

频率域可控源电磁法三维反演进展

李丽丽, 王占, 李博, 张媛, 赵宗, 张涛

桂林理工大学, 广西 桂林

收稿日期: 2022年10月18日; 录用日期: 2022年11月16日; 发布日期: 2022年11月23日

摘要

频率域可控源电磁法(FCSEM)是一种基于人工源激发的地球物理勘探方法, 比大地电磁探测有更强的抗干扰能力, 比重磁勘探有更高的分辨率。因此在地球物理资源勘探领域中发挥着关键的作用。FCSEM反演方法的研究及其算法稳定性、有效性和计算效率, 一直都是近年来的热点。本文主要介绍了可控源电磁法三维反演数值模拟技术, 进展, 以及相关解算法的应用, 并对各种方法的特点作了比较分析, 最后对FCSEM进行了总结, 并给出了未来的发展方向。

关键词

频率域可控源电磁法, 正演, 反演, 数值模拟

The 3D Inversion Progress of Frequency Domain Controlled Source Electromagnetic

Lili Li, Zhan Wang, Bo Li, Yuan Zhang, Zong Zhao, Tao Zhang

College of Earth Sciences, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi

Received: Oct. 18th, 2022; accepted: Nov. 16th, 2022; published: Nov. 23rd, 2022

Abstract

Frequency domain controlled source electromagnetic (FCSEM), a geophysical exploration method, is based on artificial source excitation. The method is stronger in the interference carrying than electromagnetic exploration and is higher in resolution than gravity-magnetic prospecting. Recently, the theory research and effectiveness, stability, and computational efficiency of 3D CSEM inversion have always been the focus. This paper mainly introduces 3D CSEM inversion, including the progress of numerical simulation methods and the application of algorithms relating solution, compares the properties of various methods, and gives the prospect of future development. Finally, CSEM method is summarized, and the future development direction is given.

Keywords

FCSEM, Forward, Inversion, Numerical Simulation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近几年来, 频率域可控源电磁法(Frequency Domain Controlled Source Electromagnetic, FCSEM)广泛地应用在寻找金属矿产、油气藏和煤层以及航空磁测等方面, 极大地推动了可控源电磁法反演的发展。国内外众多学者在 FCSEM 反演研究中做了大量的工作, Newman 等[1]采用非线性共轭梯度(NLCG)和有限记忆(LM)准牛顿方法对非线性三维电磁逆散射问题进行预处理, 对电磁数据做了反演解释。底青云[2] [3]、汤井田和何继善[4]对可控源音频大地电磁法以及多维问题系统地进行了正演和反演研究。Egbert 等[5]对三维电磁法反演结构进行了讨论, 为电磁(EM)地球物理逆问题中产生的雅可比计算开发了一个通用的数学框架。林昌洪和谭捍东等[6] [7]结合正则化反演和共轭梯度反演的想法, 实现了可控源音频大地电磁三维共轭梯度反演算法, 并验证了该反演算法的有效性和稳定性。刘云鹤和殷长春[8]利用非线性共轭梯度法和有限内存(L-BFGS)分别进行了三维航空电磁法的反演, 并比较了两种方法的计算效率和有效性。由此可见, 三维 FCSEM 反演的稳定性、有效性和计算效率均是目前研究的关键。

在反演过程中, 正演计算时间决定着反演计算效率。正演一般使用直接法或者迭代法来求解大型复系数稀疏矩阵方程, 直接法的解为精确解, 迭代法的解是近似的, 直接法的解可用来验证迭代法的解, 但直接法的前提条件是系数矩阵为非奇异, 否则只能通过迭代法求近似解。迭代法包括有限元、有限差分、积分方程法和谱元法等。反演计算的核心是搜索方向的选择, 搜索方向不同, 最终的解决方法也不一样。为了提高三维反演计算速度, 研究中大多采用基于线搜索方法来进行反演, 主要有最速下降法, 牛顿法, 非线性共轭梯度和有限内存法等。最速下降法计算原理简单, 但是收敛速度较慢。牛顿法收敛速度较快, 但需要计算二阶偏导数矩阵, 计算量较大。有限内存[9]是共轭梯度法的一种推广, L-BFGS 算法不需要保存近似逆 Hessian 矩阵, 只需保存每次迭代的为一维数组的中间信息, 且迭代保存的中间信息有近似逆 Hessian 矩阵不会很多(100 次以内), 因此该方法存储要求大幅降低, 收敛速度明显提升。

