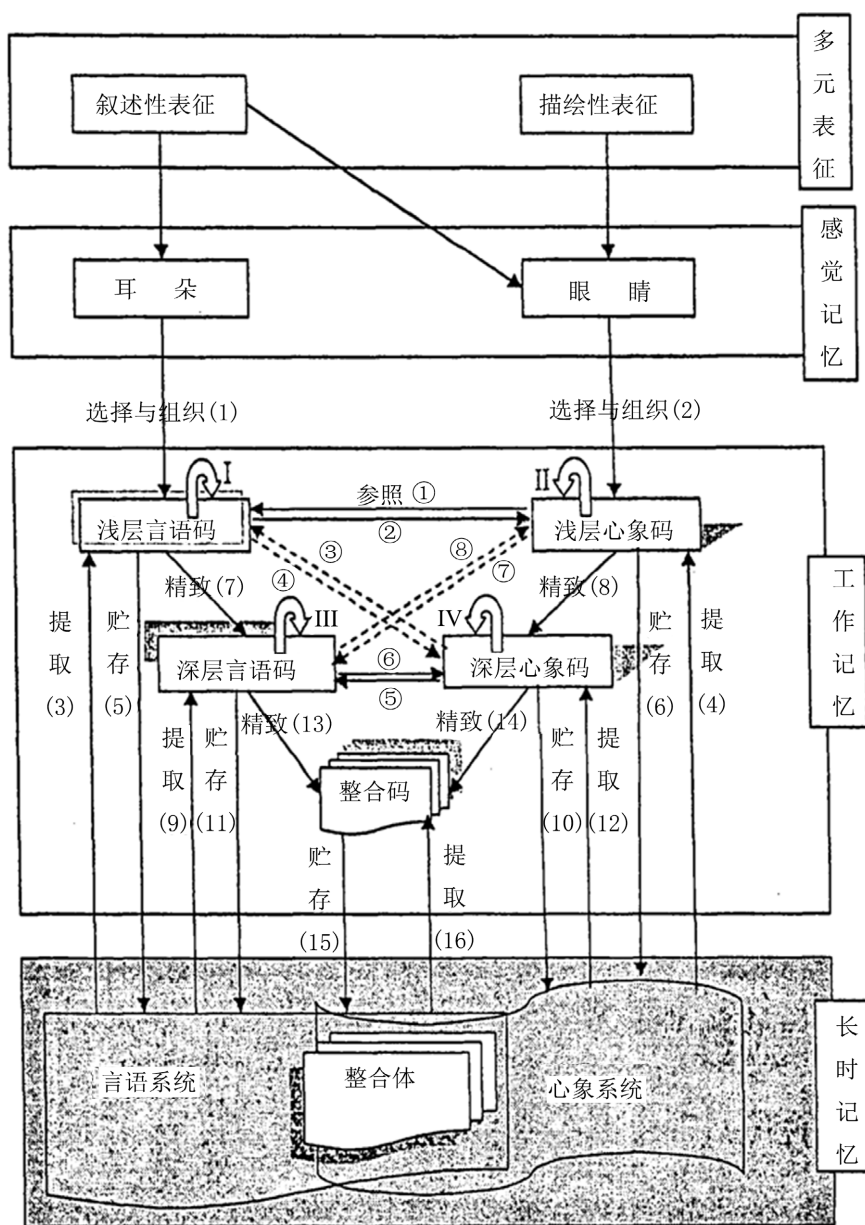


Figure 2. The cognitive model of mathematical multivariate representation learning [2]
 图 2. 数学多元表征学习的认知模型[2]

2.2.1. 数学多元表征学习认知模型的内涵

数学多元表征学习的认知系统包括工作记忆系统和长时记忆系统。两种本质不同的表征信息分别通过耳朵和眼睛进入感觉记忆, 其中耳朵只能接收叙述性表征, 而眼睛则能接受叙述性表征和描绘性表征。表征信息经过选择与组织, 只有少部分能够进入工作记忆系统。

工作记忆系统对多元表征信息进行认知加工, 包括选择与组织、搜索与提取、自身转换与参照转译、精致等, 将信息加工成言语码(包括浅层言语码和深层言语码)和心象码(包括浅层心象码和深层心象码), 深层言语码和深层心象码再通过精致形成整合码。选择与组织搜索与提取属于基本操作, 自身转换与参照转译、精致是高级操作, 高级操作比基本操作更难发生。

浅层言语码、浅层心象码、深层言语码、深层心象码以及整合码最终都会贮存在长时记忆系统中。长时记忆系统不仅贮存加工过后的信息,还会利用类比结构对应原理和符号语义分析原理提供与加工信息相关的编码或相关的知识经验参与到工作记忆系统的信息加工中。

2.2.2. 数学多元表征学习的认知特征

• 渐进性与累积性

从基础的浅层码到更精致的深层码再到最终的整合码的建构过程是有序递进的,需要先建构浅层码,才能在其基础上逐步建构深层码和整合码。此外,高级编码的建构也不是一蹴而就的,需要经过反复建构逐步积累,才能建构形成更加高级别的编码形态。

• 主动性与引发性

多元表征信息不是自动进入大脑中的,需要工作记忆系统主动地进行认知操作。工作记忆系统的操作包括主动进行选择和组织相关的叙述性和描绘性信息、以及提取长时记忆中的相关信息。浅层言语码和浅层心象码也要进行主动的精致、转译和转换等操作才能形成深层言语码、深层心象码和整合码。这些操作都具有主动建构性。

虽然多元表征学习中的高级认知操作(自身转换、参照转译、精致)不能自动发生或微弱发生,但只要外在环境提供有意识的导向和支架,这些操作仍能主动发生。

2.2.3. 工作记忆系统的特征

工作记忆系统是人脑对信息进行编码、贮存、操作等心理活动的系统。工作记忆系统有以下几个重要特征。

1) 工作记忆系统是“瓶颈”结构,一方面,工作记忆系统能够加工的新信息非常有限,一般只能加工 2~3 个组块单元的新信息;另一方面,工作记忆系统在没有复述的情况下对信息只保持 15~30 秒[3]。

2) 数学认知的工作记忆系统分为视觉工作记忆系统和听觉工作记忆系统两个子工作系统,它们分别主要由大脑右半球和大脑左半球参与,可以独立加工各自的信息。

3) 工作记忆系统进行认知操作是需要消耗认知资源和能量的,它们由工作记忆系统中的中央执行进行分配。

4) 工作记忆系统加工信息时优先对有意义的信息和具有较强情感的信息进行加工。

3. 优化数学学习对象中多元表征信息的教学设计原则

3.1. 优化多元表征信息结构的原则

3.1.1. 信息打包原则

信息打包原则指在设计教学内容时,尽量将数学多元表征信息进行“信息打包”设计。其包含两层含义,一是设计的教学内容要含有两类本质不同表征的多种形式;二是设计的教学内容信息是有意义的,即要与长时记忆系统中的编码内在联系。

