

# Approximation of Seismic Wave Propagation in Weak Anisotropic Media Based on Perturbation Method

Xianqi He\*, Lingxing Peng

Hunan Provincial Communications Planning, Survey & Design Institute, Changsha Hunan  
Email: hexqi666@hotmail.com

Received: Dec. 2<sup>nd</sup>, 2016; accepted: Dec. 19<sup>th</sup>, 2016; published: Dec. 22<sup>nd</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

Due to the complexity of the exact propagation characteristic expression, it is not conducive to the parameter inversion, so it is necessary to derive its approximate linear expression. This paper mainly completes three aspects of the work: phase velocity and polarization vector of the wave are determined further by solving Christoffel equation using perturbation method; the first-order expressions of  $q^p$  and  $q^s$  wave group velocities in extremely weakly anisotropic media are deduced, and the existing research results are supplemented and improved; the expressions of seismic wave attributes in VTI and HTI media are deduced based on the expression of extreme anisotropy.

## Keywords

Perturbation, Weak Anisotropy, VTI, HTI, Polarization Vector

---

# 基于摄动法的弱各向异性介质地震波传播特征近似

何现启\*, 彭凌星

\*通讯作者。

湖南省交通规划勘察设计院, 湖南 长沙  
Email: hexqi666@hotmail.com

收稿日期: 2016年12月2日; 录用日期: 2016年12月19日; 发布日期: 2016年12月22日

## 摘要

由于精确传播特征表达式较复杂, 不利于参数反演, 因此有必要推导其近似的线性表达式, 本文主要完成了三个方面的工作: 用摄动法求解Christoffel方程, 进一步用确定了 $q^p$ 、 $q^s$ 波的相速度、偏振向量; 推导了极端弱各向异性介质中 $q^p$ 、 $q^s$ 波群速度的一阶表达式, 并对已有的研究成果进行了补充和完善; 在极端各向异性表达式的基础上, 推导了VTI、HTI介质中的地震波属性表达式。

## 关键词

摄动法, 弱各向异性, VTI, HTI, 偏振向量

## 1. 引言

由于精确传播特征表达式较复杂, 一些参数为隐性表达式, 这就不利于参数反演, 因此有必要推导其近似的线性表达式, 以方便以后反演需要。

2009年 Jyoti Behura [1], 以各向同性粘弹性介质为背景介质, 利用摄动法推导出粘弹性 VTI 介质中 P 波、PS 波的反射系数近似公式。

1984年 Byun [2]提出了射线追踪模拟法; Hnayga (1999, 2000) [3]提出了动态射线追踪模拟法; 2008年 Vavryčuk [4]提出用实射线追踪法对粘弹性各向异性介质中地震波进行数值模拟, 取得了较好效果。

刘财, 郭智奇(2006, 2007, 2008) [5] [6] [7]对粘弹各向异性介质进行了伪谱法波场数值模拟, 系统地研究了粘弹各向异性薄(互)层波的反射、透射等问题; 2008年孙银行[8]采用各向同性近似法对弱各向异性介质进行了数值模拟, 并进行了波场分析; 吴国忱(2009, 2010) [9]推导出 TTI 介质中地震波的精确相速度和偏振向量表达式, 并给出了其弱各向异性近似表达式; 2009年孙福利[10]实现了弱各向异性介质中 $q^p$ 波的一阶射线追踪; 2009年吴萍[11]研究了 HTI 介质中纵波随方位角变化特性; 2010年郝奇[12]用改进的摄动理论研究弱各向异性粘弹性介质中的非均匀平面波的传播特征并进行了误差分析, 得出了一些有益的结论。

本节在前人所做工作的基础上[13]-[17], 做了三方面的工作。1) 用摄动法求解 Christoffel 方程, 进一步用确定了 $q^p$ 、 $q^s$ 波的相速度、偏振向量。2) 推导了极端弱各向异性介质中 $q^p$ 、 $q^s$ 波群速度的一阶表达式, 对已有的研究成果进行了补充和完善。3) 在极端各向异性表达式的基础上, 推导出 VTI、HTI、EDA 介质中的地震波属性表达式, 并指出在奇异方向附近 $q^s$ 波属性表达式所存在的不足。