本文第一部分介绍了 FCSEM 正演技术及其不同数值模拟方法的进展, 第二部分介绍了三维 FCSEM 反演及其主要数值模拟技术的进展, 最后对三维 FCSEM 提出了展望。

2. 频率域可控源电磁法概论

2.1. 概念

频率域可控源电磁法是频率域电磁测深法的一种。它是一种基于人工震源激发的地球物理勘探方法。与传统的天然源大地电磁探测方法相比, 具有更强的抗干扰能力, 适合探测电性不均匀的地质目标。已广泛应用于各种复杂环境下的矿产资源勘探研究, 如地面和海洋磁测。

因此, 发展可靠、高效、稳定的可控源电磁法三维反演算法对大规模可控源电磁资料的精细解释具有重要的理论和实际意义。

2.2. 计算流程

三维频率域可控源电磁法反演流程为：先设置一个异常体或者观测模型，然后采用有限差分法，有限元法，谱元法等对模型进行正演数值模拟，得到模型视电阻率响应，然后再基于正演响应，采用有限内存拟牛顿法，高斯牛顿法，非线性共轭梯度法等进行反演，最后对比反演结果图和初始观测模型图，验证正反演数值模拟方法可行性和适用性。具体流程如图 1 所示。

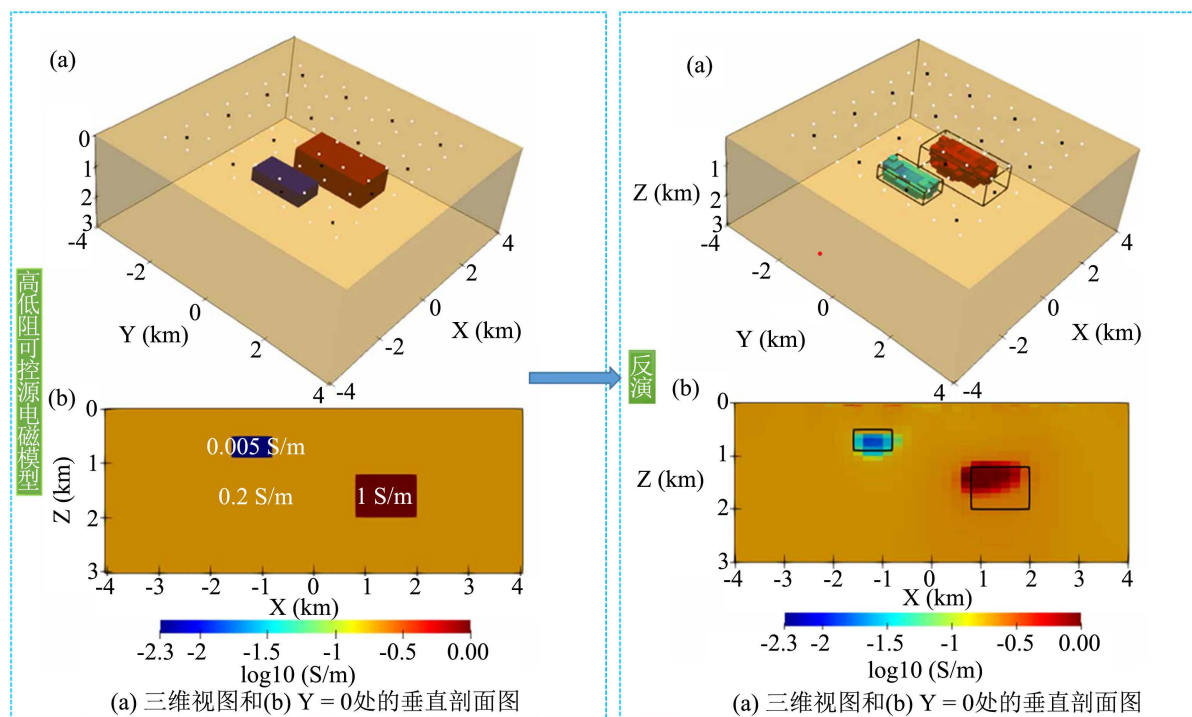


Figure 1. Diagram of inversion flow

图 1. 反演流程示意图(龙志丹, 2021 [10])

3. 研究进展

近年来，国内外学者对频率域电磁法的数值模拟方法持续探索，在正演和反演方面已有一些数值模拟方法出现并被应用。

3.1. 正演数值计算方法

目前已有许多方法被用来做正演计算，但常用的计算方法主要有以麦克斯韦(Maxwell)方程为出发点的积分方程(IE)法、基于差分计算的有限差分(FDM)，以变分和插值为基础的有限元(FEM)、还有基于波动方程的谱元法等，下面对这几种方法逐一进行一个介绍以及优缺点概括。

