

# Numerical Study of the Parametric Excitation of the Geodesic Acoustic Mode Continuum by Drift Wave

Jun Yu<sup>1</sup>, Wenlong Shi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang

<sup>2</sup>Unit 63726 of People's Liberation Army, Yinchuan

Email: jyuppp@qq.com

Received: May 25th, 2012; revised: May 30th, 2012; accepted: Jun. 5th, 2012

**Abstract:** The geodesic acoustic modes continuum excitation by the drift waves are numerically studied as a parametric process in the tokamak plasmas with a non-uniform ion temperature profile for which the non-uniform part of the inherent geodesic acoustic mode frequency takes the form of sin function. It is shown that the radial structures of the drift wave sideband are close to the harmonic function, the energies of the geodesic acoustic modes are mainly localized around the resonant points of the parametric excitations, and the growth rate is proportional to the square of the amplitude of the pump wave, which indicates that the corresponding analytical results [Yu J. and Dong J. Q., Phys.Scri., 2010, 82: 045504(1-4)] is reasonable.

**Keywords:** Geodesic Acoustic Modes Continuum; Parametric Process; Drift Waves

## 测地声模连续谱参量激发过程的数值研究

余俊<sup>1</sup>, 施文龙<sup>2</sup>

<sup>1</sup>南华大学数理学院, 衡阳

<sup>2</sup>中国人民解放军 63726 部队, 银川

Email: jyuppp@qq.com

收稿日期: 2012 年 5 月 25 日; 修回日期: 2012 年 5 月 30 日; 录用日期: 2012 年 6 月 5 日

**摘要:** 在托卡马克等离子体中离子温度分布的非均匀部分为正弦函数的情况下, 采用数值计算的方法, 对漂移波激发测地声模连续谱的参量过程进行了研究。结果表明, 漂移波边带模的径向结构与简谐振荡很接近, 测地声模连续谱的振幅在共振点附近具有最大值, 测地声模连续谱的增长率与漂移波的振幅的平方成正比。这表明相应的解析结果[Yu J. and Dong J. Q., Phys.Scri., 2010, 82: 045504(1-4)]是合理的。

**关键词:** 测地声模连续谱; 参量激发; 漂移波

### 1. 引言

托卡马克是一种用磁场来约束等离子体的环形装置, 其目标是实现可控核聚变。等离子体湍流, 特别是漂移波湍流, 是影响磁约束核聚变的主要障碍之一。托卡马克等离子体带状流结构可以抑制漂移波湍流, 从而使得约束得到改善, 因此关于漂移波激发带

状流的研究具有极其重要的意义<sup>[1-10]</sup>。测地声模是带状流的高频分支, 它是由 Winsor 等人于 1968 年首次从理论上提出来的<sup>[3]</sup>。测地声模是静电主导的模式, 其电势扰动的环向模数  $n=0$ , 极向模数  $m=0$ ; 其密度扰动的环向模数  $n=0$ , 极向模数为  $m=0$ 。漂移波激发测地声模的问题是一个多尺度的模式相互作用

的非线性问题, 即小尺度的漂移波湍流激发大尺度的测地声模结构。

Zonca 和 Chen<sup>[8]</sup>的研究表明, 在径向非均匀的等离子体中, 测地声模具有连续谱。由于径向非均匀性是托卡马克等离子体的一个基本特征, 因此在径向非均匀的等离子体中研究漂移波激发测地声模连续谱是一个非常有价值的问题。

Yu 和 Dong<sup>[9]</sup>根据理想磁流体力学方程, 在电子温度为均匀、离子温度为非均匀的等离子体中, 推导出了测地声模连续谱的非线性激发方程。他们假定漂移波边带模在零阶近似下是一个简谐振荡, 对某一特定的径向离子温度分布, 求出了漂移波边带模的一阶展开, 并求出了测地声模的增长率。然而这项解析研究的出发点, 即漂移波边带模在零阶近似下是一个简谐振荡的假定, 并没有得到验证。

本文直接从 Yu 和 Dong 推导出的测地声模连续谱的非线性激发方程出发, 从数值上计算漂移波边带模电势的径向结构分布, 以及相应的测地声模径向电场的径向分布图。最后还将给出测地声模增长率与漂移波泵波振幅的依赖关系。

