

Experimental Retrieval of the Effective Parameters of Bi-Anisotropic Metamaterials

Saisai Wang, Zhihong Hang*

Collaborative Innovation Center of Suzhou Nano Science and Technology, College of Physics Optoelectronics and Energy, Soochow University, Suzhou Jiangsu

Email: 1033991273@qq.com, *zhhang@suda.edu.cn

Received: Apr. 2nd, 2016; accepted: Apr. 16th, 2016; published: Apr. 21st, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In order to realize various intriguing applications by metamaterials, it is essential to obtain the effective parameters of the micro-structures composing metamaterials. In this paper, we propose an experimental method to retrieve all of the 16 effective parameters of planar bi-anisotropic metamaterials. The relationship between the scattering matrix and the effective parameters is theoretically proposed and the experimental measurement for the scattering matrix is accomplished. We also show the validity of our retrieval method using two microstructures: the cross and the “wan” shaped microstructures. Compared with previous proposed experimental retrieval methods, our experimental method is more universal and can be applicable to any planar structures.

Keywords

Metamaterial, Effective Parameter Retrieval, Scattering Matrix

双各向异性超材料的有效参数反演法

王赛赛, 杭志宏*

苏州大学物理与光电·能源学部, 苏州纳米科技协同创新中心, 江苏 苏州

Email: 1033991273@qq.com, *zhhang@suda.edu.cn

*通讯作者。

文章引用: 王赛赛, 杭志宏. 双各向异性超材料的有效参数反演法[J]. 应用物理, 2016, 6(4): 43-53.

<http://dx.doi.org/10.12677/app.2016.64007>

收稿日期: 2016年4月2日; 录用日期: 2016年4月16日; 发布日期: 2016年4月21日

摘要

为了实现各种有趣的应用, 获得由微结构组成的超材料的有效参数是十分必要的。这个工作提出了一个双各向异性超材料16个有效参数反演的实验方法。我们从理论上提出了有效参数和散射矩阵之间的联系, 并完成了散射矩阵的实验测量。我们也通过十字形结构和万字形结构证明了这种反演方法的有效性。相比之前的实验反演方法, 我们所提出的方法更具普适性, 可以用于任何平面结构。

关键词

超材料, 有效参数反演, 散射矩阵

1. 引言

超材料, 即由人工微结构单元构成的材料, 其材料的性质不仅取决于其化学性质, 也取决于微结构的形式。利用超材料, 可以实现许多自然界材料中, 无法实现或很难实现的性质, 如负折射, 零折射等。因此超材料这个概念自从被提出之后, 很快成了一个热门的研究话题。在超材料的研究中, 如何获得超材料的有效参数, 是一个至关重要的问题。

早在 1998 年, 就已经有学者提出了获得超材料电磁参数的方法[1], 通过数值计算电磁场的比值, 就可以得到材料的电磁参数, 虽然这种方法在数值计算中很容易得到材料的电磁参数, 但是却没有办法运用到实验中去。另外一种方法, 通过近似解析模型来获取有效电磁参数[2], 利用这种方法可以从结构的几何特性去推断其物理特征, 但用这种方法很难解决复杂的物理模型。除去以上两种方法之外, *Smith* 等人提出了通过透反射系数(S 参数)来反演得到材料的有效参数法[3]。这种方法在理论计算和实验中都能有很好的应用, 也是最经典最成功的反演算法, 在很多经典的超材料中都得到的应用。然而, 这种反演算法虽然被很多经典的超材料结构引用[4]-[7], 但是当结构变得复杂, 这种方法也随之更加复杂。对于一些特殊结构的超材料[8]-[10], 由于其结构的不对称性, 电场和磁场已经不能被单独研究, 还要考虑电场和磁场之间的耦合, 反演算法计算出的有效参数不仅包括介电常数和磁导率, 还应该考虑电磁场的耦合系数。这时候, 必须从介质的前后面分别入射电磁波, 通过更多的透反射系数, 来解出结构有效参数的本征态。很明显, *Smith* 反演算法已经不在适用于这种复杂结构。

由于之前工作的局限性, 本文提出了一种普适的有效获取双各向异性材料有效参数的实验方法。我们首先通过理论推导得出散射矩阵参数(S 参数)与双各向异性材料 16 个有效参数的关系。然后, 我们设计了微波实验, 来测量散射矩阵参量。最后, 我们利用这种反演方法得到了十字形结构和万字形结构的有效参数, 并分析其物理意义。

