

The Electric Field of the Charged Thin Ring and Conductor Plane

Qili Liao, Yan Yu, Ya Deng

College of Mobile Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecom, Chongqing
Email: xiaosueer@163.com

Received: Feb. 7th, 2018; accepted: Feb. 21st, 2018; published: Feb. 28th, 2018

Abstract

This paper calculated the electric potential by the production of the uniformly charged ring and the induced charge in the infinite plane of the conductor in the surrounding space, and the electric field force of the interaction of the charged ring and the induced charge in the infinite plane of the conductor with the mirror image method in electromagnetism in Cartesian rectangular coordinate system. The electric potential and electric field force with the variation of angle and distance are drawn.

Keywords

Electric Potential Distribution, Electric Field Force, Grounding Infinite Conductor Plane, Uniform Charged Thin Ring, Mathematica

带电细圆环和导体平面周围空间的电场

廖其力, 余艳, 邓娅

重庆邮电大学移通学院, 重庆
Email: xiaosueer@163.com

收稿日期: 2018年2月7日; 录用日期: 2018年2月21日; 发布日期: 2018年2月28日

摘要

本文在笛卡尔直角坐标系中采用电磁学中的镜像法, 计算了均匀带电细圆环和接地无限大导体平面上的感应电荷在周围空间产生的电势和导体平面上的感应电荷与带电圆环相互作用的电场力, 并绘出电势、电场力随角度和距离变化的图像。

关键词

电势分布, 电场力, 接地无限大导体平面, 均匀带电细圆环, Mathematica

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在文献[1] [2]中研究了共轴的均匀带电细圆环间的电场力, 文献[1]在计算电场力的过程中先采用了将椭圆积分函数用级数展开形式来计算电势, 然后利用电场力与电势能关系解出电场力, 再进一步讨论了其近似程度(误差)。本文采用电磁学理论中的镜像法[3] [4] [5], 运用电场的叠加原理和 Mathematica 数学软件[6] [7], 先计算均匀带电细圆环和接地无限大导体平面上的感应电荷在周围空间激发的电场, 再利用电场力与电势能的关系计算了相互作用的电场力, 并绘出了电势和电场力随角度和距离变化的图像。

2. 带电细圆环与接地导体平面在导体平面左侧空间的电势分布

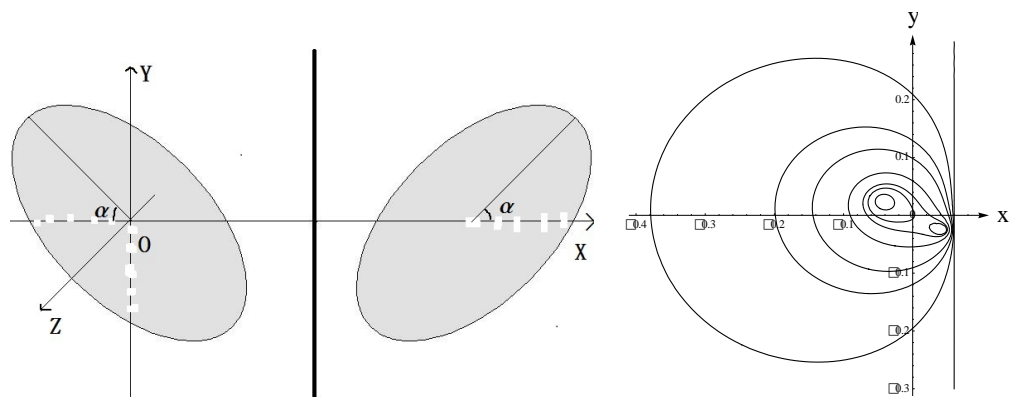
在如图 1(a)所示的笛卡尔直角坐标系中, 设均匀带电细圆环带电为正 q , 圆环半径为 R , 圆环所在平面与无限大接地导体平面的法线成 α 夹角, 以圆环圆心为坐标原点 o , x 轴方向与导体平面法线平行, 既 x 轴垂直于导体平面, 则圆环所在平面与 x 轴负方向夹角为 α , 圆环圆心到导体平面的距离为 d , y 轴在 x 轴和 x 轴在圆环所在平面内的投影所决定的平面内, y 轴和 z 轴所决定一平面与导体平面平行且满足右手螺旋系。按电磁理论中的镜像法[5], 当该均匀带电圆环在导体平面上产生的感应负电荷在导体处于静电平衡时, 在导体平面左侧空间产生的作用效果(力学的、电磁学的)等效于该均匀带电圆环经导体平面成像于导体平面右侧处的均匀带负电圆环体 $-q$ 在左侧空间产生的作用效果。分别在带电圆环和像圆环上任一点 $p_1(-R\cos\alpha\cos\phi_1, R\sin\alpha\cos\phi_1, R\sin\phi_1)$ 、 $p_2(2d + R\cos\alpha\cos\phi_2, R\sin\alpha\cos\phi_2, R\sin\phi_2)$ 各取微元电荷 dq_1 、 $-dq_2$, 其中 $\phi_1(0 \leq \phi_1 \leq 2\pi)$ 和 $\phi_2(0 \leq \phi_2 \leq 2\pi)$ 分别是点 p_1 和点 p_2 在 yo_z 平面的投影点与坐标原点 o 的连线与 y 轴正方向的夹角, 称其为方位角。取无穷远处电势为零, 这两个微元电荷在导体平面左侧空间任一点 $p(x, y, z)$ 产生的电势为:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi} \left(\frac{d\phi_1}{R_1} - \frac{d\phi_2}{R_2} \right) \tag{1}$$