## 2. VTI 介质中地震波传播特征近似

VTI 介质弹性张量 $C_{ij}^{VTI}$ 有六个独立分量, 而在各向同性介质中 $C_{ij}^{iso}$ 只有两个分量即:  $C_{33}$ ,  $C_{44}$ 。在弱各向异性介质中 $C_{ij}^{VTI}$ 与 $C_{ij}^{iso}$ 的差异较小, 可以考虑以 $(C_{ij}^{VTI} - C_{ij}^{iso})$ 定义各向异性参数。具体定义如下[18]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \frac{c_{11} - c_{33}}{2c_{33}}, \mathcal{E}_y = \frac{c_{22} - c_{33}}{2c_{33}}, \mathcal{E}_{26} = \frac{c_{26}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{34} = \frac{c_{34}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{35} = \frac{c_{35}}{c_{33}}, \\
\mathcal{E}_{46} &= \frac{c_{46}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{56} = \frac{c_{56}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{45} = \frac{c_{45}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{15} = \frac{c_{15}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{16} = \frac{c_{16}}{c_{33}}, \mathcal{E}_{24} = \frac{c_{24}}{c_{33}}, \\
\delta_x &= \frac{c_{13} + 2c_{55} - c_{33}}{c_{33}}, \delta_y = \frac{c_{23} + 2c_{44} - c_{33}}{c_{33}}, \delta_z = \frac{c_{12} + 2c_{66} - c_{33}}{c_{33}}, \\
\chi_x &= \frac{c_{14} + 2c_{56}}{c_{33}}, \chi_y = \frac{c_{25} + 2c_{46}}{c_{33}}, \chi_z = \frac{c_{36} + 2c_{45}}{c_{33}}, \\
\gamma_x &= \frac{c_{55} - c_{44}}{2c_{44}}, \gamma_z = \frac{c_{66} - c_{44}}{2c_{44}},
\end{aligned} \tag{1}$$

### 3. HTI 介质中的地震波传播特征近似

#### 3.1. HTI 介质中相速度一阶近似

由极端各向异性近似公式[19]-[26], 利用(1)消去  $C_{ij}$  可得弱各向异性介质中  $q^P, q^S$  波的一阶相速度为:

$$\begin{aligned}
V_{q^P} &= V_P^0 \left( 1 + \sin^2 \theta \left( \mathcal{E}_x \cos^4 \varphi \sin^2 \theta + \delta_z \cos^2 \varphi \left( \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \right) \right) \right) \\
V_{q^S}^+ &= V_S^0 \left[ 1 + S(\theta, \varphi) + \sqrt{M(\theta, \varphi)^2 + N(\theta, \varphi)^2} \right] \\
V_{q^S}^- &= V_S^0 \left[ 1 + S(\theta, \varphi) - \sqrt{M(\theta, \varphi)^2 + N(\theta, \varphi)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

其中:

$$\begin{aligned}
M(\theta, \varphi) &= \frac{C_{33}}{2C_{44}} \sin^2 \theta \left\{ \mathcal{E}_x \cos^2 \varphi \left( \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - \sin^2 \varphi \right) + \delta_z \cos^2 \varphi \left( \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \right\} + \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \gamma_x \left( \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \right]. \\
N(\theta, \varphi) &= \frac{\sin 2\varphi \cos \theta}{4} \left[ \frac{C_{33}}{C_{44}} \sin^2 \theta \left( -2\mathcal{E}_x \cos^2 \varphi + 2\delta_z \cos^2 \varphi \right) - 2\gamma_x \right]
\end{aligned}$$

#### 3.2. HTI 介质中一阶偏振向量

将偏振向量的表式转换到观测坐标[26]-[32], 并用 HTI 弱各向异性参数表示, 可得  $q^P, q^S$  波的一阶偏振单位向量。

$$\begin{aligned}
u_{q^P} &= A(\theta, \varphi)e^{(1)} + B(\theta, \varphi)e^{(2)} + e^{(3)} \\
u_{q^S}^+ &= \cos a e^{(1)} + \sin a e^{(2)} - \left[ A(\theta, \varphi) \cos a + B(\theta, \varphi) \sin a \right] e^{(3)}, \\
u_{q^S}^- &= -\sin a e^{(1)} + \cos a e^{(2)} - \left[ B(\theta, \varphi) \cos a - A(\theta, \varphi) \sin a \right] e^{(3)},
\end{aligned} \tag{3}$$