2. 从散射矩阵理论推导有效参数

2.1. 从 S 参数获取有效参数

我们从一个均匀的超材料介质板出发, 如图 1 所示。

介质板的厚度为 d , 我们将超材料介质板的中心设为原点。我们假定此介质板摆放在空气中, y 偏振平面电磁波从 $x = -d/2$ 垂直入射。透射波为 $E_t = S_{yy}^{++} \hat{y} + S_{yz}^{++} \hat{z}$, 反射波为 $E_r = S_{yy}^{--} \hat{y} + S_{yz}^{--} \hat{z}$, 其中 S_{yy}^{++} , S_{yz}^{++} , S_{yy}^{--} , S_{yz}^{--} 是 S 参数, “ y ”, “ z ” 表示电场的偏振方向, “+”, “-” 表示入射波和反射波, 前者代表

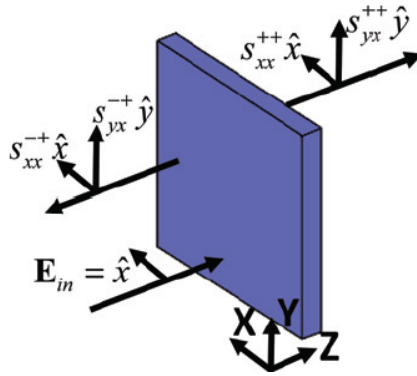


Figure 1. The schematic diagram of transmission and reflection through anisotropic slab
图 1. 各向异性介质板的透反射示意图

接收方, 后者代表发射方。\$S_{yy}^-\$ 代表 \$y\$ 偏振电磁波+向发射, 在-向, 也就是发射方向接受的 \$y\$ 偏振电磁波。请注意虽然只有 \$y\$ 偏振电磁波入射, 出射/反射的平面电磁波既可以有 \$y\$ 偏振分量也可以有 \$x\$ 偏振分量。在这里, 我们约定沿着 \$x\$ 轴方向为正方向。

首先根据亥姆霍兹 - 洛伦茨模型, 写出麦克斯韦方程组:

$$\begin{aligned}\partial_x E_y &= ik_0 B_z \\ \partial_x E_z &= -ik_0 B_y \\ \partial_x H_y &= -ik_0 D_z \\ \partial_x H_z &= ik_0 D_y\end{aligned}\quad (1)$$

波沿着 \$x\$ 方向传播, 即 \$B_x = D_x = 0\$, \$k_0\$ 为空气中的波矢。材料的本构关系(Constitution Relation)我们记为:

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = [P] \begin{pmatrix} D_y \\ D_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}\quad (2)$$

\$[P]\$ 就是我们要求解的超材料有效参数。

考虑到我们目前采用的传播方向, (1)式就可以用矩阵形式表示成:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = ik_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_y \\ D_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = ik_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [P]^{-1} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}\quad (3)$$

假设:

$$[F] = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad [A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则(3)式可简化写成:}$$

$$\frac{\partial [F]}{\partial x} = ik_0 [A][P]^{-1}[F]\quad (4)$$

我们主要需要通过实验/仿真得出入射样品的电磁波来确定样品的有效参量, 所以样品在入射/出射面的信息非常关键。在 $x = -d/2$ 和 $x = d/2$, 也就是待测样品的两个边界的电场和磁场记为 E_1, H_1 和 E_2, H_2 。

对(4)式进行从 $-d/2$ 到 $d/2$ 的积分: $\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\partial [F]}{[F]} = \int_{-d/2}^{d/2} ik_0 [A][P]^{-1} dx$ 。

解得: $[F]\left(\frac{d}{2}\right) = e^{ik_0 d [A][P]^{-1}} [F]\left(-\frac{d}{2}\right)$, 展开为

$$\begin{pmatrix} E_{2y} \\ E_{2z} \\ H_{2y} \\ H_{2z} \end{pmatrix} = \exp\left(ik_0 d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [P]^{-1}\right) \begin{pmatrix} E_{1y} \\ E_{1z} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

由于材料是各向异性, 而且结构上存在不对称性, 我们在这里明确一个方向, 满足这样的关系式:

$$\begin{aligned} E_{iy} &= E_{iy}^+ + E_{iy}^- \\ E_{iz} &= E_{iz}^+ + E_{iz}^- \\ H_{iy} &= -E_{iy}^+ + E_{iy}^- \\ H_{iz} &= -E_{iz}^+ + E_{iz}^- \end{aligned} \quad (6)$$

其中, H, E 满足 $\hat{E} \times \hat{H} = \hat{k}$, $i = (1, 2)$, 表示不同的区域, “y” 和 “z” 表示平面波的偏振方向, 把上述关系式写成矩阵的形式:

$$\begin{pmatrix} E_{iy} \\ E_{iz} \\ H_{iy} \\ H_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{iy}^+ \\ E_{iz}^+ \\ E_{iy}^- \\ E_{iz}^- \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} E_{iy}^+ \\ E_{iz}^+ \\ E_{iy}^- \\ E_{iz}^- \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{其中: } [B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对(5)式两边同时乘上 $\exp\left(-\frac{ik_0 d}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [P]^{-1}\right)$, 并当 d 很小的时候对其进行泰勒展开, 同时