其中 ϵ_0 为真空中的介电常数,

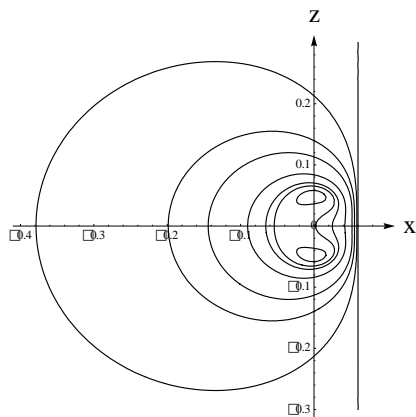
$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{(x + R\cos\alpha\cos\phi_1)^2 + (y - R\sin\alpha\cos\phi_1)^2 + (z - R\sin\phi_1)^2} \\ R_2 = \sqrt{(x - 2d - R\cos\alpha\cos\phi_2)^2 + (y - R\sin\alpha\cos\phi_2)^2 + (z - R\sin\phi_2)^2} \end{cases}$$

若令 $\begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + R^2} \\ a = (x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\ r_2 = \sqrt{(x - 2d)^2 + y^2 + z^2 + R^2} \\ b = [(2d - x)\cos\alpha - y\sin\alpha] \end{cases}$ 则 R_1 、 R_2 可化为

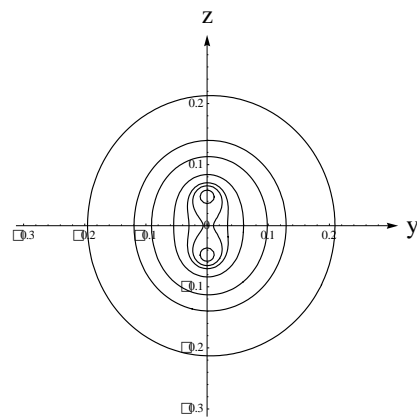


(a) Image of a charged thin ring in the grounding plane
(a) 带电细圆环在接地导体平面中的像

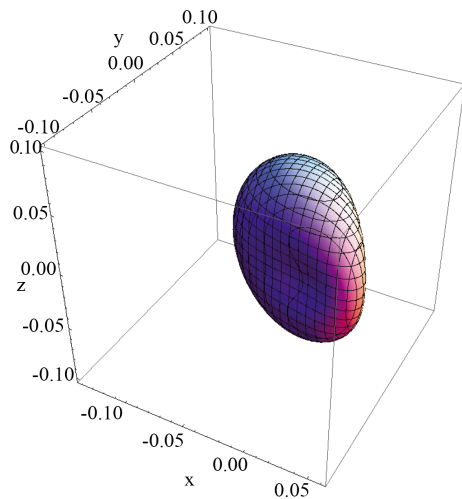
(b) Equipotential lines in the plane of xoy
(b) xoy 平面内的等势线