在设计教学内容时,既要设计多元表征信息为学生发生深度意义的学习过程提供良好条件,又要激活长时记忆系统中与多元表征信息有内在联系的编码来降低学生同时处理的信息所需要的资源和能量。信息打包的策略主要有:部分任务策略、整体任务策略、变异任务设计策略和嵌入支架设计策略[4]。

整体任务策略是指在呈现教学内容时先呈现整体任务的核心,然后对这个核心概念从垂直和水平两个维度逐级加工。随着每一次精细加工,呈现的数学学习对象信息就越来越具体,越精致,直至学习任务达到学生可以理解的程度。

嵌入支架设计策略是指在设计学习任务时嵌入支架辅助学生的工作记忆系统进行认知操作,以帮助

学生能够更轻松的理解学习内容。

这些支架可以是文字、图片、示例等形式, 能够提供额外的信息, 引导学生进行正确的思考和行动。通过使用嵌入支架设计策略, 学生可以更快地掌握学习内容, 并在实践中更有效地应用所学知识。此外, 嵌入支架设计策略还可以帮助学生更好地理解任务的目标和要求, 从而增强学习动机和兴趣。

3.1.2. 空间临近原则

“空间临近原则”指在呈现数学学习对象的叙述性表征和描绘性表征时, 应该尽可能让它们在空间上相邻或组合呈现, 而不是远离或分离呈现[5]。

由数学多元表征的认知模型可知, 表征同一数学对象的言语性表征和视觉性表征经过简单认知操作形成浅层言语码和浅层心象码, 工作记忆系统能够同时保持浅层言语码和浅层心象码, 浅层言语码和浅层心象码之间可以进行相互参照, 有利于工作记忆系统继续进行相互转译、自身转换、精致等高级操作。

如果表征同一数学对象的叙述性表征和描绘性表征彼此远离, 工作记忆系统就无法在两类表征之间进行相互参照、转译等深层加工, 必须花费额外的资源或能量去搜索远离的信息这样额外的操作, 从而导致更少的资源或能量继续进行转译、精致等认知操作。因此, 我们应当尽可能将这些表征呈现在空间上相邻或组合呈现, 以提高学习效率。

3.1.3. 时间临近原则

时间临近是指在信息打包时, 尽量将需要呈现的数学学习对象的叙述性表征和描绘性表征同步呈现, 而非间断呈现[5]。

根据数学多元表征的认知模型, 表征同一数学对象的叙述性表征和言语性表征经过简单认知操作形成浅层言语码和浅层心象码, 工作记忆系统能够同时保持浅层言语码和浅层心象码, 浅层言语码和浅层心象码之间可以进行相互参照, 有利于工作记忆系统继续进行相互转译、自身转换、精致等高级操作。

对于表征同一数学对象的叙述性表征和言语性表征, 若它们呈现在空间上相距较远, 学习者就必须投入更多的资源或能量去寻找远离的信息。这些额外的操作会分散学习者的资源或能量, 从而导致在进行转译、精致等认知操作时可用的资源或能量变少。因此, 我们应当尽可能将这些表征在时间上同步呈现, 以提高学习效率。

3.1.4. 一致性原则

一致性原则指在信息打包时, 应尽可能使多元表征的信息结构与被表征的数学对象的结构成分相一致, 并且去除与数学对象结构成分不一致的无关信息, 从而保持多元表征信息结构的简洁性[6]。

否则, 这些无关信息会干扰学生对学习对象的深入加工, 分散学生的注意力, 并且会与工作记忆系统的认知资源或能量竞争, 导致工作记忆系统无法充分投入到学习对象的认知操作中。此外, 这些无关信息还可能误导学生偏离加工学习对象的活动。

在数学教学内容的设计中, 经常会添加一些与教学内容无关的信息, 典型的例子是在教学内容中加入一些有趣的元素, 例如动画、图片、花边材料、背景音乐等。虽然这些元素可以增加教学的趣味性, 但是如果它们与数学学习对象无关, 就会对学习过程造成干扰和损害。因此, 需要剔除这些无关的信息, 以确保教学内容的有效性和教学效果。

3.1.5. 双通道原则

双通道原则指的是在信息打包时, 尽量让“信息包”同时包含视觉表征和听觉表征, 而非仅包含视觉表征或听觉表征[7]。

根据数学多元表征认知模型, 工作记忆系统的视觉工作记忆系统和听觉工作记忆系统分别由大脑左

半球和大脑右半球参与, 视觉表征 + 听觉表征形式的信息被分担加工。

利用双通道进行加工可以避免视觉工作记忆系统和听觉工作记忆系统过度负荷, 从而难以继续深入加工, 也能充分利用视觉工作记忆系统和听觉工作记忆系统, 为学生继续进行深度意义的学习提供机会。

双通道原则要求在设计学习材料时, 尽量保持学习材料的精简, 如将抽象性的言语材料视觉化, 具体性的言语材料听觉化, 可以使内容更精简。特别是具体的操作步骤等言语表征的材料, 可以用图示、表格、树状图等视觉化的表征形式精简的表示出来, 再配合老师的“说”来进一步解释, 而不是给学生一大段文字让学生自己看或只说没有图。

3.2. 提高教学策略水平的原则

3.2.1. 策略认知原则

策略认知原则指在设计数学教学活动时, 有意识地促进并养成学生积极加工的策略思维。这些策略能提高学生的学习效果和自我学习能力。在设计数学教学活动时, 要有效地促进和引导学生进行策略加工, 从而更好地实现数学教学的目标[8]。

由数学多元表征认知模型, 学生的认知操作活动是主动建构的过程, 对于高级编码的建构, 学生缺乏寻求更深度意义的经验和技巧, 也缺乏这方面的意识。所以需要教师提供数学多元表征学习环境促进与支架学生进行有策略地积极加工。策略认知原则包括促进或增强学生的选择与组织、转换与转译、精致、提取和元认知活动等认知操作。

(一) 促进或增强选择性注意

当学生接受外部信息时, 只有小部分信息能够进入他们的大脑, 因此需要集中注意力于与任务相关的信息并忽略无关的信息。

传统上, 人们会使用标记技术(如下划线、更改字体颜色和大小等)来标记多元表征信息的重点、难点和关键点, 以便学生能够快速找到需要选择的信息。这种标记可以减少工作记忆系统资源的消耗, 从而使更多的资源用于其他高级认知操作。除标记之外, 教师还可以使用类比、明喻、隐喻等方法, 将新内容与已知知识联系起来, 或创造与现实有关的情境来引导学生进行选择选择性注意。

(二) 促进或增强组织

为了促进或增强组织操作, 需要让学生学会将新信息之间、新旧信息之间的内在联系按照一定规律进行整理、归类等组成各种编码或编码系统。这有助于提高工作记忆系统的容量和效率, 并且能够使学生更加有效地理解和记忆学习内容。