联合(7)式, 可得:

$$\left([I] - \frac{ik_0 d}{2} [A][P]^{-1}\right) [B] \begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix} = \left([I] + \frac{ik_0 d}{2} [A][P]^{-1}\right) [B] \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中, $[I]$ 是 4×4 的单位矩阵。

(8)式两边同乘 $[A]^{-1}$, 并对 $\begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix}$ 进行展开后, 可以得到:

$$\begin{pmatrix} E_{2y}^+ + E_{1y}^- \\ E_{2z}^+ + E_{1z}^- \\ E_{1z}^- + E_{2z}^+ \\ E_{2y}^+ - E_{1y}^- \end{pmatrix} - \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} [B] \begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1y}^+ + E_{2y}^- \\ E_{1z}^+ + E_{2z}^- \\ -E_{1z}^- + E_{2z}^+ \\ E_{1y}^+ - E_{2y}^- \end{pmatrix} + \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} [B] \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix} \quad (9)$$

同时, 我们知道关系式:

$$\begin{pmatrix} E_{2y}^+ + E_{1y}^- \\ E_{2z}^+ + E_{1z}^- \\ E_{1z}^- + E_{2z}^+ \\ E_{2y}^+ - E_{1y}^- \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_{1y}^+ + E_{2y}^- \\ E_{1z}^+ + E_{2z}^- \\ -E_{1z}^- + E_{2z}^+ \\ E_{1y}^+ - E_{2y}^- \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix}$$

带入(9)式得:

$$\left([I] - \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} \right) [B] \begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix} = \left([I] + \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} \right) [B] \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix} \quad (10)$$

我们同时给出 16 个 S 参数的关系式:

$$\begin{pmatrix} E_{2y}^+ \\ E_{2z}^+ \\ E_{1y}^- \\ E_{1z}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{yy}^{++} & S_{yz}^{++} & S_{yy}^{+-} & S_{yz}^{+-} \\ S_{zy}^{++} & S_{zz}^{++} & S_{zy}^{+-} & S_{zz}^{+-} \\ S_{yy}^{-+} & S_{yz}^{-+} & S_{yy}^{--} & S_{yz}^{--} \\ S_{zy}^{-+} & S_{zz}^{-+} & S_{zy}^{--} & S_{zz}^{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} E_{1y}^+ \\ E_{1z}^+ \\ E_{2y}^- \\ E_{2z}^- \end{pmatrix} \quad (11)$$

把(11)式代入(10)式可得:

$$[B]^{-1} \left([I] - \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} \right)^{-1} \left([I] + \frac{ik_0 d}{2} [P]^{-1} \right) [B] = [S] \quad (12)$$

对(12)式进行代数运算后可得:

$$[P] = ik_0 d \left(\frac{[I]}{2} + [B]([S] - [I])^{-1} [B]^{-1} \right) \quad (13)$$

对于 $[S]$ 的矩阵元, yy 表示接收电场和发射电场的偏振方向, $++$ 分别表示出射和发射的电磁波的方向。有些超材料的结构复杂, 而且有低对称性, 电场和磁场不但可以单独起作用, 由于电磁场的共振, 它们还可以发生耦合, 这些在双各向异性材料以及手性材料中普遍存在。这时我们用 16 个参数矩阵来表示 $[P]$, $[P]$ 中不光含有介电常数 ϵ 和磁导率 μ 的张量形式, 还含有耦合系数的张量形式, 分别用 ξ, ζ 来表示, 因此 $[P]$ 的完整形式为:

$$[P]^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} & \xi_{yy} & \xi_{yz} \\ \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} & \xi_{zy} & \xi_{zz} \\ \zeta_{yy} & \zeta_{yz} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \zeta_{zy} & \zeta_{zz} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \quad (14)$$

全波模拟和实验的方法, 都可以得到矩阵 $[S]$, 从而根据(13)式, 就可以求解出 $[P]$ 。

于是, 我们得到了 16 个有效参数和 16 个 S 参数之间的关系, 从而对于那些结构复杂, 低对称性, 电磁耦合的双各向异性或者手型材料, 不光可以反演计算出介电常数, 磁导率的张量形式, 还可以反演计算