(c) Equipotential lines in the plane of xoz
(c) xoz 平面内的等势线

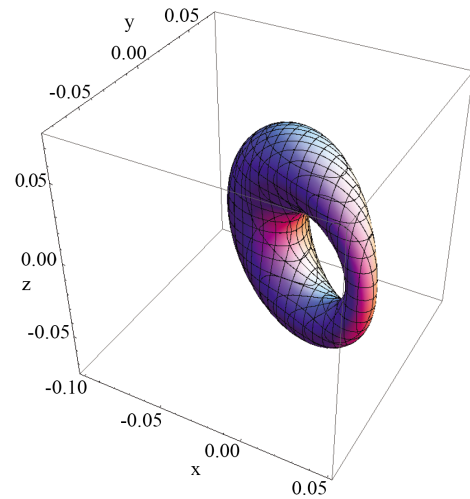


(d) Equipotential lines in the plane of yoz
(d) yoz 平面内的等势线



(e) Potential value is the equipotential surface of $15.0 \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0}$

(e) 电势值为 $15.0 \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0}$ 的等势面



(f) Potential value is the equipotential surface of $20.0 \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0}$

(f) 电势值为 $20.0 \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0}$ 的等势面

Figure 1. Electric potential distribution of charged thin ring and ground conductor plane
图 1. 带电细圆环与接地导体平面在导体平面左侧空间的电势分布

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{r_1^2 + 2aR \cos \phi_1 - 2zR \sin \phi_1} \\ R_2 = \sqrt{r_2^2 + 2bR \cos \phi_2 - 2zR \sin \phi_2} \end{cases}$$

再分别对(1)式中的变量 ϕ_1 、 ϕ_2 积分，可得到在导体平面左侧空间任一点的电势：

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0} \left[\frac{K \left[\frac{4R\sqrt{a^2 + z^2}}{r_1^2 - 2R\sqrt{a^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_1^2 - 2R\sqrt{a^2 + z^2}}} - \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{b^2 + z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2 + z^2}}} \right] \quad (2)$$

其中 $K[x] = \text{EllipticK}[x]$ 是第一类完全椭圆积分函数， $K[x] = F\left(\frac{\pi}{2} \middle| x\right)$ ，其定义为

$$F(\phi|x) = \int_0^\phi (1 - x \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta。$$

下面讨论两种特殊情况：

A 当 $\alpha = \pi/2$ 时，既圆环所在平面与导体平面平行，可得：

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0} \left[\frac{K \left[\frac{4R\sqrt{y^2 + z^2}}{r_1^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_1^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}}} - \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{y^2 + z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}}} \right] \quad (3)$$

当 R 较小时，可将(3)式中的函数分别按 R/r_1 和 R/r_2 用泰列级数展开，得到：

$$\begin{cases} \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{y^2 + z^2}}{r_1^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_1^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}}} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{3(y^2 + z^2)}{4r_1^3} \left(\frac{R}{r_1}\right)^2 + \dots \right] \\ \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{y^2 + z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{y^2 + z^2}}} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{r_2} + \frac{3(y^2 + z^2)}{4r_2^3} \left(\frac{R}{r_2}\right)^2 + \dots \right] \end{cases} \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式，当 $R \rightarrow 0$ ，即带电圆环变为点电荷，则(3)式变为下式。

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2} \right) \quad (5)$$

其中 $r'_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 和 $r'_2 = \sqrt{(x-2d)^2 + y^2 + z^2}$ 分别是空间 p 点到点电荷 q 和像点电荷 $-q$ 的距离。

B 当 $\alpha = 0$ 时，既圆环所在平面与导体平面垂直，可得：

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0} \left[\frac{K \left[\frac{4R\sqrt{x^2 + z^2}}{r_1^2 - 2R\sqrt{x^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_1^2 - 2R\sqrt{x^2 + z^2}}} - \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{(x-2d)^2 + z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{(x-2d)^2 + z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{(x-2d)^2 + z^2}}} \right] \quad (6)$$

当 R 较小时, 将(6)式中的函数分别按 R/r_1 和 R/r_2 级数展开, 当 $R \rightarrow 0$ 式, 同样得到(5)式。

知道了空间电势的分布, 由 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 可得知空间任一点 p 的电场强度 \mathbf{E} , 其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ 为梯度算符。