3.1.1. 积分方程法

积分方程法(IE)是出现最早的模拟三维问题的数值计算方法，最先应用在地球物理的电磁学领域[11]。其数值模拟的过程是在 Maxwell 方程的基础上，引入求解非齐次线性微分方程的格林函数，然后转化方程、离散矩阵，最后求解电磁场。IE 具有计算速度快，内存占用少的优点。缺点是不适合用于三维复杂地质模型的模拟计算。随着计算机技术硬件设施的发展，有许多学者对 IE 算法进行了改进，任政勇[12]等开发了新的奇异值积分的解析表达式。刘永亮等[13]对三维数值模拟近似反演的拟近似方法进行了一个

对比。殷长春等[14]将 IE 方法应用于大地电磁三维数值模拟正演。

3.1.2. 有限差分法

有限差分法(FDM)是应用较早且比较成熟的数值方法, Yee [15]用有限差分法代替 Maxwell 方程组, 来解决初始边界值。FDM 是一种直接用代数来替代微分的问题的近似数值计算方法, 数学原理简单直观, 计算速度较快, 但只适用于参数简单和规则的模型模拟。万文武[16]将有限元和谱元法进行结合来进行数值模拟。周印明和何展翔[17]等将有限元法应用到三维广域电磁法数值模拟。殷长春[18]、胡善政[19]、许诚和底青云[20]等学者利用 FDM 方法开展了可控源音频大地电磁法三维数值模拟研究。

3.1.3. 有限元法

有限元法(FEM)是直接以变分和加权余量为基础的, 求解电磁场的微分方程。先进行变分, 再进行积分, 形成大型稀疏线性方程组。最后, 通过直接求解或迭代求解线性方程组, 得到电磁常数分布。Coggon [21]首次将 FEM 应用于电磁学。FEM 的优点是求解过程简单、规范, 编程方便。缺点是离散化后产生的大型线性方程组往往是阶数较大的病态矩阵, 求解困难。Mukherjee [22], Silva [23]等使用矢量有限元法进行了三维模拟。王亚璐和底青云等[24]、张钱江和戴世坤等[25]、龙志丹[10], 黄渡和吴小平等[26]学者也使用 FEM 进行了三维数值模拟。

3.1.4. 谱元法

谱元法(SEM)属于广义有限元法, 其本质还是 FEM 方法, 但是在单元内插值函数使用的是谱方法。最早由其 Patera [27]提出, 是 Galerkin 方法的延用, 首先使用有限元的方法进行离散化, 然而在单元内部使用谱方法进行差值。该方法计算精度高, 收敛快, 现已成为大规模、复杂地质构造模型, 数值模拟的重要工具。谱元法用最先是用到地震方面的, 如: Seriani [28]和 Komatitsch [29], 魏亦文和王有学等[30]。刘玲[31]、黄鑫[32]等将 SEM 用到电磁法三维反演中。

3.2. 反演数值计算方法

随着可控源电磁法的发展和应用, 一维和二维反演已经无法满足人们对勘探精度的要求。国内外学者对三维反演进行了大量的研究。三维反演方法主要有: 为共轭梯度法极大似然反演[33]、非线性共轭梯度反演和人工神经网络反演[34], 还有拟线性近似反演[35]、快速松弛反演[36], 高斯牛顿法, 以及有限内存拟牛顿法为代表的近似三维反演方法。每种方法都有优点和缺点。下面介绍两种广泛使用的方法。

3.2.1. 高斯牛顿法

传统的牛顿法(Newton's method)收敛速度快, 但需要连续计算 Hessian 逆矩阵, 如果所求矩阵是病态或非正定时, Newton's method 就不能够确保收敛[37]。因此出现了近似 Hessian 矩阵的逆矩阵高斯-牛顿法(Gauss-Newton, GN) [38] [39]。因为该方法用雅可比矩阵的乘积代替了牛顿法中的二阶 Hessian 矩阵, 所以省略了对该矩阵的计算, 计算量降低。如果 GN 计算得到的结果步长过大, 则近似解会不准确, 算法也会发散。彭荣华和胡祥云[40]在三维反演中采用 GN 来优化目标函数, 提出了适合陆地和海洋勘探的三维 FCSEM 反演方法。