为了实现这一点, 教师可以运用各种策略, 例如利用分级归纳、构建概念图、制作思维导图等, 以帮助学生更好地理解和组织新的学习内容。同时, 教师也可以引导学生将学习内容和已有知识进行联系和比较, 以加深学生对知识结构的理解和记忆。如果教师在教学中不关注组织, 学生确实能学到不少知识, 却不知道这些知识之间的内在联系, 结果那些支离破碎的知识或经验反倒在学习中起到反作用, 甚至阻碍学生进行更高级的认知操作, 从而阻碍学生进行深度意义的学习。

(三) 促进或增强转换和转译能力

转换和转译是工作记忆系统将数学多元表征信息精致为整合码所必须的认知操作, 包含言语码和心象码之间的相互参照、相互转译、相互检验和修正等活动。虽然转换和转译对形成整合码至关重要, 但高级的转换和转译并不容易实现, 需要有较高水平的教学策略来支持。

在数学多元表征学习中, 可以从以下几个方面入手: 运用变形、数形结合和可视化技术。运用变形和数形结合是教学中常见的策略。可视化技术则是指利用图形、动画、动态数学技术等可视化的表征形式来表示抽象的数学概念、方法和结构关系等, 帮助学生理解和转译多元表征信息。

(四) 促进或增强精致

精致是工作记忆系统对于浅层码添加深层意义的过程, 是形成整合码所必需的认知操作。

在教学中, 学生对多元表征的认知操作仅流于形式, 表面上学生活动很活跃, 实际上缺乏深度的思考, 例如: 为什么要如此操作? 怎么操作更有效? 有什么规律等? 教学中可以有意识地设计启发式提问、暗示、提示语、质疑、类比、归纳等促进学生有意识地进行精致活动。

(五) 促进或增强提取

提取是指工作记忆系统, 检索(图像根据类比结构对应原理, 文字根据符号语义分析原理)并激活长时记忆系统中的相关信息, 参与到认知加工过程中。工作记忆系统从长时记忆系统中提取需要的信息取决于长时记忆系统中可用的信息和已有的线索。

在教学中, 教师可以运用类比、暗示、提示、猜想等策略引导学生提取长时记忆系统中可用的信息。

(六) 促进和增强元认知活动

工作记忆系统有一个控制认知过程与分配认知资源或能量的中央执行系统。

在数学多元表征教学中, 教师可以有意识的运用元认知提示与发问(例如: 你有什么发现? 你能提出什么问题等?)来促进和增强学生的元认知活动。

3.2.2. 积极情愿原则

积极情愿原则是指在课堂教学活动时, 创设能够增强学生积极的情意投入的学习环境。积极的情感力量可以拓展工作记忆系统承受认知负荷的最近发展区。正所谓: “知之者不如好之者, 好之者不如乐之者”。学生有了积极的情意投入, 即使进行了大量的认知操作也不会感到心理负荷。

促进和增强学生的情意投入可以从两方面入手: 一是尽量营造一个让学生感到轻松愉快、低威胁, 高挑战的学习环境。二是尽量让学生运用数学美、感受数学美。

3.2.3. 主动行为原则

促进和增强学生积极主动的行为参与, 主要包括促进和加强“写”和“说”两个方面。学生行为的主动参与有利于学生的记忆和进行更深入的思考[9]。

在数学课堂教学中, 促进学生“写数学”的方法有: 教师可以有意留出关键词, 让学生填写, 或者让学生动手画图、构建概念图、记笔记、演算等。促进学生说“数学”可以让学生看图说话、回答问题、互相讨论等。有句谚语说: “学习一些东西的最好方法就是去教”, 教师也可以让学生互相施教。

4. 椭圆曲线与方程教学设计

4.1. 学习者特征分析

进行教学设计的最根本目的是提高学生的学习效率。学生是学习活动的主体, 他们的知识基础和情感态度等特征会对学习过程产生一定的影响, 因此, 教学设计需要与学生的特征相匹配。在进行教学设计之前, 我们需要对学生的起点水平和心理特征进行全面的分析, 以便确保教学设计与学生的特征相匹配。

(一) 学生的起点水平及启示

椭圆曲线方程的本质是满足在笛卡尔直角坐标系上组成椭圆曲线的所有点所对应的所有有序数对集, 而推导椭圆曲线方程的过程与直线方程和圆方程推导过程相类似, 且直线与圆的方程刚学习不久, 可以由此引导学生进行类比推导。

方程的性质、化简、计算等都是早已学习过的内容, 教师可设置适当的“支架”引导学生完成相关知识的建构。

(二) 学生的心理特征分析

根据皮亚杰的认知发展阶段论, 高二的学生已经到达了形式运算阶段。他们不仅能够进行假设演绎思维, 还能够进行所有科学技术所需的基本运算。教师只要呈现出足够的条件和适当设置“支架”进行引导, 学生便能完成学习任务。

高二学生处于接受新知识的紧张期, 需要记忆和学习的内容非常多, 学生在课后复习总结和巩固练习的时间不多, 要求教师在课堂教学的内容要精致, 紧凑且简洁, 同时要总结与巩固练习。

4.2. 教学内容分析

教学内容指为实现教学目标而要求学生系统学习的知识、技能和行为规范的总和。教师需要对教学内容进行透彻详细的分析, 以规定教学内容的范围和深度, 并揭示教学内容各组成部分的联系, 以解决教师“教什么”和学生“学什么”的问题。在此过程中, 我们从课程标准和教材两个方面对教学内容进行分析。

教材分析

1) 椭圆曲线与方程是人教 A 版普通高中教科书数学选择性必修第一册第三章第一节的内容, 分为椭圆及其标准方程和椭圆的简单几何性质。椭圆方程的推导过程与上节内容圆的方程的推导过程相类似, 可以引导学生利用类比思想进行推导建立椭圆方程。

2) 教学重难点: 本部分内容的重点是椭圆曲线与方程的推导过程以及椭圆曲线的离心率, 教学难点是椭圆曲线与方程的推导过程以及椭圆曲线的离心率。

4.3. 教学过程设计

4.3.1. 教学环节一: 引入椭圆

(一) 教学过程

师: 教师出示一个装有水的透明水杯, 教师: “同学们拿出自己的圆柱形杯子, 观察水平面是什么图形? 然后将水杯稍微倾斜, 再观察一下, 现在水平面是什么图形?”