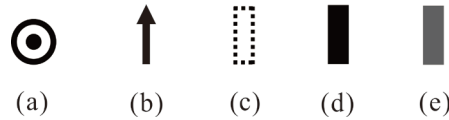
出两个耦合项的张量形式, 对比与经典的 Smith 反演算法, 已经对求解超材料结构的有效参数有了很大的发展, 这种计算方法更有普适性, 适用于最一般的双各向异性材料有效参数的获得, 通过测出的 16 个 S 参数, 利用公式(13)便可得到 16 个有效参数。接下来, 我们将重点讨论, 如何在实验上测得 16 个 S 参数。

2.2. S 参数的实验测量

我们利用微波网络分析仪(Agilent E5071C)进行微波发射和接收。一块大背景铝板上开了一个 $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ 的孔。一对北京西宝电子出品的 HA90-20S X 波段(8.2~12.4 GHz)角锥喇叭天线(照片中蓝色)(图 2)被用来发射和接收信号。选取的原则是我们希望设计的超材料工作频段在 10 GHz 附近, 并且喇叭天线尺寸尽可能小从而可以摆放在样品同侧接收反射信号。由于喇叭天线发射出的电磁波只是近平面波, 因此我们在背景板上贴上一层 8 cm 厚的吸波材料, 这样可以把电磁波逐渐匹配的更加接近平面波, 从而提高实验结果的正确性。样品将贴在铝板的背面。这样我们可以保证一个 $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ 的平面电磁波可以入射到样品上。

背景板固定在铁架上, 要尽可能的悬挂平整, 底部要保证平稳, 如果在实验过程中, 背景板摇晃, 就会干扰到透反射相位的测量。摆放喇叭天线的时候, 尽可能的使天线对准天线的中心, 这样可以有更多的电磁波入射在样品上, 同时有更多的信号被接收到, 从而可以减少噪音对实验结果的影响。在粘贴样品的时, 如果样品的厚度比较小, 则尽可能将样品贴的平整, 更重要的一点就是, 保证样品上微结构与电磁波偏振方向的关系, 例如: 垂直, 平行等。天线喇叭到样品的距离一般为 10 倍的波长左右, 过近或者过远都会对实验结果产生影响。

我们用(a)来表示 E_x , (b)来表示 E_y , (c)来表示空气, (d)来表示 PEC, (e)来表示样品。通过这些简单的图形组合成的示意图, 就可以清晰的阐述实验过程以及实验方法。



如图 3(a)所示: 把两个喇叭并排放, 首先在偏振方向相同的情况下, 使得两个喇叭的天线的中垂线通过正方形孔的中心。电场偏振方向一致, 不放 PEC 和样品, 放置好以后, 在网分仪上依次点击 *data-off/data-memory/data-memory*。首先是把网分仪中存留的数据给清除掉, 然后再把当下的环境场保存下来, 接着再把环境场从将来的测量结果中扣除掉。这样做的目的是: 把当下实验环境中的场清除干净, 以保证接收到的场全部来自样品的反射。如图 3(b), 把 PEC 贴在背景板的开孔处, 保存数据, 记为 A。如图 3(c), 把 PEC 慢慢拿下来以后, 在贴上样品, 保存数据, 记为 B。如图 3(d), 这时候保证一个发射喇叭位置不变, 把另外一个喇叭的偏振方向旋转 90 度, 同时保证两个喇叭的天线的相对位置不发生变化, 在网分仪上依次点击 *data-off/data-memory/data-memory*。如图 3(e), 在贴上样品, 和之前贴的位置尽可能保持一致, 避免实验测量的错误, 然后保存数据, 记为 C。有了 A, B, C 三组数据, 就可以计算出 $[S]$ 中的部分反射系数的参数:

$$\begin{aligned}
 \text{amplitude}(S_{31}) &= \frac{\text{amplitude}(B)}{\text{amplitude}(A)}, \\
 \text{phase}(S_{31}) &= -(\text{phase}(B) - \text{phase}(A) + 180), \\
 \text{amplitude}(S_{41}) &= \frac{\text{amplitude}(C)}{\text{amplitude}(A)}, \\
 \text{phase}(S_{41}) &= -(\text{phase}(C) - \text{phase}(A) + 180),
 \end{aligned} \tag{15}$$