## 2. 基本模型

根据文献[9]中的方程(8)和方程(9), 可以得到

$$D_s \phi_{m_0}^s = -\frac{\omega |\varepsilon_0|^2}{D_G} \frac{d^2 \phi_{m_0}^s}{dx^2}, \quad (1)$$

其中  $D_s$ 、 $D_G$  分别是漂移波边带模和测地声模的色散关系算符,  $\omega$  是测地声模的频率,  $|\varepsilon_0|^2$  是漂移波泵波振幅的平反,  $\phi_{m_0}^s$  是漂移波边带模的电势,  $x$  是径向坐标。假设我们所考察的区域为

$x \in [a - x_0, a - x_0 + L]$ , 其中  $L \leq 0$ 。若令  $z = x - a + x_0$ , 则所考察的区域为  $z \in [0, L]$ 。如果进一步设  $r = z - L/2$ , 这所考察的区域成为  $r \in [-L/2, L/2]$ 。考虑一个周期的测地声模频率分布函数:

$$\omega_G(r) = \omega_{G0} \left[ 1 + \alpha \sin\left(\frac{\pi r}{L}\right) \right], \quad (2)$$

其中  $\alpha \geq 0$ 。此时, 可以将方程(1)化为如下的二阶常微分方程

$$\frac{d^2 \phi_{m_0}^s}{dr^2} = -\frac{\hat{\omega}(1+\gamma)}{\hat{\omega}D/(\hat{\omega}^2 - \hat{\omega}_G^2) - (\hat{\omega}_0 - \hat{\omega})} \phi_{m_0}^s, \quad (3)$$

其中  $\hat{r}$ ,  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\omega}_G$  和  $\hat{\omega}_0$  分别是归一化的径向坐标、归一化的本征频率、归一化的测地声模频率以及归一化的漂移波泵波频率:  $\hat{r} = r/\rho_s$ ,  $\hat{\omega} = \omega/\omega_{G0}$ ,  $\hat{\omega}_G = \omega_G/\omega_{G0}$ ,  $\hat{\omega}_0 = \omega_0/\omega_{G0}$ 。 $\gamma$  定义为  $\gamma = (m_0 \rho_s/a)^2$ , 而  $D = |\varepsilon_0|^2/\rho_s^2 \omega_{G0}^2$  是归一化了的漂移波泵波振幅的平方。

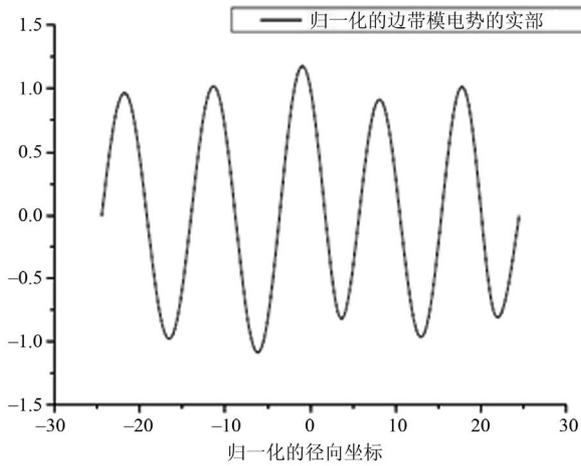
## 3. 数值求解

取一组典型的托卡马克等离子体参数, 其中托卡马克大半径  $R_0 = 400$  cm, 小半径  $a = 100$  cm, 环向场  $B_0 = 5 \times 10^4$  G, 电子温度  $T_{e0} = 1.6 \times 10^{-8}$  erg。设密度径向变化的特征尺度  $L_n = 30$  cm, 所考虑区域的长度  $L = 10$  cm, 漂移波的极向模数  $m_0 = 200$ , 泵波的振幅为  $|\phi_{m_0}^0| \sim 0.1 \times (\rho_s/L_n)$ , 则可以计算出  $\hat{L}_0 = L/\rho_s = 48.94$ ,  $\hat{\omega}_0 = 3.3$ ,  $\hat{\omega}_G(x) = \omega_G(x)/\omega_{G0}$ ,  $\varepsilon = 0.167$ , 并可设  $D$  的适当取值范围为 0.1 到 0.2。