学生拿出水杯观察水平面的图形。

生: “是圆, 倾斜以后变成了椭圆。”

师: “圆是怎么变成椭圆的?” (引导学生说出类似: 垂直长度没变, 水平长度变长了)并用几何画板展示教学模型。师: “图形由绿色的圆变成红色的椭圆。”如图 3。

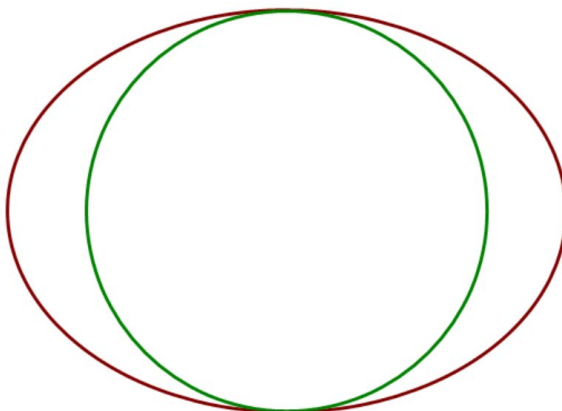


Figure 3. The teaching model of circles and ellipses

图 3. 圆和椭圆的教学模型

生: “圆的垂直长度不变, 将圆水平拉长。”(学生在头脑中形成了椭圆的初步概念。)

师: “我们本节的内容就是一起探究椭圆这个图形。”

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

a) 从水杯中的水平面这种最常见的实物情境表征出发, 引导学生在头脑中形成椭圆的数学模型, 并通过提问让学生口头描述椭圆的特征。促进学生实物表征、图形表征、言语表征之间的转换和转译。

b) 教学内容符合优化多元表征信息结构的五种原则, 本教学专题采用了信息打包策略中的整体任务策略和嵌入支架设计策略。① 教学开头直接说明“探究椭圆”这个核心, 然后逐级引出椭圆的定义、方程、焦点、顶点、长轴、短轴、离心率等。② 在对椭圆进行探究时, 经常嵌入一些动态图、图形、提问等支架辅助学生更轻松地理理解学习内容。

2) 教学策略的应用。

利用生活中常见的实物模型引出椭圆, 引起学生的兴趣, 激发学生求知的欲望, 符合多元表征教学的积极情愿原则。

4.3.2. 教学环节二: 椭圆的定义

(一) 教学过程

师: “我们是如何定义圆的? 决定圆的形状和位置的因素有哪些? 我们用什么工具画圆?”

生: “圆的定义: 到定点的距离等于某定长的所有点组成。圆决定因素: 圆的大小和定长有关, 圆的位置由圆心决定。圆规可以画圆。”

师: “圆规是根据圆的定义做出来的。老师这里有画椭圆的工具, 你们能否根据画图原理, 推出椭圆的定义呢?” 教师先示范画出一个椭圆, 边讲解边画椭圆: “先将两个磁铁固定在黑板上, 套上粉笔, 拉紧绳子, 移动粉笔, 这里我们可以改变两磁铁的距离和绳子的长度。”

生: 学生认真观察老师画椭圆。

师: 教师让 4 个同学分别在最左侧黑板画 4 个椭圆(第 1 个两磁铁距离为 25 厘米, 绳长为 30 厘米; 第 2 个两磁铁距离为 50 厘米, 绳长为 60 厘米; 第 3 个两磁铁距离为 25 厘米, 绳长为 50 厘米; 第 4 个两磁铁距离为 30 厘米, 绳长为 60 厘米)。

生: 4 名学生按照老师的要求在黑板上画出对应的椭圆, 其他同学观看 4 名同学画出椭圆并思考老师提出的问题。

师: “你们能根据画椭圆的过程分析出椭圆的定义吗? 决定椭圆的形状和位置的因素有哪些?”

生: “椭圆定义到两定点的距离之和等于某定长的所有点组成椭圆。决定因素跟椭圆的形状和两定点(两个钉子)距离以及定长(绳长)有关。椭圆的位置由两定点决定。”

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

a) 利用数学原理和现实操作的对应关系(圆的定义与圆规画圆、椭圆的定义与利用教具画出椭圆), 创造条件让学生推导椭圆的定义。符合一致性原则。

b) 让学生观察操作的同时让学生动手操作和开口说出椭圆的定义, 促进学生动作表征、图形表征和言语表征之间的转换和转译。

2) 教学策略的应用

a) 利用圆引导椭圆, 圆和椭圆不但在定义和外形上相似, 符合工作记忆系统对长时记忆系统进行提取的类比结构对应原理, 而且在方程的推导上也基本相同, 符合工作记忆系统对长时记忆系统进行提取的符号语义分析原理。符合策略认知原则中的促进和增强提取。

b) 学生“画椭圆”，“说椭圆”，能够增强学生对椭圆定义的记忆，促进对椭圆的精致，加深对椭圆的理解，符合主动行为原则。

4.3.3. 教学环节三：椭圆的方程

(一) 教学过程

师：“我想在平面上表示一个圆，不需要直接画出图形，我只需要给出一个圆的方程，你们就能知道圆的具体形状和位置。这是通过什么实现的？”

生：“几何图形的代数化。”

师：“回想圆方程的推导过程，图形的代数化需要经历哪些步骤？”

生：“1) 建立平面直角坐标系；2) 用字母表示未知条件；3) 根据定义表示出图形上所有点的集合；4) 根据定义列方程；5) 化简方程(即对应几何图的方程)。”