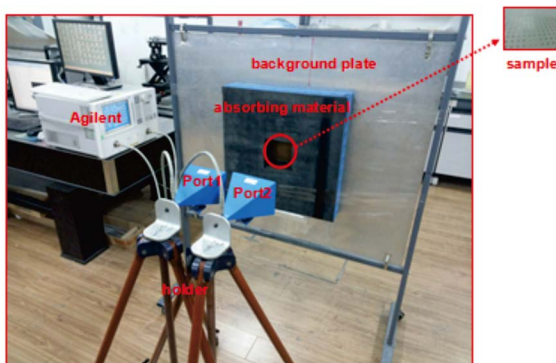


Figure 2. Picture of our retrieval experiment platform

图 2. 实验测量平台

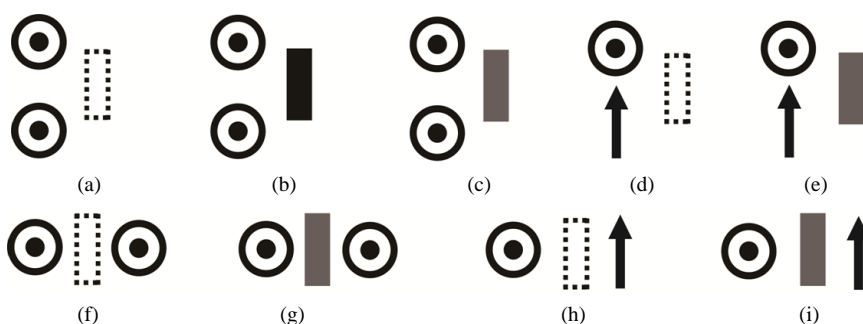


Figure 3. The schematic diagrams of experimental processes

图 3. 实验测量过程示意图

同理, 我们还可以得到 S_{32} , S_{42} , S_{13} , S_{23} , S_{14} , S_{24} 。

如图 3(f) 示, 反射系数的测量结束以后, 开始测量透射系数。固定一只喇叭位置不变, 把另外一只喇叭转移到背景板的另外一侧, 并使这只喇叭的接收天线对准方形孔的中心, 尽可能多的接收到信号。两个喇叭天线的偏振方向要一致, 放置好以后, 在网分仪上点击 *data-off*, 目的是清除网分仪中的数据。然后在把空场的数据保存下来, 记为: $A1$ 。如图 3(g) 所示, 贴上样品以后, 保存下数据, 记为 $B1$ 。接下来, 撤下样品, 并把接收喇叭旋转 90 度, 变换其偏振方向, 调整喇叭的位置, 保证喇叭里面接收天线的位置不发生变化, 如图 3(h)。在网分仪上设置: *data-off/data-memory/data-memory*。如图 3(i), 贴上样品, 保存下数据, 记为 $C1$ 。测量得到了 $A1$, $B1$, $C1$ 这三组数据, 就可以得到一些反射系数的参数:

$$\begin{aligned} \text{amplitude}(S_{11}) &= \frac{\text{amplitude}(B1)}{\text{amplitude}(A1)}, \\ \text{phase}(S_{11}) &= -(\text{phase}(B1) - \text{phase}(A1)), \\ \text{amplitude}(S_{21}) &= \frac{\text{amplitude}(C1)}{\text{amplitude}(A1)}, \\ \text{phase}(S_{21}) &= -(\text{phase}(C1) - \text{phase}(A1)), \end{aligned} \quad (16)$$

同理我们还可以得到 S_{12} , S_{22} , S_{33} , S_{34} , S_{43} , S_{44} 。

至此, 16 个 S 参数, 我们通过实验的方法已经全部测量出来, 带入到公式(13), 便可以得到材料的 16 个有效参数。

注: $[S]$ 的矩阵元的下标可以用数字来表示, 即

$$\begin{pmatrix} S_{yy}^{++} & S_{yz}^{++} & S_{yy}^{+-} & S_{yz}^{+-} \\ S_{zy}^{++} & S_{zz}^{++} & S_{zy}^{+-} & S_{zz}^{+-} \\ S_{yy}^{--} & S_{yz}^{--} & S_{yy}^{+-} & S_{yz}^{+-} \\ S_{zy}^{--} & S_{zz}^{--} & S_{zy}^{+-} & S_{zz}^{+-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \quad (17)$$

这样, 我们便得到了 S 参数矩阵元在实验上的测量方法, 通过测量出的 S 参数矩阵, 利用公式(13)便可很方便地得出有效参数, 实现双各向异性有效参数的反演。下面通过两个实例来展示这种有效参数的反演法。

3. 双各向异性材料反演举例

3.1. 十字形结构

我们设计了这样一个各向异性的微结构单元, 如图 4 所示。该结构由介质板和铜制金属线组成, 其中金属线相互垂直交叉。

衬底是介电常数为 $4.22 + 0.05i$ 的 $FR-4$ 的介质板, 单面附着垂直交叉结构, 材质为铜。 $P = 5$ mm, 板厚 0.4 mm, 介质板上的铜层厚度为 50 μm , $w = 0.2$ mm, $d_1 = 0.6$ mm, $d_2 = 0.6$ mm, $l_1 = 4$ mm, $l_2 = 3$ mm。通过前面介绍的实验方法, 我们测出了散射矩阵的前两列的 S 参数, 如图 5, 由于图 4(b)结构没有打破时间反演对称, 因此当我们从样品另外一面入射电磁波时, 透反射结果并没有发生变化, 对应的散射矩阵后两列的 S 参数和前两列的相同。