其中:

$$\begin{aligned}
A(\theta, \varphi) &= \frac{\sin 2\theta}{2 \left( 1 - \frac{C_{44}}{C_{33}} \right)} \left[ 2\mathcal{E}_x \sin^2 \theta \cos^4 \varphi + \delta_z \left( \cos 2\theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \right) \right], \\
B(\theta, \varphi) &= \frac{\sin 2\varphi \sin \theta}{2 \left( 1 - \frac{C_{44}}{C_{33}} \right)} \left[ -2\mathcal{E}_x \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \delta_z \left( \cos 2\varphi \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \right) \right].
\end{aligned}$$

$$e^{(1)} = \cos \theta \cos \varphi x + \cos \theta \sin \varphi y - \sin \theta z,$$

$$e^{(2)} = -\sin \varphi x + \cos \varphi y,$$

$$e^{(3)} = \sin \theta \cos \varphi x + \sin \theta \sin \varphi y + \cos \theta z$$

### 3.3. HTI 介质中一阶群速度

由(1)式及群速度的一阶表达式得:

$$\begin{aligned} w_{qp} &= V_p^0 \left( \sin 2\theta (2 \sin^2 \theta \varepsilon_x - \cos 2\theta \delta_x) e^{(1)} + (1 + \varepsilon_x \sin^4 \theta + \delta_z \sin^2 \theta \cos^2 \theta) e^{(3)} \right), \\ w_{qs}^\pm &= w_1^\pm e^{(1)} + w_2^\pm e^{(2)} + V_{qs}^\pm e^{(3)}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:

$$w_1' = F_1(\theta, \varphi) \pm [G_1(\theta, \varphi) \cos(2a) + H_1(\theta, \varphi) \sin(2a)],$$

$$w_2' = F_2(\theta, \varphi) \pm [G_2(\theta, \varphi) \cos(2a) + H_2(\theta, \varphi) \sin(2a)].$$

$$F_1(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\theta}{2} \left\{ -\frac{C_{33}}{C_{44}} [\varepsilon_x \cos^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1) + \delta_z \cos^2 \varphi (\cos 2\theta + 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta)] + \gamma_x \cos^2 \varphi \right\}$$

$$G_1(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\theta}{2} \left\{ \frac{C_{33}}{C_{44}} [\varepsilon_x \cos^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - 1) + \delta_z \cos^2 \varphi (2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta - \cos 2\theta)] - \gamma_x \cos^2 \varphi \right\}$$

$$H_1(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\varphi \sin \theta}{4} \left\{ \frac{C_{33}}{C_{44}} (3 \cos^2 \theta - 1) \times [-2\varepsilon_x \cos^2 \varphi + 2\delta_z \cos^2 \varphi] + 2\gamma_x \right\}$$

$$F_2(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\varphi \sin \theta}{2} \left\{ \frac{C_{33}}{C_{44}} [\varepsilon_x (2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta - 1) + \delta_z (\cos^2 \theta - \cos 2\varphi \sin^2 \theta)] - \gamma_x \right\}$$

$$G_2(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\varphi \sin \theta}{2} \times \left[ \frac{C_{33}}{C_{44}} \cos 2\varphi (\delta_z - \varepsilon_x) - \gamma_x \right]$$

$$H_2(\theta, \varphi) = V_s^0 \frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ \frac{C_{33}}{C_{44}} [2\varepsilon_x \cos^2 \varphi (2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) + \delta_z (2 \cos^4 \varphi \sin^2 \theta - \sin^2 2\varphi) + 2\gamma_x \sin^2 \varphi - 2\gamma_z] \right\}$$

## 4. 算法验证

下面主要通过模型计算来验证算法的正确性、精度和适用范围, 模型包括 VTI、HTI、EDA 介质。HTI 介质的近似相速度主要针对弱各向异性, 具体讨论如下:

模型参数见表 1, 表 2, 计算结果见图 1~8。

**Table 1.** Model parameter of model 1

**表 1.** 模型 1 模型参数

Vp0 (km/s)	Vs0 (km/s)	$\varepsilon$	$\delta$	$\gamma$	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )
2.89	1.768	0.1	-0.1	0.1	2.42

**Table 2.** Model parameter of model 2

**表 2.** 模型 2 模型参数

Vp0 (km/s)	Vs0 (km/s)	$\varepsilon$	$\delta$	$\gamma$	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )
2.89	1.768	0.2	-0.2	0.2	2.42