3.2.2. 有限内存拟牛顿法

最小二乘法(LS)多用于反演方法中, 但其收敛性不稳定。当初始值选取不当时, 会造成方程求解过程中出现较大误差, 有时甚至不收敛。阻尼因子的取值是及其重要的, 因为它的取值会直接影响矩阵特征值、步长, 所以即使 Maquart [41]提出的优化阻尼 LS 算法在某种程度上改善了反演的不适定性, 但其计算效率也会相对较低。共轭梯度法[42]需要计算 2 次的“拟正演”, GN 需要计算整个灵敏度系数矩阵,

计算速度较慢。

有限内存拟牛顿法(L-BFGS)解决了逆牛顿法(BFGS)每次迭代后需要保存 $N * N$ 阶海森逆矩阵的问题, 具有收敛速度快, 内存开销少等优点, 尤其是在高维是, 优点更加突出。L-BFGS 是拟牛顿法中的一种, 是由唐传章和程见中等[43]提出了一种改进处理边界的方法来减少反演过程中算法迭代的次数。具有速度快, 内存消耗小的优点。段长生[44]利用拟牛顿法来解决 CSAMT 三维反演问题。马逢群和谭捍东等[45]基于有限内存进行了三维各向异性反演, 结果表明观测系统的各型向同性反演和实际的模型吻合较好, 可见用有限内存拟牛法做三维反演效果较好, 如图 2 所示。阮帅[46]、杨悦和翁爱华等[47]、卢慧芳和杨月婷[48]、曹晓月和殷长春等[49]等学者也对有限内存拟牛顿进行了研究和应用。

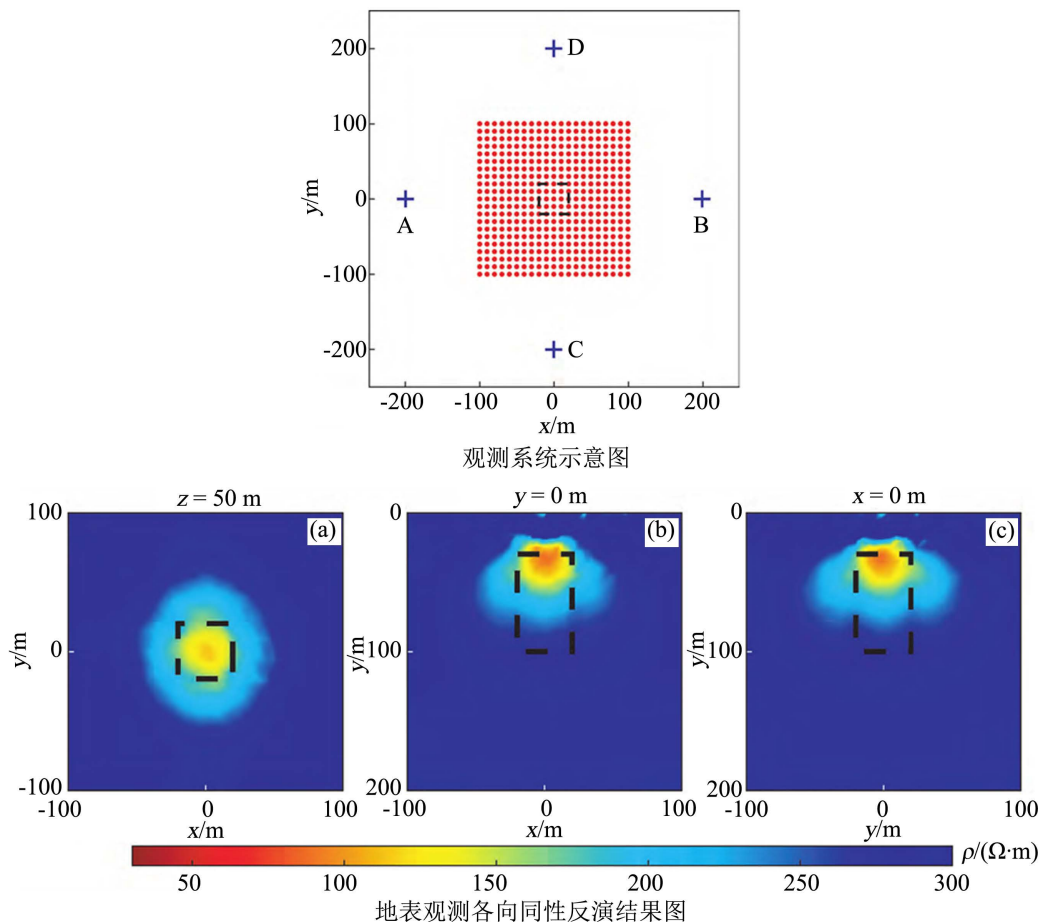


Figure 2. Surface observation system diagram
图 2. 地表观测系统图(马逢群等, 2022 [45])