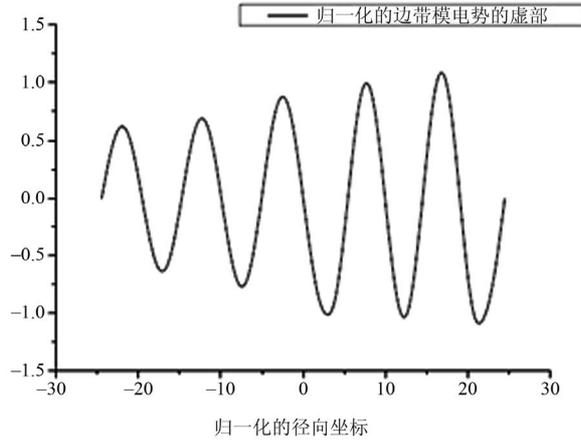
图 1 给出了当  $\alpha = 0.5$ , 归一化的共振频率为  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.839$  以及测地声模的增长率为 0.0537 的时候, 漂移波边带模电势的实部和虚部的径向分布。这是用求解常微分方程的程序——shooting code 对方程(3)进行数值求解的结果。可以看出, 漂移波边带模的实部和虚部在径向都几乎是简谐振荡, 这与 Yu 和 Dong<sup>[9]</sup>给出的解析结果是一致的。事实上, 在文献[9]中, 其解析求解的基础就是假设漂移波边带模在零阶近似下是一个简谐函数。因此, 只要这一假设成立, 那么解析求解的整个过程就是正确的。

图 2 给出了当  $\alpha = 0.5$ , 归一化的共振频率为  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.839$  以及测地声模的增长率为 0.0537 的时候, 测地声模径向电场的实部和虚部的径向分布。这是利用上面数值求解的边带模的径向分布, 根据文献[9]的中方程(23)计算出来的。可以看出, 测地声模的波形在靠近零和靠近右边界附近具有最大振幅。这是因为, 由于我们假设  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.839$ , 此时有两个共振点, 一个是在  $x_0 = 0$  点附近, 并处于  $x_0 = 0$  点右边, 另一个共振点处于右边界附近的内侧。由于测地声模在共振点附近最容易激发, 因此其径向结构在右边界附近或零附近取最大值。

图 3 给出了  $\alpha = 0.8$ ,  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.47$  时归一化的测地声模增长率随参数归一化的泵波振幅的平方的变化关系, 其中  $\hat{\omega}_G(x_0)$  是归一化的共振频率。可以看出随着参数  $D$  的增长, 测地声模增长率几乎是线性



(a)



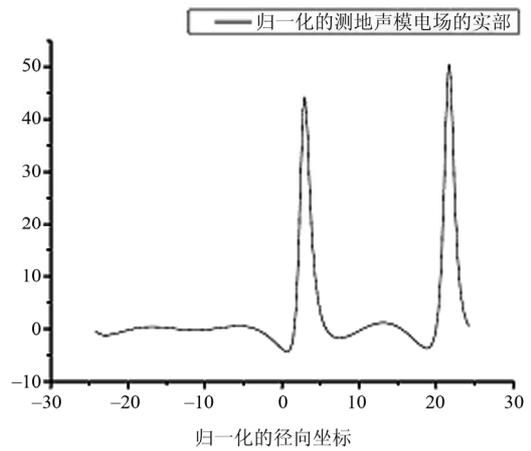
(b)

Figure 1. (a) The radial profile of the real part of the potential of the drift wave side band; (b) The radial profile of the imaginary part of the potential of the drift wave side band  
图 1. (a) 归一化的漂移波边带模电势的实部的径向分布; (b) 归一化的漂移波边带模电势的虚部的径向分布

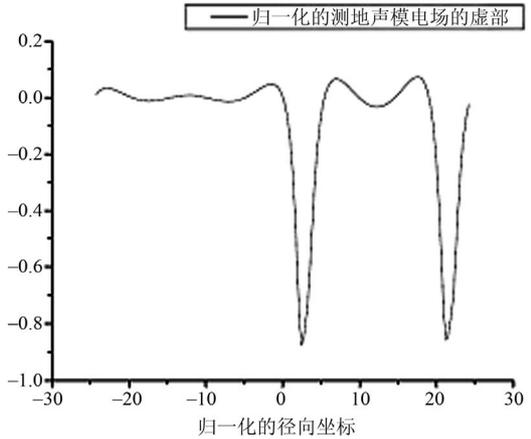
增长。这与文献[9]给出的解析结果是一致的。因为，根据文献[9]中的方程(19)，当归一化的增长率和  $\alpha$  值的比值远小于归一化的共振频率的时，测地声模的增长率是漂移波泵波振幅的平方的线性函数。