我们把实验测量得到的透反射系数利用公式(13)进行反演, 就会得到如下参数 $[P]^{-1}$ 矩阵的每一个值, 由于结构的旋转对称性, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$, 其他参数的关系也是如此。此结构不存在磁共振, 磁电也不耦合, 所以 $\mu_{yy} = \mu_{zz} = 1$, $\mu_{yz} = \mu_{zy} = 0$, ζ , ζ 所有项都应该为零(我们实验上也得到相同的结果)。由于我们的结构只是将一个长短不一的十字结构摆放在 45° 方向, 我们把反演得到的 ε 和 μ 进行变换, 其参数变换结果等同于把图 4(b)的交叉结构逆时针旋转 45 度后(a)结构的参数, 旋转得到的(a)结构可以通过 *Smith* 的方法进行反演计算。我们给出(b)结构到(a)结构的参数变换关系, 如公式(18), 这里 $\theta = 45^\circ$ 。通过计算得到两种结构的参数关系: $\varepsilon_d = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_a = \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yz}$ 。图 6 就是实验测量值的反演结果和理论反演结果。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_d & 0 \\ 0 & \varepsilon_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$[P]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_a}{2} & \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_a}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_a}{2} & \frac{\varepsilon_d + \varepsilon_a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. 万字形结构

我们还设计了万字型结构的双各向异性微结构单元, 如图 7, 这种双层结构会发生电磁耦合。首先给出电磁耦合的公式:

$$\begin{aligned} B_x &= \zeta_{xx} E_x + \zeta_{xy} E_y + \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y \\ B_y &= \zeta_{yx} E_x + \zeta_{yy} E_y + \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y \end{aligned} \quad (19)$$

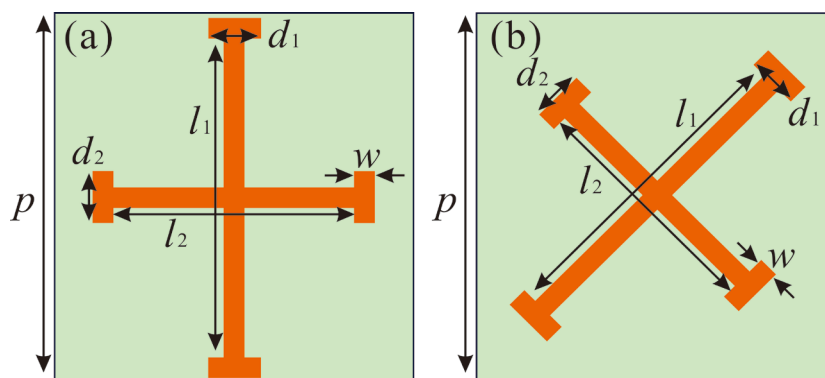


Figure 4. The schematic pictures of the structures of cross-shaped bi-anisotropic metamaterials. (a) Original cross structure; (b) Structure rotated by 45 degree
图 4. 双各向异性十字结构示意图。(a) 水平结构; (b) 旋转 45 度的结构