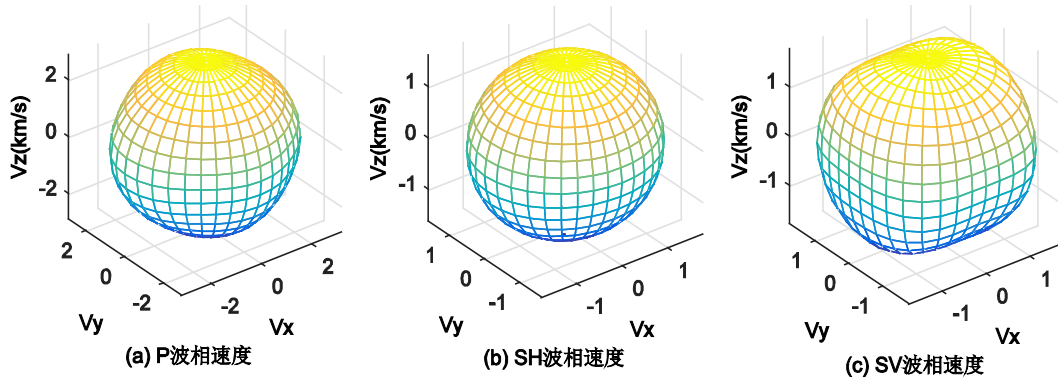


Figure 1. Exact phase velocity of model 1  
图 1. 模型 1 精确相速度

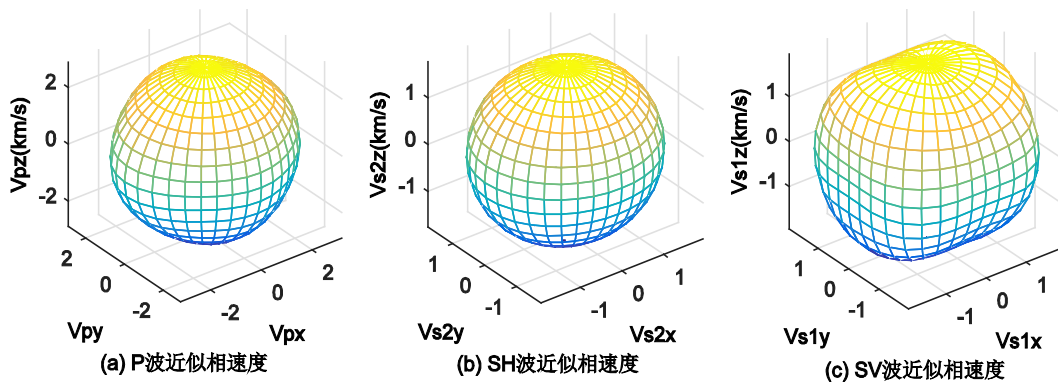


Figure 2. Approximation velocity of model 3  
图 2. 模型 1 近似相速度

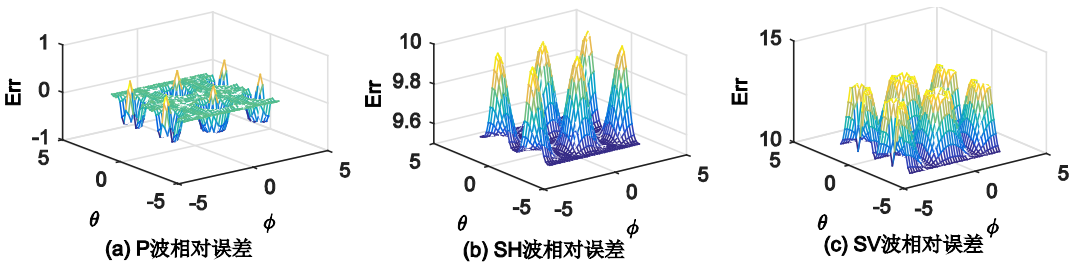
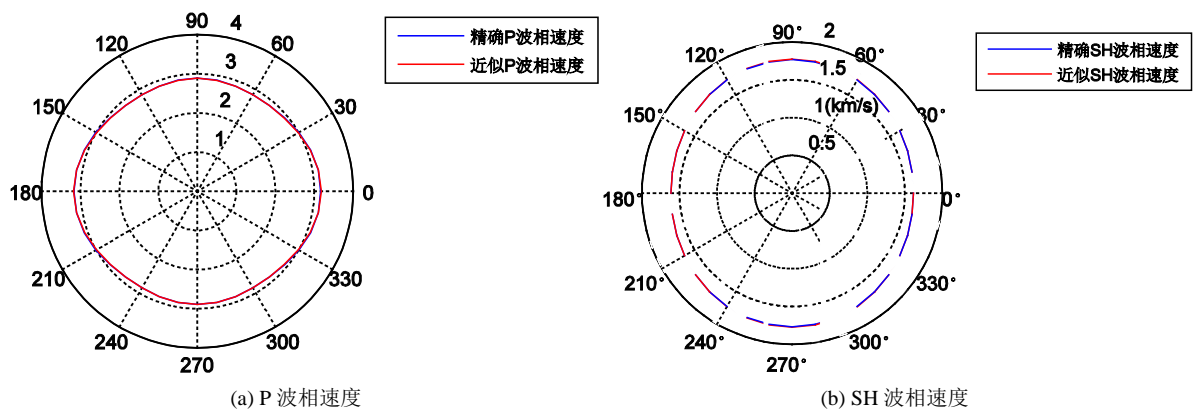