师：教师引导学生说出具体的操作步骤，然后按照步骤在几何画板上画椭圆，几何画板投屏在中间，教师边操作几何画板边在黑板右侧用文字写出具体步骤。

生：学生跟着老师的节奏，同步在草稿纸上写出具体步骤。具体如下：

1) 建立直角坐标系，如图 4。

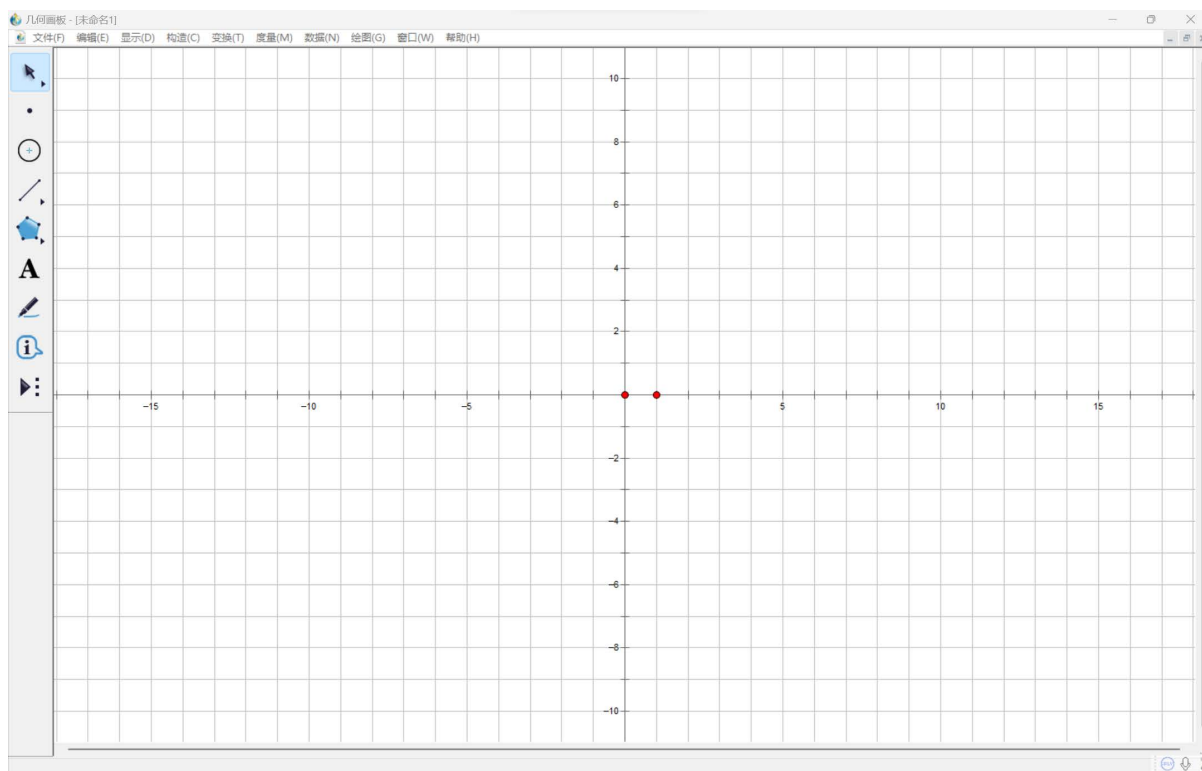


Figure 4. Establishing a cartesian coordinate system on a geometric drawing board

图 4. 在几何画板上建立直角坐标系

2) 用字母表示未知条件，如图 5、图 6。

设两个定点(焦点) $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$

椭圆上的点 $M(x, y)$

两定点的距离(焦距) $|F_1F_2| = 2c$

定长(绳长) $|MF_1| + |MF_2| = 2a$

如图 5 和图 6。

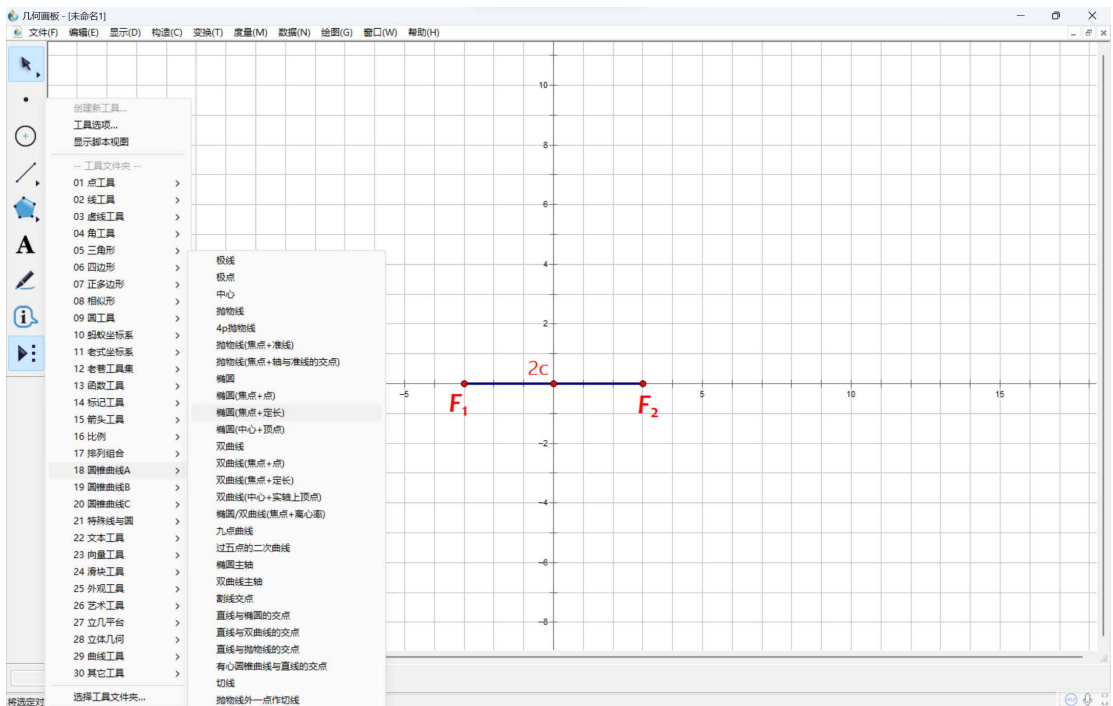


Figure 5. Drawing an ellipse using geometric drawing board tools

图 5. 利用几何画板工具画椭圆

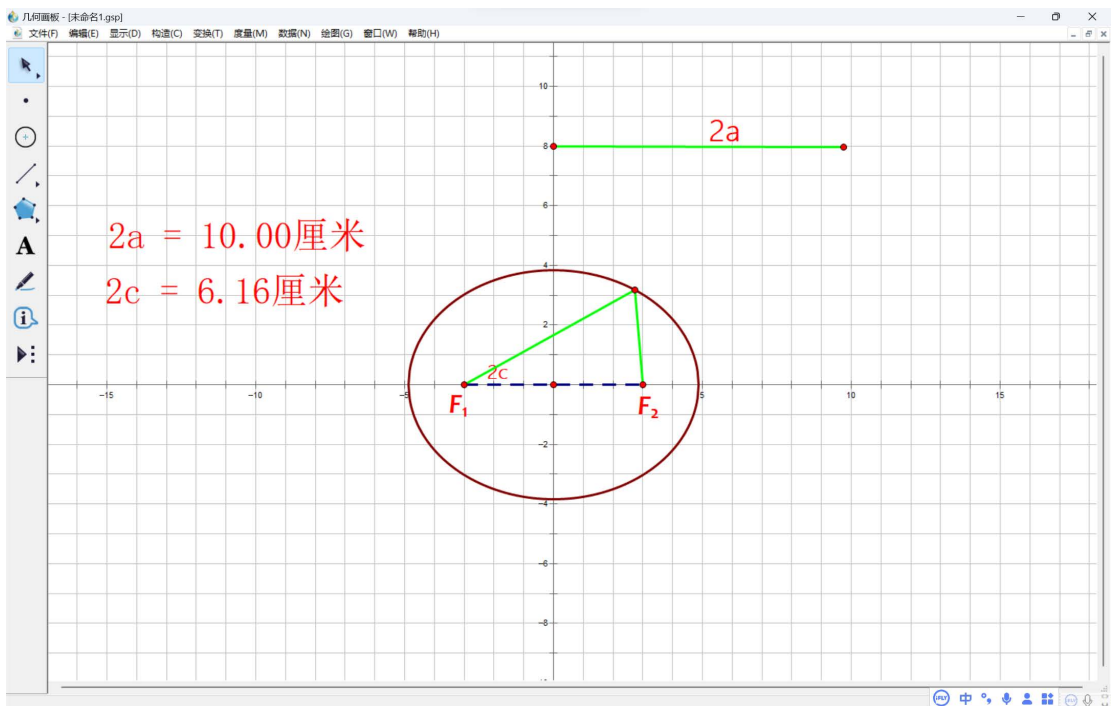


Figure 6. Given $F_1, F_2, M, 2a, 2c$ in geometric drawing board

图 6. 在几何画板上给定 $F_1, F_2, M, 2a, 2c$

3) 根据定义表示出图形上所有点的集合

椭圆上点的集合 $P = \{M \mid |MF_1| + |MF_2| = 2a\}$

4) 根据定义列方程。

因为

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

5) 化简方程

移项, 得

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

方程两边平方, 得

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

整理, 得

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

方程两边平方, 得

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

整理, 得

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

方程两边同除以, 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

有椭圆的定义可知, $2a > 2c > 0$, 即 $a > c > 0$, 所以 $a^2 - c^2 > 0$ 。[10]