3.2.3. 非线性共轭梯度法

非线性共轭梯度法(NLCG)是在共轭梯度法(CG)基础上提出的由 Fletcher 等人[50]提出的, 后来被 Polyak 和 Ribière 等[51]在参数上进行改进, 多种改进方式是基于残差和步长的。Rodi 等[52]将 NLCG 用于解决二维大地电磁反演问题。后来 Newman 等[53]用 NLCG 来解决大地电磁三维反演问题。NLCG 方法因为不需要将最优问题进行线性化, 所以反演时间和内存消耗相对较低, 特别适合用于高维电磁反演数值模拟, 强建科[54]等基于非线性共轭梯度法做了 2.5 维的电磁反演, 反演结果能够有效的反映地下真实电性结构, 如图 3 所示。

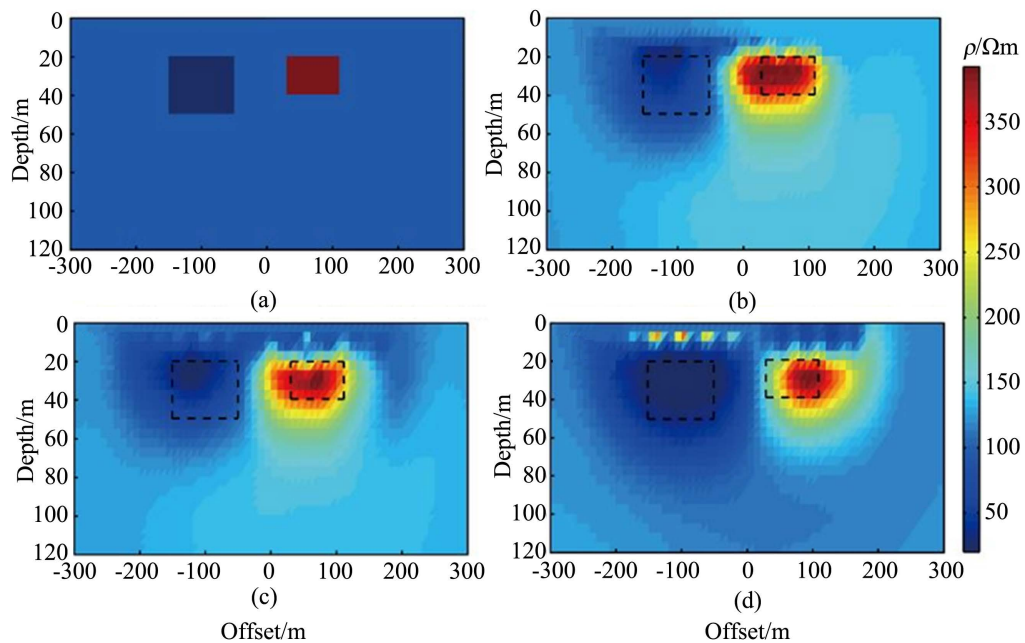


Figure 3. Inversion results of different initial models including (a) Complicated model, (b) Initial resistivity model of 150 $\Omega\cdot\text{m}$, and (c) Initial resistivity model of 100 $\Omega\cdot\text{m}$, (d) Initial resistivity model of 50 $\Omega\cdot\text{m}$

图 3. 不同初始模型反演结果(强建科等, 2016 [54]) (a) 复杂模型, (b) 初始模型为 150 $\Omega\cdot\text{m}$, (c) 初始模型为 100 $\Omega\cdot\text{m}$, (d) 初始模型为 50 $\Omega\cdot\text{m}$

4. 应用总结与适用性分析

从以上研究进展可以看出, 无论是正演方法还是反演方法都有各自的适用条件和具体情况, 为了适应地球物理数值模拟快速发展的需求, 学者们在数值模拟方面都在进行持续的研究, 改进的各种算法在计算速度和精度, 效率方面都在逐渐提高, 几种应用较广的正反演数值模拟方法对比分析如表 1 和表 2 所示。