Figure 3. Relative error of approximation phase velocity calculated by (2) for model 1  
图 3. 模型 1 由(2)式计算的相速度对误差



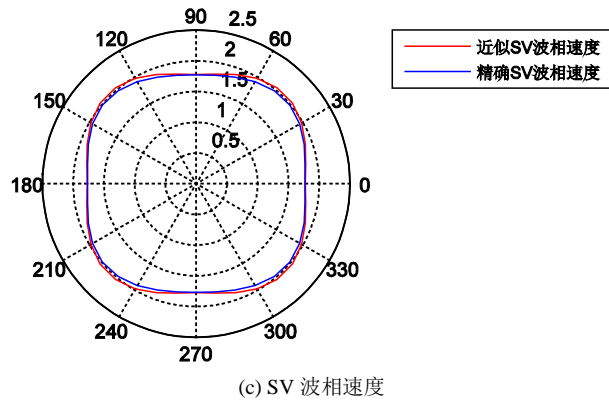


Figure 4. Comparison of exact phase velocity and approximation velocity for P, SH, SV in xoz plane  
 图 4. xoz 平面内 P、SH、SV 的精确与近似相速度比较

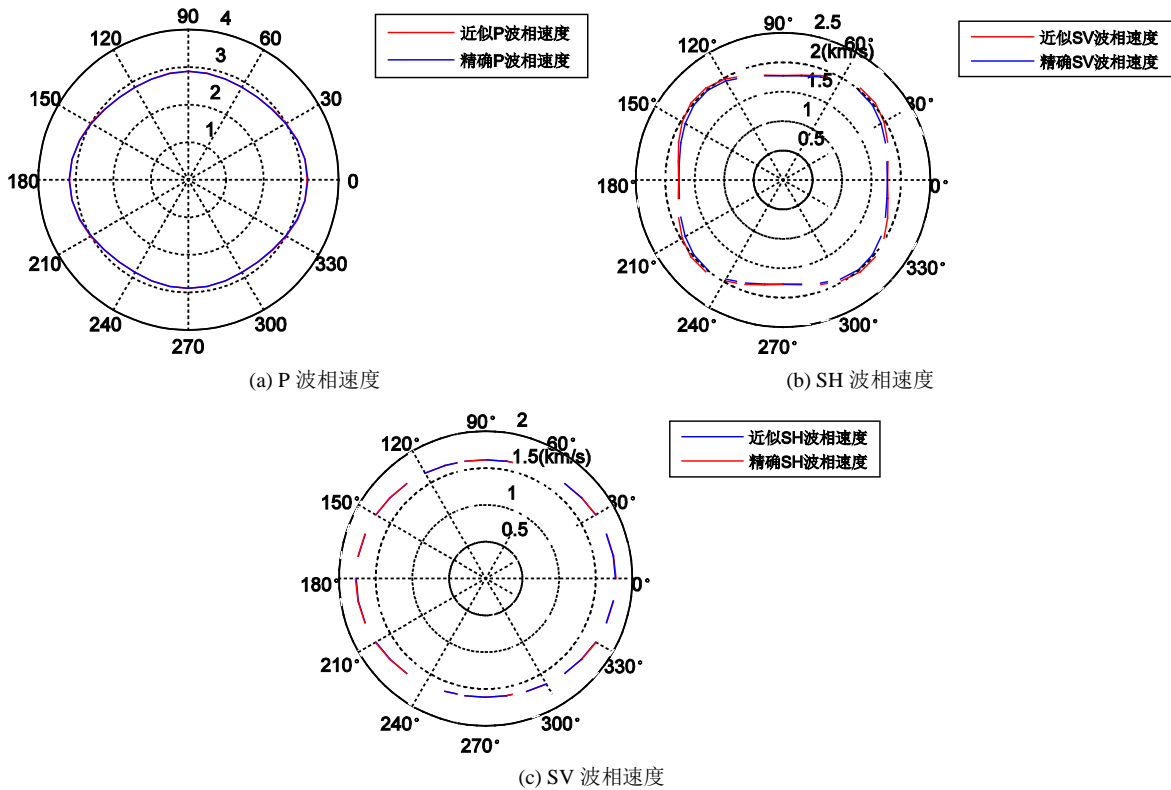


Figure 5. Comparison of exact phase velocity and approximation velocity for P, SH, SV in xoz plane  
 图 5. xoz 平面内 P、SH、SV 的精确与近似相速度比较

以上精确相速度通过解 Christoffel 方程得到, 近似相速度由(2)计算得到, 模型 1 的计算结果相对误差在 4% 以内, P、SH 波的精度较 SV 波高, 通过图 4 和图 5 可以更为直观的了解精确解与近似解的差异。

模型 2, 当各向异性系数达 0.2 时, 精度有所降低其相对误差在 10% 以内。试验证明 HTI 介质当各向异性系数达 0.4 时, (2)式仍然能满足精度要求, 而对 P 波当各向异性系数达 0.5 时, 相对误差仍然保持在 10% 以内。