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

a) 教师利用动态技术呈现椭圆代数化的过程并同步在右侧黑板写出具体过程, 符合教学设计的空间邻近原则和时间临近原则。

b) 通过动态图像表征、文字表征、言语表征更清晰地呈现椭圆图形代数化的过程, 促进三种表征之间的自身转换和相互转译, 让学生对椭圆代数化过程有更直观更清晰的认识。

2) 教学策略的应用

a) 利用圆的代数化引出椭圆的代数化, 促进学生对代数化思想的提取; 学生参与具体操作和代数计算, 促进学生对椭圆方程的精致。符合策略认知原则。

b) 利用几何画板作动态操作图并在黑板上写出关键步骤, 这让抽象的几何代数化步骤可视化、繁琐的具体步骤言语化并精简成关键文字写在黑板显眼地方。符合双通道原则和增强转换和转译的策略认知原则。

c) 学生参与椭圆方程的计算, “写数学”, 增强学生对椭圆的理解, 促进学生对椭圆的精致, 符合主动行为原则。

4.3.4. 教学环节四: 椭圆中的线段 a 、 b 、 c

(一) 教学过程

师: “当我们把 M 点移到 y 轴上时, 你能找出 a 、 c 和 $\sqrt{a^2 - c^2}$ 吗?” 教师同时在几何画板上将 M 点移动到 y 轴上。如图 7。

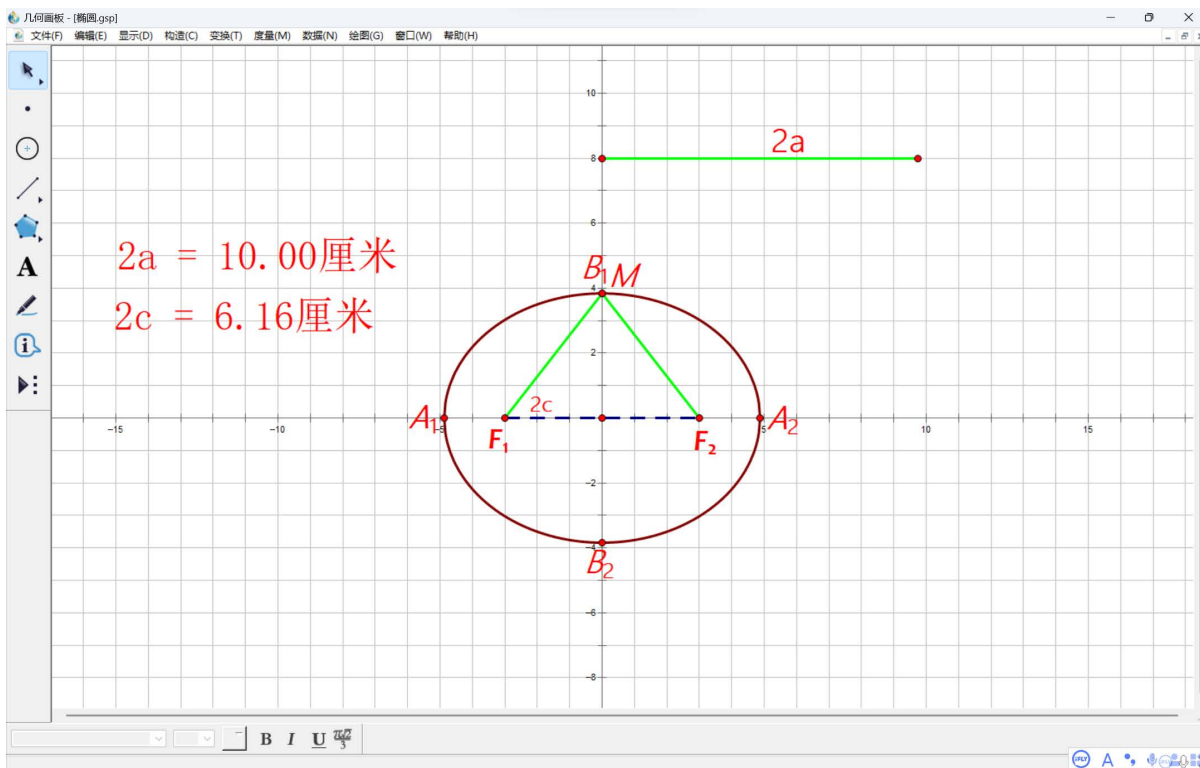


Figure 7. Moving M to y axis and giving 4 points

图 7. 将 M 点移到 y 轴上并设出 4 个顶点

生: “ $|MF_1| = |MF_2| = a$, $|OF_1| = |OF_2| = c$, $|OM| = \sqrt{a^2 - c^2}$ 。”

师: “我再设椭圆与 x 轴和 y 轴的 4 个交点分别为 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 , 他们叫作椭圆的顶点。” 教师同时在几何画板上点出 4 个点。如图 7。

师: “你们能算出 $|OA_1|$ 或 $|OA_2|$ 的长度吗? 怎么算?” (引导学生将 M 点移到点 A_1 或 A_2 , 如图 8)

生: “将点 M 移到 A_2 (如图 8), 我们有 $|MF_1| + |MF_2| = 2c + |F_2A_2| + |F_2A_2| = 2a$, $|F_2A_2| = a - c$, $|OA_1| = a - c + c = a$, 同理 $|OA_2| = a$ 。”

师: “为了方便和简洁, 我们令 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, 那我们的椭圆方程就可以表示为? a 、 b 、 c 在图形上表示哪些线段?”