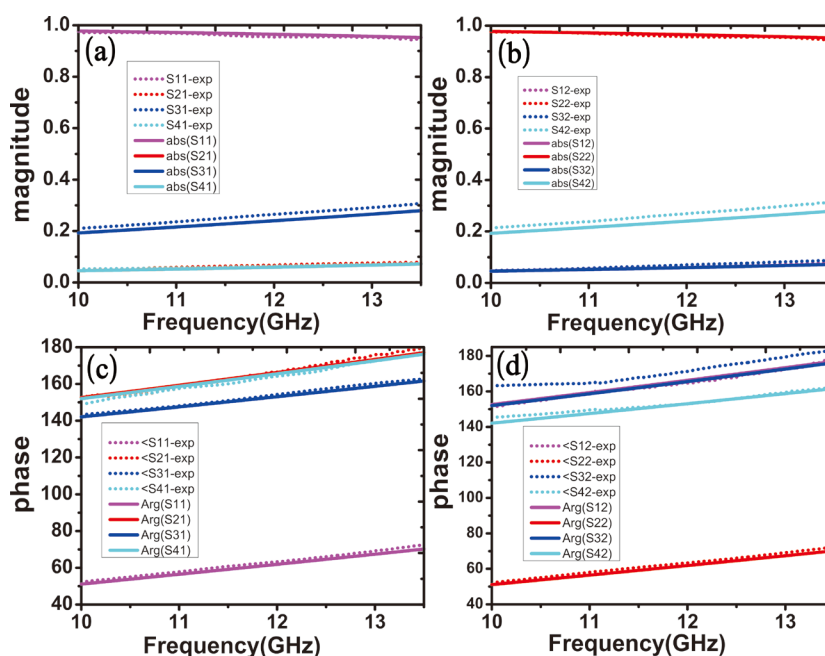


Figure 5. Comparison between experimentally obtained scattering matrix elements and those from simulation results. (a) (b) Transmission/reflection amplitude; (c) (d) Transmission/Reflection phase. The results from simulations are shown in solid lines and our experimental results are indicated in dashed line
图 5. 散射矩阵元的实验和理论对比图。(a) (b)透射/反射的振幅; (c) (d) 透射/反射的相位。实线表示理论值, 虚线表示实验值

从公式中不难看出, 电场和磁场都会对磁场强度产生影响。耦合系数是我们重点讨论的, 因此, 我们不再讨论介电常数和磁导率。

图 7 所示结构单元, 是一块介质板, 前后都附着万字型铜层结构。其中: $a_x = a_y = 6 \text{ mm}$, $l_1 = l_2 = 5.3 \text{ mm}$, $d_1 = d_2 = 1.8 \text{ mm}$, $w = 0.6 \text{ mm}$, $t = 0.4 \text{ mm}$, 背面结构相比正面结构的旋转角度为 20 度。介质板的介电常数为 $\epsilon = 4.4 + 0.02i$, 介质板表面铜层的厚度 $t_{\text{cu}} = 50 \text{ }\mu\text{m}$ 。

按一定比例同时缩短后面铜层的 l_2 和 d_2 , 这里我们定义: 当 $l_1 = l_2$, $d_1 = d_2$ 时, 该结构按周期排列成的样品记为“#1”号样品, 当 $l_2 = 0.72l_1$, $d_2 = 0.72d_1$ 时, 该结构按周期排列成的样品记为“#2”号样品。我们利用上文描述的 16 个有效参数的测量方法, 测量出了这两种结构的 S 系数, 在根据公式(13),

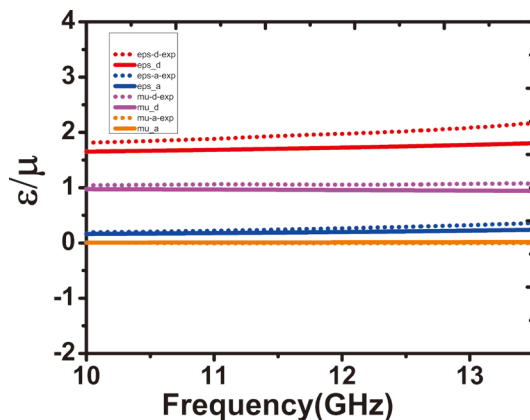


Figure 6. Measured retrieval parameters comparing with simulation results
 图 6. 测量值和理论计算值反演得到的电磁参数

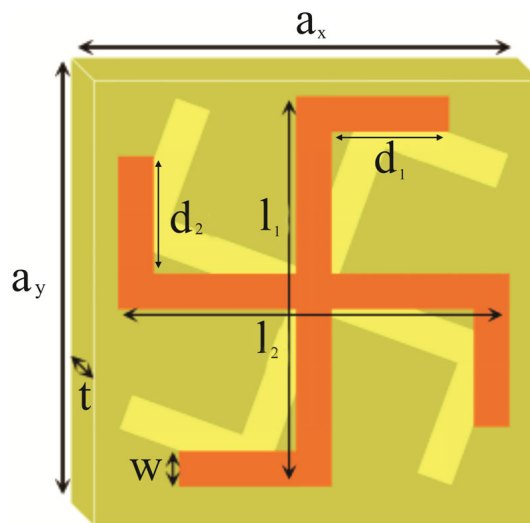


Figure 7. The schematic picture of the structure of bi-anisotropic "wan" shaped metamaterial
 图 7. “万”字形双各向异性结构示意图

得到了#1 号和#2 号样品耦合系数的结果:

从耦合系数谱线上(图 8), 可以明显地看到, 两种样品在低频处 $f = 10.3 \text{ G}$ 处的耦合频率基本一致, 其中“#1”号的耦合强度要比“#2”号的强一些。但是在高频 14.2 G 处, “#2”号样品的耦合强度依然低于“#1”号, 但是耦合频率却往高频发生了偏移。因此我们可以通过调制样品的几何尺寸, 来任意操控电磁耦合的频率。这可能是结构的横向尺寸的改变造成的结果。从以上结果可以看出, 利用所提出的 S 有效参数反演法获得的有效参数结果, 在物理上都得到了很好地解释, 真实地反应了这些结构应当出现的电磁耦合现象。因此, 这种反演方法是可靠的。