### 5. 结论

本文在研究极端各向异性介质地震波传播特征的基础上, 研究了 VTI、HTI 介质中地震波传播的弱

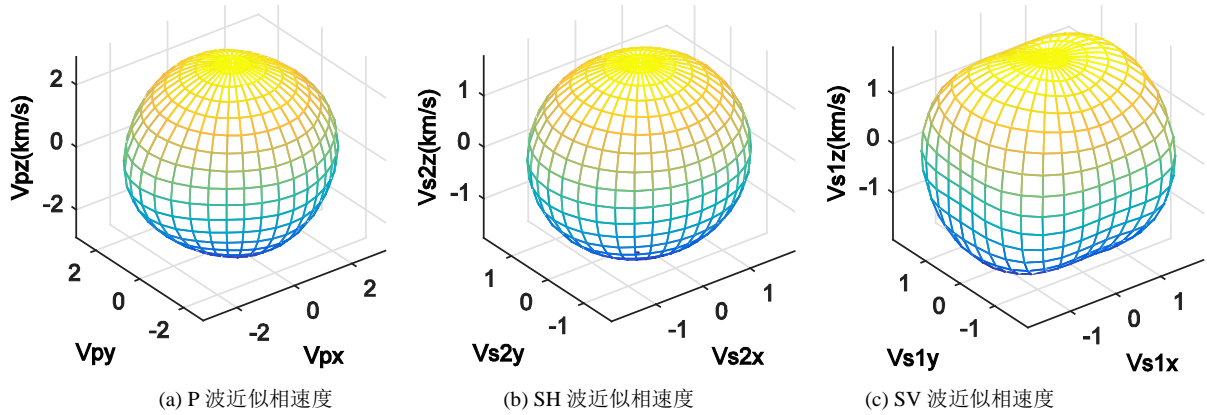


Figure 6. Exact phase velocity of model 4  
图 6. 模型 4 精确相速度

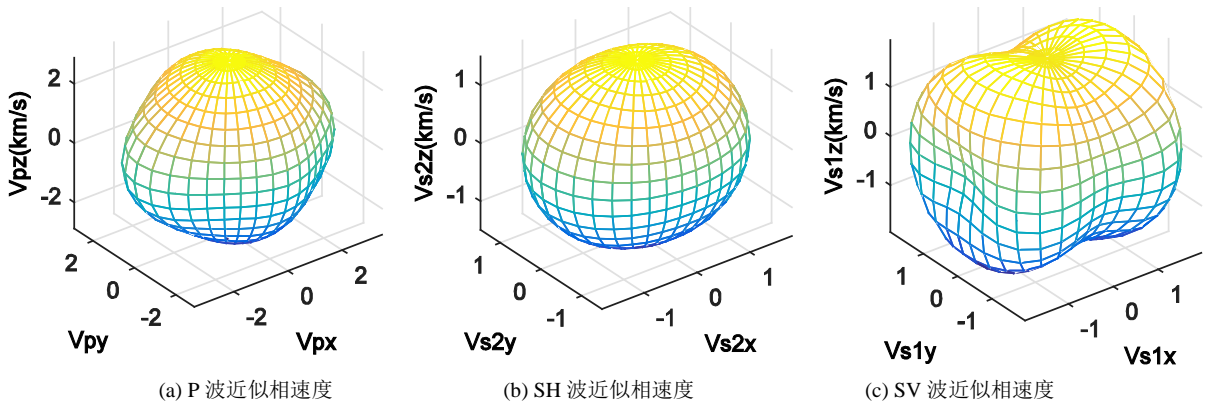


Figure 7. Approximation velocity of model 4  
图 7. 模型 4 近似相速度

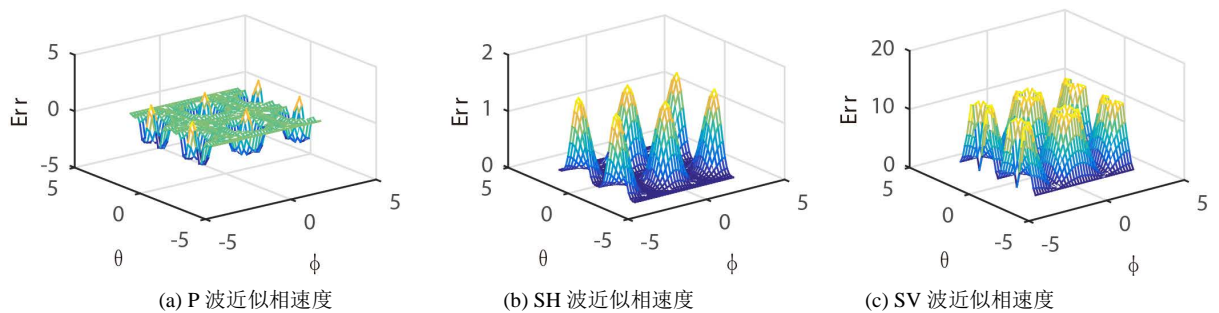


Figure 8. Relative error of approximation phase velocity calculated by (50) for model 2  
图 8. 模型 2 由(2)式计算相速度的对误差

各向异性近似。通过数值计算验证, 计算结果相对误差在 4% 以内, P、SH 波的精度较 SV 波高。当各向异性系数达 0.2 时, 精度有所降低其相对误差在 10% 以内。试验证明 HTI 介质当各向异性系数达 0.4 时, 近似表达式式仍然能满足精度要求, 对 P 波当各向异性系数达 0.5 时, 相对误差仍然保持在 10% 以内。研究成果对地震勘探的数据反演有重要的理论和实用价值。

### 参考文献 (References)

[1] Behura, J. and Tsvankin, I. (2009) Reflection Coefficients in Attenuative Anisotropic Media. *Geophysics*, **74**, WB193-