Table 1. Forward modeling method and comparative analysis

表 1. 正演模拟方法及对比分析

方法类型	适用条件	计算精度及优缺点			计算效果	计算效率
		网格类型	优点	缺点		
IE	简单的三维地电模型	分割成充分小的单元	只需对异常体进行分割	不适合复杂的三维地质模型	简单模型结果较好, 复杂模型结果差	慢
FDM	复杂地形(各向异性介质, 起伏地形)的地电构造	四面体或者六面体网格	易于编程, 适合求解高精度的三维数值模拟	不能基于非结构网格剖分, 限制了精度	网格间距较小时效果较好, 间距较大时效果较差	较慢
FEM	复杂地电模型, 起伏较大的二维电磁场	四面体或者六面体非结构网格剖分	可基于非结构网格剖分, 可提高精度	内存需求大, 系数矩阵易为病态矩阵	稀疏矩阵使用迭代解法时效果好	较快
SEM	高精度的物理和过程领域	节点插值	可用于大尺度复杂地质结构	精度高度依赖于优化函数	数值积分的精度小于 2 倍空间插值阶数时, 效果好	快

Table 2. Inversion modeling method and comparative analysis**表 2.** 反演模拟方法及对比分析

方法类型	适用条件	计算资源及效率		应用效果
		优点	缺点	
高斯牛顿法	迭代初始值接近真实解	收敛速度快, 迭代次数少	不一定总体收敛	实际应用的局限性很大
有限内存拟牛顿法	高维	收敛速度快, 内存开销少	依赖问题的条件数	求解无约束问题时效果最好
非线性共轭梯度法	高维	反演时间和内存消耗较少	依赖于残差和步长的取值	解决高维问题最有效的方法

5. 总结与展望

1) 本文基于已有的几种数值模拟方法进行了一个总结与分析。FCSEM 三维正演比较成熟, 已经有较多的正演数值模拟方法。最早的积分方程法内存占用少, 适合解决低维问题; 有限差分法计算速度快, 但只适用于规则网格剖分; 有限元法编程简单, 但容易出现病态矩阵; 谱元法比有限元更加灵活, 适合求解大规模复杂矩阵, 是目前正演比较受欢迎的数值模拟方法。

2) 反演数值模拟技术近年来得到了快速的发展, 虽然已有一些方法用于高维反演, 如高斯牛顿法可以减少计算时间, 有限内存拟牛顿法稳定性好、占用内存少, 非线性共轭梯度法反演时间和内存消耗都相对较低, 但是作为实用性反演解释的话, 对复杂模型的模拟能力和计算速度需要继续提高。

3) 随着三维反演数据和模型参数的不断增多, 反演对于计算内存和时间的要求也在不断增加, 现使用的 PC 机和多核单机已经不能满足计算需求。未来我们将继续研究算法的计算速度和效率, 多使用并行, 和多种方法的联合反演来求解大型线性方程组, 最后从理论模型到实际数据反演。

参考文献

- [1] Newman, G.A. and Boggs, P.T. (2004) Solution Accelerators for Large-Scale Three-Dimensional Electromagnetic Inverse Problems. *Inverse Problems*, **20**, 151-170. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/6/S10>
- [2] 底青云, Martyn Unsworth, 王妙月. 复杂介质有限元法 2.5 维可控源音频大地电磁法数值模拟[J]. 地球物理学报, 2004, 47(4): 723-730.
- [3] 底青云, 王若. 可控源音频大地电磁数据正反演及方法应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [4] 汤井田, 何继善. 可控源音频大地电磁法及其应用[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2005.
- [5] Egbert, G.D. and Kelbert, A. (2012) Computational Recipes for Electromagnetic Inverse Problems. *Geophysical Journal International*, **189**, 251-267. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05347.x>
- [6] 林昌洪, 谭捍东, 舒晴, 佟拓, 谭嘉言. 可控源音频大地电磁三维共轭梯度反演研究[J]. 地球物理学报, 2012, 55(11): 3829-3838.
- [7] 翁爱华, 刘云鹤, 贾定宇, 廖祥东, 殷长春. 地面可控源频率测深三维非线性共轭梯度反演[J]. 地球物理学报, 2012, 55(10): 3506-3515.
- [8] 刘云鹤, 殷长春. 三维频率域航空电磁反演研究[J]. 地球物理学报, 2013, 56(12): 4278-4287.
- [9] Haber, E. (2005) Quasi-Newton Methods for Large-Scale Electromagnetic Inverse Problems. *Inverse Problems*, **21**, 305-323. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/1/019>
- [10] 龙志丹. 基于矢量有限元的频率域可控源电磁法三维反演研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 中国地质大学, 2021.
- [11] Benbetti, C.L. and Weeks, W.L. (1968) Electromagnetic Pulse Response of Cylindrical Scatterers. *Antennas & Propagation Society International Symposium*, Boston, 9-11 September 1968, 176-183.
- [12] 任政勇, 陈超健, 汤井田, 周峰, 陈煌, 邱乐稳, 胡双贵. 一种新的三维大地电磁积分方程正演方法[J]. 地球物