生: “椭圆方程可以表示为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $|OA_1| = |OA_2| = |B_1F_1| = |B_1F_2| = |B_2F_1| = |B_2F_2| = a$, $|OB_1| = |OB_2| = b$, $|OF_1| = |OF_2| = c$ ”

师: “我们把 $|A_1A_2|$ 叫作长轴, $|B_1B_2|$ 叫作短轴, $|OA_1|$ 或 $|OA_2|$ 叫作长半轴, $|OB_1|$ 或 $|OB_2|$ 叫作短半轴。”

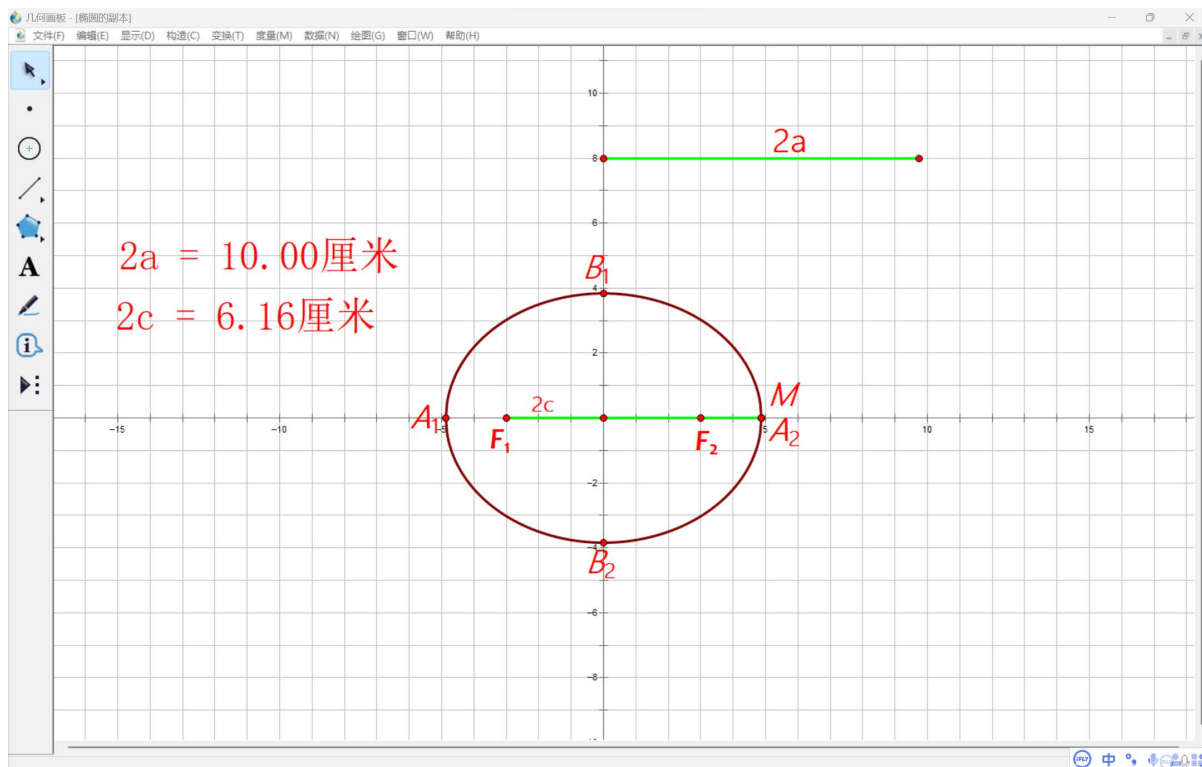


Figure 8. Moving M to a vertex A_2
图 8. 将 M 点移到顶点 A_2 上

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

在黑板中呈现方程中的数值 a 、 b 、 c ，同时在几何画板上同步同框呈现椭圆曲线中的线段 a 、 b 、 c ，促进学生言语码和心象码的自身转换和相互转译。内容的呈现符合优化数学多元表征信息的五项原则。

2) 教学策略的应用

a) 通过几何画板继续探究椭圆方程的特征，利用动态技术，促进和增强学生对椭圆方程和图像浅层编码的精致，促进学生对椭圆曲线和方程更深度理解。符合策略认知原则。

b) 令 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ，使椭圆方程更精致，将 M 点移动至特殊位置时，方程中的 a 、 b 、 c 数值对应椭圆曲线 a 、 b 、 c 线段的长度，尽量让学生运用数学美、感受数学美，符合积极情愿原则。

4.3.5. 教学环节五：椭圆的离心率

(一) 教学过程

师：“椭圆有扁的也有没那么扁的，那我们用什么表示一个椭圆的圆扁程度呢？我们观察刚开始 4 位同学画的 4 个椭圆。”

师：“是两定点的距离决定椭圆的圆扁吗？”

生：“不是，1 号椭圆(两定点距离 25 厘米，绳长 30 厘米)和 3 号椭圆(两定点距离 25 厘米，绳长 50 厘米)两定点的距离相等，但 1 号更扁一些。”

师：“那是绳子的长度决定椭圆的圆扁吗？”

生：“不是，2 号椭圆(两定点距离 50 厘米，绳长 60 厘米)和 4 号椭圆(两定点距离 30 厘米，绳长 50 厘米)绳长一样长，但 2 号椭圆更扁一些。”

师：“那你们有什么发现吗？”

生：“1号和2号椭圆一样扁，3号和4号椭圆一样扁。”

生：“1号和2号椭圆两定点的距离和绳长的比相等，3号和4号椭圆两定点的距离和绳长的比相等。”

师：“所以？”

生：“椭圆的圆扁程度是由两定点的距离和绳长的比来决定的。”

师：“我们把两定点的距离比上绳长，即 $\frac{c}{a}$ 叫做椭圆的离心率。观察图形，当我不改变 c 的大小，逐渐减小 a 的大小时，越来越接近 c ，椭圆的离心率 e 也越来越接近1，同时点 A_1 和点 A_2 是逐渐接近点 F_1 和点 F_2 的，椭圆变得越来越扁。”老师同时在几何画板上进行操作，改变椭圆的离心率，如图9。