图 1(b)~(f)是电势随空间的分布图像。图中参数取值: 带电细圆环半径 $R = 0.05 \text{ m}$ 、它的圆心到接地无限大导体平面的距离 $d = 0.06 \text{ m}$, 圆环与 x 轴负方向夹角 $\alpha = \pi/6$ 。图 1(b)、图 1(c)、图 1(d)中分别是 xoy 、 xoz 、 yoZ 平面内的等势线, 图 1(b)、图 1(c)中右侧的直线是电势为零的等势线, 即位于接地导体平面处。

图 1(b)、图 1(c)、图 1(d)中的曲线在第二象限从外到内对应的电势分别为 $1.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $3.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $5.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $10.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $15.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $18.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $25.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$, 在这三个图中, 最小闭合的曲线是电势值皆为 $25.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 的两条等势线。若 q 和 ε_0 取国际主单位, 则上述电势的单位就是伏特。图 1(e)、图 1(f)是电势分别为 $15.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 、 $20.0\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0}$ 的等势面。

3. 带电细圆环与接地导体平面上感应电荷的相互作用力

接下来计算均匀带电细圆环与接地无限大导体平面上产生的感应电荷的作用力。先考虑圆环所在平面与导体平面平行($\alpha = \pi/2$)时的特殊情况。

当 $\alpha = \pi/2$ 时, 导体平面上的感应负电荷在圆环处产生的电势处处相等, 由(3)式的中括号中的第二项可得感应电荷与带电细圆环间相互作用势能:

$$E_p = -\frac{q^2}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{K\left[-\frac{4R\sqrt{y^2+z^2}}{r_2^2-2R\sqrt{y^2+z^2}}\right]}{\sqrt{r_2^2-2R\sqrt{y^2+z^2}}} \quad (7)$$

由电场力与电势能的关系 $\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dr}\mathbf{e}_r$ 可得相互作用力各分量的大小为:

$$F_x = \frac{q^2}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{E\left(-\frac{R^2}{d^2}\right)}{4(d^2+R^2)} \quad (8)$$

同时可得 $F_y = 0$ 、 $F_z = 0$, 这是平面镜镜像对称性必然的结果。其中 $E[x] = \text{EllipticE}[x]$ 是第二类完全椭圆积分函数, $E[x] = E\left(\frac{\pi}{2}\middle|x\right)$, 其定义为 $E(\phi|x) = \int_0^\phi (1-x\sin^2\theta)^{1/2} d\theta$ 。(7)式也是共轴的相距为 $2d$ 、半径皆为 R 、带相同电量 q 的均匀带电细圆环间的电场力。

当 R 相对于 d 较小时($R/d < 1$), 将(8)式按 R/d 作级数展开

$$F_x = \frac{q^2}{2\pi^2\varepsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \dots \right] \quad (9)$$

当 $R/d \rightarrow 0$ 时, 这时带电圆环可视为点电荷, (9)式变为

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \quad (10)$$

这就是点电荷与无限大接地导体平面的作用力。

当 $\alpha \neq \pi/2$ 时, 由(2)式中括号中的第二项可得感应电荷在圆环处任一点 p 的电势:

$$\varphi_2 = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0} \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{b^2+z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}}} \quad (11)$$

在点 p 处任取一微元电荷 $dq = \frac{q}{2\pi} d\phi_1$, 它与感应电荷的作用势能为:

$$\delta E_p = \varphi_2 dq = -\frac{q^2}{4\pi^3\epsilon_0} \frac{K \left[\frac{4R\sqrt{b^2+z^2}}{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}} \right]}{\sqrt{r_2^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}}} d\phi_1$$

该微元电荷所受电场力的 x 分量由电势能与电场力的关系有:

$$dF_x = -\frac{d(\delta E_p)}{dx}$$

利用电场的叠加原理把带电圆环上所有微元电荷加起来(积分), 可得到导体平面上的感应电荷与带电圆环的相互电场力:

$$F_x = \int dF_x = -\int \frac{d(\delta E_p)}{dx} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{dx} d\phi_1$$

$$= \frac{q^2}{4\pi^3\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\left[(2d-x)\sqrt{b^2+z^2} - bR\cos\alpha \right] \sqrt{r^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}} K \left[\frac{4R\sqrt{b^2+z^2}}{r^2 - 2R\sqrt{b^2+z^2}} \right]}{\left[r^4 - 4R^2(b^2+z^2) \right] \sqrt{b^2+z^2}} d\phi_1 \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} x = -R \cos\alpha \cos\phi_1 \\ y = R \sin\alpha \cos\phi_1 \\ z = R \sin\phi_1 \\ b = 2d \cos\alpha + R \cos(2\alpha) \cos\phi_1 \\ r = \sqrt{4d^2 + 4Rd \cos\alpha \cos\phi_1 + 2R^2} \end{cases}$$