- 理学报, 2017, 60(11): 4506-4515.
- [13] 刘永亮, 李桐林, 朱成, 关振伟, 苏晓波. 基于拟线性积分方程法的三维电磁场数值模拟精度分析[J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2017, 47(4): 1268-1277.
- [14] 殷长春, 朴化荣. 三维电磁模拟技术及其在频率测深法中应用[J]. 地球物理学报, 1994, 37(6): 820-827.
- [15] Yee, K. (1966) Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. *IEEE Transactions on Antennas & Propagation*, **14**, 302-307. <https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693>
- [16] 万文武. 基于有限元-谱元法的电磁场数值模拟[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 桂林理工大学, 2021.
- [17] 周印明, 王金海, 胡晓颖, 何展翔, 熊彬. 基于矢量位和标量位的广域电磁法三维有限元数值模拟[J]. 石油地球物理勘探, 2021, 56(1): 181-189+12.
- [18] 殷长春, 贲放, 刘云鹤, 等. 三维任意各向异性介质中海洋可控源电磁法正演研究[J]. 地球物理学报, 2014, 57(12): 4110-4122.
- [19] 胡善政. 可控源音频大地电磁法三维数值模拟研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国地质大学(北京), 2006.
- [20] 许诚, 底青云. 极低频电磁法典型矿区模型三维积分方程法正演研究[C]//中国科学院地质与地球物理研究所2012年度(第12届)学术论文汇编——工程地质与水资源研究室. 2013: 580-581.
- [21] Coggon, J.H. (1971) Electromagnetic and Electrical Modeling by the Finite Element Method. *Geophysics*, **36**, 132-155. <https://doi.org/10.1190/1.1440151>
- [22] Mukherjee, S. and Everett, M.E. (2010) 3D Controlled-Source Electromagnetic Edge-Based Finite Element Modeling of Conductive and Permeable Heterogeneities. *Geophysics*, **76**, F215-F226. <https://doi.org/10.1190/1.3571045>
- [23] Silva, N.V.D, Morgan, J.V., Macgregor, L., et al. (2012) A Finite Element Multifrontal Method for 3D CSEM Modeling in the Frequency Domain. *Geophysics*, **77**, E101-E115. <https://doi.org/10.1190/geo2010-0398.1>
- [24] 王亚璐, 底青云, 王若. 三维 CSAMT 法非结构化网格有限元数值模拟[J]. 地球物理学报, 2017, 60(3): 1158-1167.
- [25] 张钱江, 戴世坤, 陈龙伟, 强健科, 李昆, 赵东东. 多源条件下直流电阻率法有限元三维数值模拟中一种近似边界条件[J]. 地球物理学报, 2016, 59(9): 3448-3458.
- [26] 黄渡, 吴小平. 起伏地形下时间域激发极化法三维非结构有限元数值模拟[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(5): 705-714.
- [27] Bernardi, C., Maday, Y. and Métivet, B. (1987) Spectral Approximation of the Periodic-Nonperiodic Navier-Stokes Equations. *Numerische Mathematik*, **51**, 655-670. <https://doi.org/10.1007/BF01400175>
- [28] Seriani, G. and Priolo, E. (1991) High-Order Spectral Element Method for Acoustic Wave Modeling. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 1561-1564. <https://doi.org/10.1190/1.1888989>
- [29] Komatitsch, D. and Tromp, J. (2002) Spectral-Element Simulations of Global Seismic Wave Propagation-II. Three-Dimensional Models, Oceans, Rotation and Self-Gravitation. *Geophysical Journal International*, **150**, 303-318. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2002.01716.x>
- [30] 魏亦文, 王有学, 张智. 谱元法波场模拟中的属性建模技术[J]. 地球物理学进展, 2017, 32(5): 2091-2096.
- [31] 刘玲. 基于 GLC 多项式谱元法的频率域三维电磁正演模拟研究[D]: [硕士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2018.
- [32] 黄鑫. 基于任意六面体谱元法频率/时间域航空电磁三维正演模拟研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2019.
- [33] Mackie, R.L. and Madden, T.R. (2000) Three-Dimensional Magnetotelluric Inversion Using Conjugate Gradients. *Geophysical Journal International*, **140**, 410-424. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00007.x>
- [34] Spichak V, Popova. (2000) Artificial Network Inversion of Magneto Telluric Data in Terms of Three-Dimensional Earth Macroparameters. *Geophysical Journal International*, **142**, 15-26. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00065.x>
- [35] 谭捍东, 余钦范, John Booker, 魏文博. 大地电磁法三维快速松弛反演[J]. 地球物理学报, 2003, 46(6): 850-854+889.
- [36] 林昌洪, 谭捍东, 佟拓. 大地电磁三维快速松弛反演并行算法研究[J]. 应用地球物理(英文版), 2009, 6(1): 77-83.
- [37] 赵东东, 张钱江, 戴世坤, 等. 基于高斯牛顿法的二维直流电阻率法的快速反演[J]. 中国有色金属学报, 2015(6): 1662-1671.
- [38] Bae, H.S., Pyun, S. and Chung, W. (2012) Frequency-Domain Acoustic Elastic Coupled Waveform Inversion Using the Gauss-Newton Conjugate Gradient Method. *Geophysical Prospecting*, **60**, 413-432.