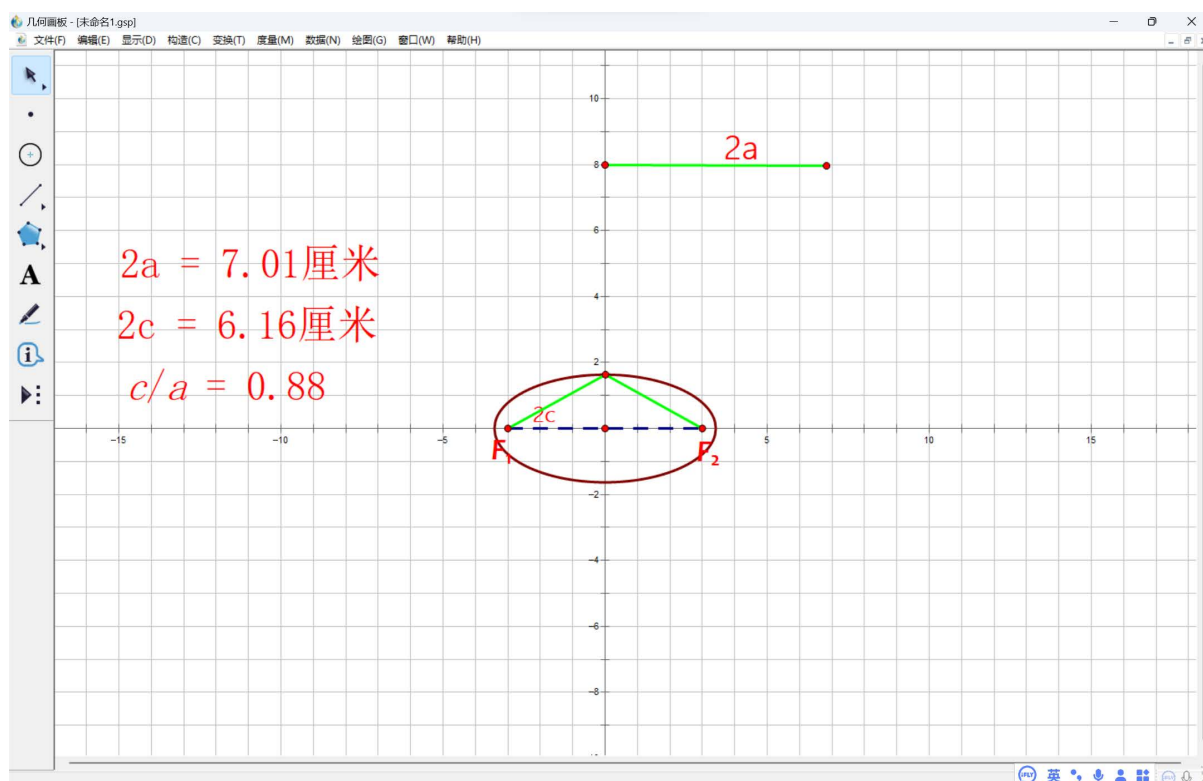


Figure 9. Performing dynamic operations on a geometric drawing board

图9. 在几何画板上进行动态操作

学生观察动态图，并在头脑中形成对应的深层心象码。

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

a) 学生对比在探究椭圆的定义时画好的椭圆探究决定椭圆圆扁程度的因素，符合一致性原则。

b) 黑板上四个椭圆图形和数值以及几何画板上的动态图形和动态数值在时间上同步呈现，在空间上临近出现，促进学生对椭圆离心率的言语码和心象码之间的自身转换和相互转译，加深学生对椭圆离心率的理解。

2) 教学策略的应用

教师通过启发式提问引导学生对比之前画好的图形表征探究决定椭圆圆扁程度的因素，促进学生对椭圆曲线与方程言语码或心象码的精致，符合数学多元表征的策略认知原则。

4.3.6. 教学环节六：完成思维导图

(一) 教学过程

师：“同学们最后完成下面的思维导图，如图 10，并在思维导图周围填充自己对椭圆曲线与方程的理解，做好最后的总结。”

根据自己的理解做一个椭圆曲线与方程的知识思维导图

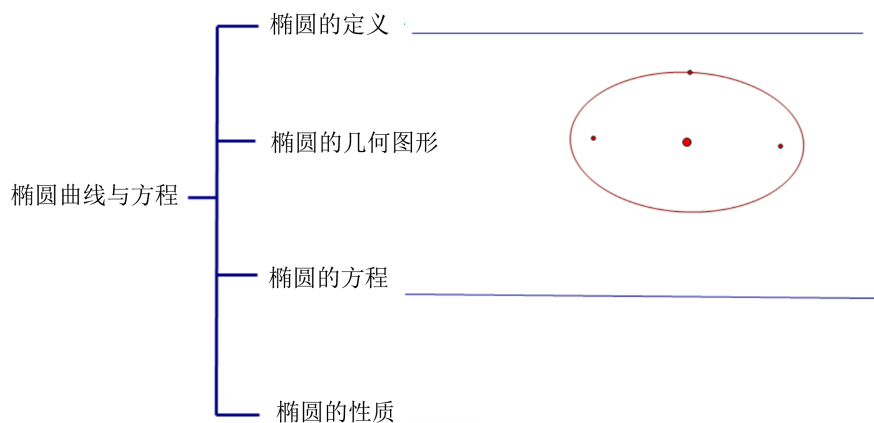


Figure 10. The flowchart of the proposed teaching design
图 10. 本文提出的教学设计的思维导图

生：学生认真完成构建自己的思维导图并总结课程内容。

(二) 设计说明

1) 教学内容的呈现

学生通过对思维导图的填充，巩固对椭圆曲线与方程的知识点的记忆。

2) 教学策略的应用

a) 学生通过完成思维导图，促进学生工作记忆系统对言语码和心象码进行精致操作，促进整合码的形成，同时程序性地对椭圆曲线与方程的认知过程进行回顾，促进或增强精致、元认知活动，符合策略认知原则。

b) 让学生动手“写数学”，主动思考，增强对椭圆曲线与方程的思维导图记忆和理解，符合主动行为原则。

5. 结语

研究基于唐剑岚提出的优化多元表征学习的相关教学策略和原则对人教 A 版普通高中教科书数学选择性必修第一册教材中椭圆曲线与方程的内容进行了教学设计，形成具体教案。这里只从理论层面进行了论述，并未从实际教学层面提供相应的数据参考，建议有兴趣的研究者能做进一步的研究与量化分析。

基金项目

嘉应学院科研项目(2022KJY16)，广东省教育厅项目(2023KTSCX139)，广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“高等数学课程教研室”(粤教高函[2023]4号)，嘉应学院本科教学质量与教学改革工程建设项目“高等数学课程教研室”(嘉院教[2022]28号)。

参考文献

- [1] 辞海最新版[M]. 上海: 上海辞书出版社, 2001.
- [2] 唐剑岚. 数学多元表征学习的认知模型及教学研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2008.
- [3] 曹雪亮. 脑力疲劳的注意特征及主观评定方法的实验研究[D]: [博士学位论文]. 西安: 中国人民解放军第四军医大学, 2003.
- [4] 唐剑岚, 周莹. 认知负荷理论及其研究的进展与思考[J]. 广西师范大学学报(哲学社会科学版), 2008, 44(2): 75-83.
- [5] 黄永幸. 高中数学解题类微课的优化策略及实践研究[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2022.
- [6] 张勇成. 核心素养视域下数学长程教学的内涵、设计与实施[J]. 教学与管理, 2023(14): 36-39.
- [7] 周珊珊. 基于多元表征理论的函数性质单元教学研究[D]: [硕士学位论文]. : 曲阜师范大学, 2022.
- [8] 张嘉桐. 基于认知负荷理论的数学多媒体认知加工模型研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2016.
- [9] 龙启锦, 邓萍萍. 基于脑科学谈优化数学教学设计原则[J]. 贺州学院学报, 2008, 24(3): 93-97.
- [10] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书数学(选择性必修第一册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.