(12)式要得到解析结果是困难的, 但因为 $R\cos\alpha < d$, 先将被积函数按 R/d 作级数展开, 再对 ϕ_1 积分可得到电场力按 R/d 级数展开的形式来作近似解:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cos\alpha \frac{R}{d} + \frac{3}{2^2} \cos(2\alpha) \left(\frac{R}{d}\right)^2 + \frac{1}{2^7} \sec\alpha [36\cos(2\alpha) + 15\cos(4\alpha) + 17] \left(\frac{R}{d}\right)^3 \right.$$

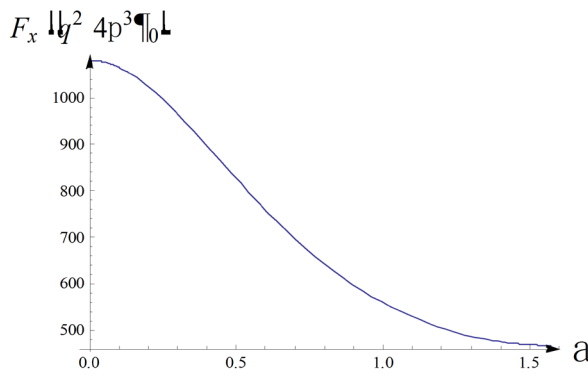
$$\left. + \frac{15}{2^{12}} [12\cos(2\alpha) + 67\cos(4\alpha) + 137] \left(\frac{R}{d}\right)^4 + \dots \right\} \quad (13)$$

同样可得 $F_y = 0$ 、 $F_z = 0$, 这也是镜像对称所要求的必然结果。当 $R/d \rightarrow 0$ 时, 带电圆环相对于导体平面的位置(夹角)无关, 这时带电圆环趋于点电荷, (13)式变为(10)式。

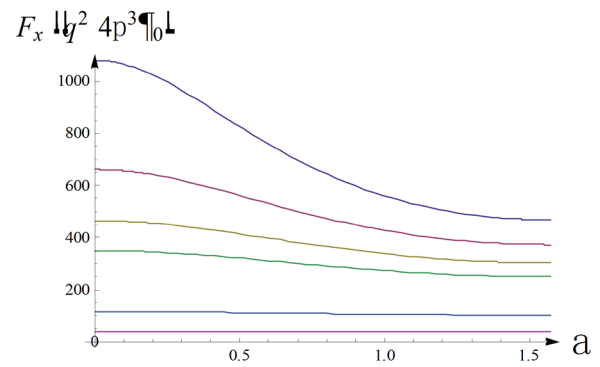
当 $\alpha = 0$ 时, 既圆环所在平面与导体平面垂直, 由(13)式可得

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R}{d} + \frac{3}{2^2} \left(\frac{R}{d}\right)^2 + \frac{17}{2^5} \left(\frac{R}{d}\right)^3 + \frac{405}{2^9} \left(\frac{R}{d}\right)^4 + \frac{1281}{2^9} \left(\frac{R}{d}\right)^5 + \dots \right] \quad (14)$$