- WB202. <https://doi.org/10.1190/1.3142874>
- [2] Byun, B.S. (1982) Seismic Parameters for Media with Elliptical Velocity Dependencies. *Geophysics*, **47**, 1621-1626. <https://doi.org/10.1190/1.1441312>
- [3] Byun, B.S. (1984) Seismic Parameters for Transversely Isotropic Media. *Geophysics*, **49**, 1908-1914. <https://doi.org/10.1190/1.1441603>
- [4] Hanyga, A. and Seredyńska, M. (1999) Asymptotic Ray Theory in Poro- and Viscoelastic Media. *Wave Motion*, **30**, 175-195. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(98\)00053-5](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(98)00053-5)
- [5] 刘财, 张智, 邵志刚, 等. 线性粘弹体中地震波场伪谱法模拟技术[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(3): 640-644.
- [6] 郭智奇, 刘财, 杨宝俊, 等. 粘弹各向异性介质中地震波场模拟与特征[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(3): 804-810.
- [7] 刘财. 黏弹各向异性介质中波的反射与透射问题分析[J]. 地球物理学报, 2007, 50(4): 1216-1224.
- [8] 孙银行. 弱各向异性介质弹性波的准各向同性近似正演模拟[J]. 地球物理学进展, 2008, 23(4): 1118-1123.
- [9] 吴国忱, 梁锴, 印兴耀. TTI 介质弹性波相速度与偏振特征分析[J]. 地球物理学报, 2010, 53(8): 1914-1923.
- [10] 孙福利, 杨长春, 陈雨红, 等. 弱各向异性介质中 qP 波的一阶射线追踪[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(1): 35-41.
- [11] 吴萍, 杨长春, 王真理, 等. HTI 介质中的反射纵波方位属性[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(3): 944-950.
- [12] 郝奇, 何樵登, 王德利用改进的摄动理论研究各向异性弱粘弹性介质中的非均匀平面波[J]. 吉林大学学报(地学版), 2010, 40(1): 195-202.
- [13] 梁锴. TI 介质中地震波的传播特征与正演方法研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国石油大学, 2009: 185-195.
- [14] Jech, J. and Psencik, I. (1989) First-Order Perturbation Method for Anisotropic Media. *Geophysical Journal International*, **99**, 369-376. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb01694.x>
- [15] Farra, V. and Pšenčík, I. (2003) Properties of the Zeroth-, First-, and Higher Order Approximations of Attributes of Elastic Waves in Weakly Anisotropic Media. *Journal of the Acoustical Society of America*, **114**, 1366-1378. <https://doi.org/10.1121/1.1591772>
- [16] Psencik, I. and Gajewski, D. (1998) Polarization, Phase Velocity, and NMO Velocity of qP-Waves in Arbitrary Weakly Anisotropic Media. *Geophysics*, **63**, 1754-1766. <https://doi.org/10.1190/1.1444470>
- [17] Owack, R. and Peneik, I. (1991) Perturbation from Isotropic to Anisotropic Heterogeneous Media in the Ray Approximation. *Geophysical Journal International*, **106**, 1-10. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb04597.x>