- <https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.00993.x>
- [39] Ravaut, C., Operto, S., Improta, L., Virieux, J., Herrero, A. and Dell'Aversana, P. (2004) Multiscale Imaging of Complex Structures from Multifold Wide-Aperture Seismic Data by Frequency-Domain Full-Waveform Tomography: Application to a Thrust Belt. *Geophysical Journal International*, **159**, 1032-1056. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02442.x>
- [40] 彭荣华, 胡祥云, 韩波. 基于高斯牛顿法的频率域可控源电磁三维反演研究[J]. 地球物理学报, 2016, 59(9): 3470-3481.
- [41] Marquardt, D.W. (1963) An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**, 431-441. <https://doi.org/10.1137/0111030>
- [42] 吴小平, 徐果明. 利用共轭梯度法的电阻率三维反演研究[J]. 地球物理学报, 2000, 43(3): 420-427.
- [43] 唐传章, 程见中, 严良俊, 冯广业, 周磊, 徐凤姣. 基于边界约束有限内存的拟牛顿 CSAMT 一维反演及应用[J]. 煤田地质与勘探, 2019, 47(5): 193-200.
- [44] 段长生. 基于拟牛顿法和数据空间共轭梯度法的 CSAMT 三维反演研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 成都理工大学, 2020.
- [45] 马逢群, 谭捍东, 孔文新. 基于有限内存拟牛顿法的电阻率法三维主轴各向异性反演研究[J]. 地球物理学进展, 2022, 37(2): 637-647.
- [46] 阮帅. 三维大地电磁有限内存拟牛顿反演[D]: [博士学位论文]. 成都: 成都理工大学, 2015.
- [47] 杨悦, 翁爱华, 张艳辉, 李世文, 唐裕. 可控源有限内存拟牛顿法三维反演及其应用[C]//2018年中国地球科学联合学术年会论文集(二十二)——专题 45: 海洋地球物理、专题 46: 电磁地球物理研究应用及其新进展. 北京: 中国和平音像电子出版社, 2018: 61-62.
- [48] 卢慧芳, 杨月婷. 一种新的修正有限内存拟牛顿法[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2010(1): 34-38.
- [49] 曹晓月, 殷长春, 张博, 等. 基于非结构网格的三维大地电磁法有限内存拟牛顿反演研究(英文) [J]. 应用地球物理(英文版), 2018(z1): 556-565+570.
- [50] Fletcher, R. and Reeves, C.M. (1964) Function Minimization by Conjugate Gradients. *The Computer Journal*, **7**, 149-154. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>
- [51] Polyak, E. and Ribiere, G. (1969) Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *R.I.R.O.*, **3**, 35-43. <https://doi.org/10.1051/m2an/196903R100351>
- [52] Rodi, W.L. and Mackie, R.L. (2012) Nonlinear Conjugate Gradients Algorithm for 2-D Magnetotelluric Inversion. *Geophysics*, **66**, 174-187. <https://doi.org/10.1190/1.1444893>
- [53] Newman, G.A. and Alumbaugh, D.L. (2000) Three-Dimensional Magnetotelluric Inversion Using Non-Linear Conjugate Gradients. *Geophysical Journal International*, **140**, 410-424. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00007.x>
- [54] 强建科, 满开峰, 龙剑波, 鲁凯, ZHU Yue, 陈龙伟, 李俊营, 毛先成. 时间域航空电磁 2.5 维非线性共轭梯度反演[J]. 地球物理学报, 2016, 59(12): 4701-4709.