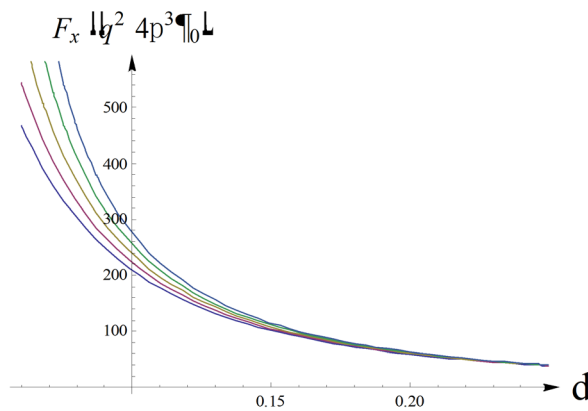
图 2 给出了带电细圆环与接地无限大导体平面上感应负电荷相互作用的电场力随夹角和距离变化的图像，这些电场力均指均匀带电细圆环与接地导体平面在不同夹角或不同距离情况下，导体处于静电平衡时其表面上的感应负电荷与均匀带正电细圆环的作用力。在这四个图中， $R = 0.05 \text{ m}$ 。图 2(a)图中 $d = 0.06 \text{ m}$ ，该曲线表明带电细圆环与接地无限大导体平面上感应电荷的相互作用的电场力随角度的增大而减小，既在距离一定时，当带电圆环与导体平面垂直时作用力最大，平行时作用力最小；图(b)中的图线自上而下分别对应于 $d = 0.06 \text{ m}$ 、 0.07 m 、 0.08 m 、 0.09 m 、 0.15 m 、 0.25 m ，表明带电细圆环与导体平面上感应电荷的相互作用电场力随夹角、距离的增大而减小，同时表明随距离的增大，作用力的大小几乎不随夹角的变化而变化，既这时细圆环的形状、位置对带电细圆环与导体平面上感应电荷的电场力几乎没有影响，这是因为当 $d/R \gg 1$ ，带电细圆环近似于点电荷；图(c)中在第二象限内的 5 条图线自上而下分别对应于 $\alpha = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ ，同样表明电场力随夹角、距离的增大而减小，当带电细圆环到导体平面的距离较大时，电场力就与夹角几乎无关，只与距离有关，既带电圆环在这种情况下近似于点电荷。图(d)中在是电场力随角度、距离变化而变化的 3D 图。



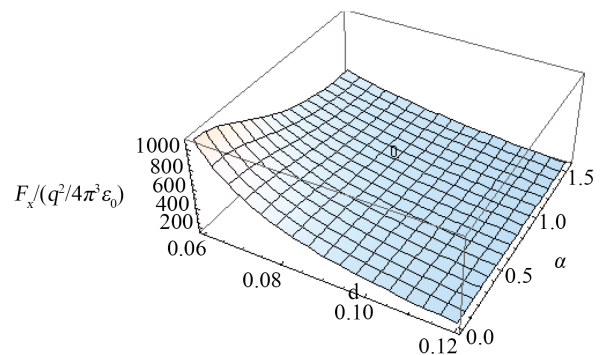
(a) Electric field force varies with angles
(a) 电场力随夹角的变化而变化



(b) Electric field force varies with angles
(b) 电场力在不同距离所受随夹角的变化而变化



(c) Electric field force varies with distance
(c) 电场力在不同夹角随的距离变化而变化



(d) Electric field force varies with distance and angles
(d) 电场力随距离、夹角的变化而变化

Figure 2. Interaction force between a charged thin ring and a grounded conductor plane

图 2. 带电细圆环与接地导体平面上感应电荷的相互作用力

4. 结束语

本文根据电磁学中的镜像法,借助于 Mathematica 研究了均匀带电细圆环作用下,在接地无限大导体平面上产生的感应负电荷和带电细圆环在周围空间共同产生的电势,给出了解析表达式,在此基础上,利用电场力与电势能之间的关系计算出电场力,并绘出电势和电场力随距离和夹角变化而变化的图像。虽然均匀带电细圆环和无限大导体平面是理想模型,但当带电细圆环的半径远大于圆环自身的直径时就可近似为细圆环;当导体平面尺寸远大于带电细圆环的半径且距离导体平面足够近时,也可视为无限大导体平面。当知道电势分布规律后,由就可确定电场强度;利用电场力与电势能的内在联系,就可计算带电体间的作用力。所以本文的研究具有一定的教学理论价值和实际意义。

参考文献 (References)

- [1] 杨天虎. 两共轴带电圆环作用力的计算[J]. 大学物理, 2016, 35(8): 29-31, 35.
- [2] 徐燕, 陈浩. 两共轴带电圆环的相互作用能和相互作用力[J]. 大学物理, 2007, 26(6): 26-27, 31.
- [3] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 127-146.
- [4] 梁灿彬, 秦光戎, 梁竹健. 电磁学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 64-87.
- [5] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979: 71-76.
- [6] 廖其力, 余艳, 邓娅, 邓敏艺, 白克钊. 用 Mathematica 研究环形电流平面内磁场[J]. 广西物理, 2016, 37(1): 54-56.
- [7] 王福谦, 贾兰芳, 王磊. 接地条形体板对均匀电场的影响及其数值模拟[J]. 大学物理, 2017, 36(2): 36-38.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7567, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱: app@hanspub.org