- [18] Vavryčuk, V. (2009) Weak Anisotropy-Attenuation Parameters. *Geophysics*, **74**, WB203-WB213. <https://doi.org/10.1190/1.3173154>
- [19] Auld, B.A. (1973) *Acoustic Waves and Fields in Solids*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken.
- [20] Ohanian, V., Syder, T.M. and Carcione, J. (2006) Weak Elastic Anisotropy by Perturbation Theory. *Geophysics*, **71**, D45-D58. <https://doi.org/10.1190/1.2194520>
- [21] Gajewski, D. and Pšenčík, I. (1996) QP-Wave Phase Velocities in Weakly Anisotropic Media-Perturbation Approach. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 1507-1510. <https://doi.org/10.1190/1.1826403>
- [22] Farra, V. (2004) Improved First-Order Approximation of Group Velocities in Weakly Anisotropic Media. *Studia Geophysica et Geodaetica*, **48**, 199-213. <https://doi.org/10.1023/B:SGEG.0000015592.36894.3b>
- [23] Thomsen, L (1986) Weakly Elastic Anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954-1966. <https://doi.org/10.1190/1.1442051>
- [24] 何现启. VTI 介质中地震波的传播特征研究[J]. 地球物理学进展, 2009, 24(4): 1291-1298.
- [25] Sena, A.G. (1991) Seismic Traveltime Equations for Azimuthally Anisotropic and Isotropic Media: Estimation of Interval Elastic Properties. *Geophysics*, **56**, 2090-2101. <https://doi.org/10.1190/1.1443021>
- [26] 何现启. EDA 介质中地震波的传播特征及参数反演研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 中南大学, 2010.
- [27] 赵爱华, 丁志峰, 廖武林, 高武平. 弱各向异性介质地震波群速度的射线角近似表示[C]//中国地球物理学会. 中国地球物理第二十一届年会论文集. 长春: 吉林大学出版社, 2005: 1.
- [28] 王观石, 郭媛, 胡世丽, 等. 岩石粘性系数的测试方法[J]. 地球物理学进展, 2014, 29(5): 2411-2415.
- [29] 洪启宇. 地震波在粘弹性各向异性地壳介质中的传播及其应用研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国地震局地球物理研究所, 2016.
- [30] Zhu, Y. (2006) *Seismic Wave Propagation in Attenuative Anisotropic Media*. PhD Thesis, Colorado School of Mines, Golden.



- 
- [31] Vavryčuk, V. (2015) Determination of Parameters of Viscoelastic Anisotropy from Ray Velocity and Ray Attenuation: Theory and Numerical Modeling. *Geophysics*, **80**, C59-C71. <https://doi.org/10.1190/geo2014-0355.1>
- [32] Bai, T. and Tsvankin, I. (2016) Access Denied Time-Domain Finite-Difference Modeling for Attenuative Anisotropic Media. *Geophysics*, **81**, C69-C77. <https://doi.org/10.1190/geo2015-0424.1>

**期刊投稿者将享受如下服务:**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ag@hanspub.org](mailto:ag@hanspub.org)