#### 4. 结论与讨论

本文用 shooting code 对漂移波边带模的非线性激发方程进行数值求解，给出了漂移波边带模电势的实部和虚部的径向分布图。数值计算的结果表明漂移波边带模电势的实部和虚部都几乎是一个简谐振荡，这表明文献[9]的解析求解的出发点，即假设漂移波边带模电势为一个简谐函数，是正确的。因此文献[9]给出的解析求解的整个过程是可靠的。



(a)



(b)

Figure 2. (a) The radial profile of the real part of the geodesic acoustic mode electric field; (b) The radial profile of the imaginary part of the geodesic acoustic mode electric field  
图 2. (a) 归一化的测地声模电场的实部的径向分布; (b) 归一化的测地声模电场的虚部的径向分布

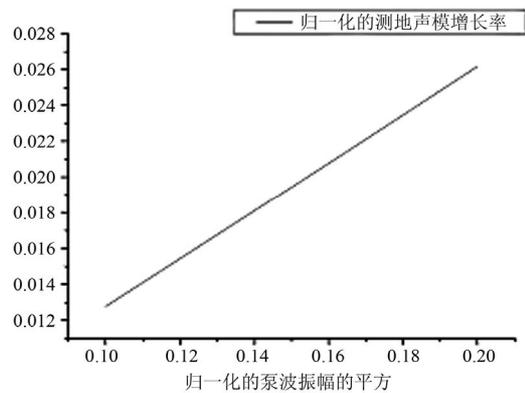


Figure 3. The dependence of the normalized growth rate of the geodesic acoustic mode on the normalized value of the square of the amplitude of the pump wave ( $\alpha = 0.8$ ,  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.47$ )  
图 3. 归一化的测地声模增长率随参数归一化泵波振幅平方的变化关系( $\alpha = 0.8$ ,  $\hat{\omega}_G(x_0) = 0.47$ )

根据文献[9]中关于测地声模径向电场的解析表达式和用 shooting code 给出的边带模的结果, 计算出了径向电场的径向分布图, 结果表明径向电场在共振点附件取最大值。

最后用 shooting code 对测地声模增长率进行数值计算, 表明在归一化的增长率和  $\alpha$  的比值远小于归一化的共振频率的时候, 测地声模增长率和漂移波泵波振幅的平方成正比, 这也和文献[9]的解析结果一致。

## 5. 致谢

本工作得到 973 子项目(编号 2009GB105002)以及国家自然科学基金(编号 10775066)的资助。

## 参考文献 (References)

[1] L. Chen. Waves and instabilities in plasmas. Singapore City: World

- Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1987: 152-178.
- [2] P. H. Diamond, et al. Zonal flow in plasma—A review. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2005, 47(5): R35-R161.
- [3] N. Winsor, J. L. Johnson and J. M. Dawson. Geodesic acoustic waves in hydrodynamic systems. *Physics of Fluids*, 1968, 11: 2448-2450.
- [4] S. Wang. Zonal flows in tokamak plasmas with toroidal rotation. *Physical Review Letters*, 2006, 97: Article ID: 085002.
- [5] Z. Gao, et al. Eigenmode analysis of geodesic acoustic modes. *Physics of Plasmas*, 2008, 15: Article ID: 072511.
- [6] G. S. Xu, et al. Direct measurement of poloidal long-wavelength  $E \times B$  flows in the HT-7 tokamak. *Physical Review Letters*, 2003, 91(12): Article ID: 125001.
- [7] K. J. Zhao, et al. Toroidal symmetry of geodesic acoustic mode zonal flow in a tokamak plasma. *Physical Review Letters*, 2006, 96(25): Article ID: 255004.
- [8] F. Zonca, L. Chen. Radial structure and nonlinear excitation of geodesic acoustic modes. *Europhysics Letters*, 2008, 83: Article ID: 35001.
- [9] J. Yu, J. Q. Dong. Parametric excitation of geodesic acoustic modes continuum by drift waves. *Physica Scripta*, 2010, 82(4): Article ID: 045504.
- [10] N. Chakrabarti, et al. Nonlinear excitation of geodesic acoustic modes by drift waves. *Physics of Plasmas*, 2007, 14(5): Article ID: 052308.