4. 结论

我们提出了一种新的 S 参数反演法来获得超材料的有效参数的实验手段, 此方法适用于所有含有电磁耦合张量的双各向异性平板结构。我们不但得出了双各向异性材料有效参数与 S 参数之间的表达式, 还提供了全部 S 参数在实验上的测量方法的技术线路。我们还通过两个实例来得到两种结构的有效参数,

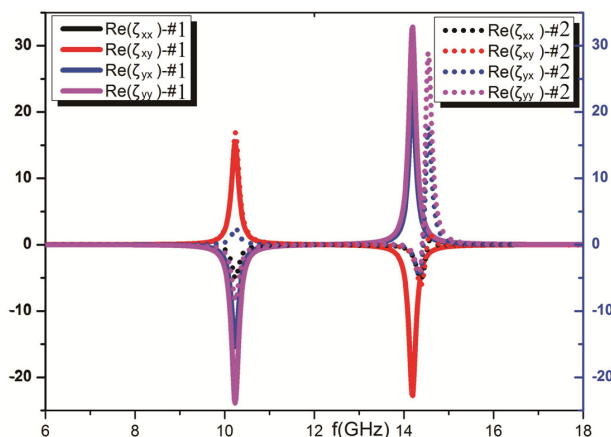


Figure 8. Experimental retrieved coupling coefficient ζ of two types of bi-anisotropic “wan” shaped metamaterials
图 8. 通过实验测量数值反演计算得到的耦合项 ζ , 实线表示#1号样品的值, 虚线表示的是#2号样品的值

由此证明了所提出的反演方法的有效性。我们所提出的有效参数反演法, 相对于之前的工作, 适用范围更广。我们希望通过我们提出的新反演算法, 为超材料的设计提供帮助, 特别是利用电磁耦合来实现更多更有趣的应用。

参考文献 (References)

- [1] Pendry, J.B., Holden, A.J., Robbins, D.J. and Stewart, W.J. (1998) Low Frequency Plasmons in Thin-Wire Structures. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **10**, 4785. <http://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/10/22/007>
- [2] Marques, R., Medina, F. and Rafii-Ei-Idrissi, R. (2002) Role of Bianisotropy in Negative Permeability and Left-Handed Metamaterials. *Physical Review B*, **65**, Article ID: 144440. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.65.144440>
- [3] Smith, D.R., Schultz, S., Markos, P. and Soukoulis, C.M. (2002) Determination of Effective Permittivity and Permeability of Metamaterials from Reflection and Transmission Coefficients. *Physical Review B*, **65**, Article ID: 195104. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.65.195104>
- [4] Koschny, T., Markos, P., Smith, D.R. and Soukoulis, C.M. (2003) Resonant and Antiresonant Frequency Dependence of the Effective Parameters of Metamaterials. *Physical Review E*, **68**, Article ID: 065602(R). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.68.065602>
- [5] Smith, D.R., Vier, D.C., Koschny, T. and Soukoulis, C.M. (2005) Electromagnetic Parameter Retrieval from Inhomogeneous Metamaterials. *Physical Review E*, **71**, Article ID: 036617. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.71.036617>
- [6] Koschny, T., Markos, P., Economou, E.N., Smith, D.R., Vier, D.C. and Soukoulis, C.M. (2005) Impact of Inherent Structure on Effective Medium Description of Left-Handed and Related Metamaterials. *Physical Review B*, **71**, Article ID: 245105. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.71.245105>
- [7] Chen, X., Grzegorzczak, T.M., Wu, B.-I., Pacheco, J. and Kong, J.A. (2004) Robust Method to Retrieve the Constitutive Effective Parameters of Metamaterials. *Physical Review E*, **70**, Article ID: 016608. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.70.016608>
- [8] Katsarkis, N., Koschny, T., Kafesaki, M., Economou, E.N. and Soukoulis, C.M. (2004) Electric Coupling to the Magnetic Resonance of Split Ring Resonators. *Applied Physics Letters*, **84**, 2943. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1695439>
- [9] Tretyakov, S.A., Simovski, C.R. and Hudlicka, M. (2007) Bianisotropic Route to the Realization and Matching of Backward-Wave Metamaterials Slabs. *Physical Review B*, **75**, Article ID: 153104. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.75.153104>
- [10] Chen, X., Wu, B.-I., Kong, J.A. and Grzegorzczak, T.M. (2005) Retrieval of the Effective Constitutive Parameters of Bianisotropic Metamaterials. *Physical Review E*, **71**, Article ID: 046610. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.71.046610>