

# 衍射追迹法模拟计算菲涅耳波带片衍射特性

熊学辉, 朱春莲

江汉大学光电材料与技术学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2021年11月10日; 录用日期: 2021年12月13日; 发布日期: 2021年12月20日

## 摘要

大多数光学教材, 对于圆孔和波带片的菲涅耳衍射特性都是基于菲涅耳半波带法, 仅分析轴上点的明暗情况。本文利用标量衍射理论, 相邻两面的光线传播都是基于菲涅耳衍射模型, 编制程序计算了圆孔的菲涅耳衍射特性, 更进一步计算了菲涅耳波带片衍射特性。计算的菲涅耳衍射图直观明了地显示了观察平面近轴区的完整光强分布, 不同观察平面的轴上点的明暗由露出的半波带个数决定, 与半波带法分析轴上点明暗一致。菲涅耳波带片在焦距 $f$ 处和 $f/3$ 、 $f/5$ 等次焦点处都会聚成一个亮点, 能量集中在轴上点, 有明显的聚光效应, 如同透镜成像的焦点。而在 $f/2$ 、 $f/4$ 等观察面轴上点是暗点, 能量分散到其他衍射级。不同观察平面上完整的光强分布图有利于深入了解菲涅耳波带片的衍射特点, 为波带片的设计与应用提供更好的理论依据。

## 关键词

菲涅耳衍射, 波带片, 标量衍射理论

# Simulation of Diffraction Characteristics of Fresnel Zone Plate by Diffraction Tracing Method

Xuehui Xiong, Chunlian Zhu

School of Optoelectronic Materials and Technology, Jiangnan University, Wuhan Hubei

Received: Nov. 10<sup>th</sup>, 2021; accepted: Dec. 13<sup>th</sup>, 2021; published: Dec. 20<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In most optical textbooks, the Fresnel diffraction characteristics of circular holes and zone plates are based on the Fresnel half zone method, which only analyzes the light and shade of points on

the axis. In this paper, based on the scalar diffraction theory, the light propagation on the adjacent two sides is based on the Fresnel diffraction model. The program is compiled to calculate the Fresnel diffraction characteristics of the circular hole and the Fresnel zone plate. The calculated Fresnel diffraction pattern can intuitively and clearly show the complete intensity distribution in the paraxial region of the observation plane. The brightness of the points on the axis of different observation planes is determined by the number of exposed half wave bands, which is consistent with the brightness of the points on the axis analyzed by the half wave band method. The Fresnel zone plate converges into a bright spot at the focal length  $f$  and the sub focal points such as  $f/3$  and  $f/5$ , and the energy is concentrated at the point on the axis, just like the focus of lens imaging, while the point on the axis of the observation plane such as  $f/2$  and  $f/4$  is a dark point, and the energy is dispersed to other diffraction orders. The complete intensity distribution on different observation planes is conducive to deeply understanding the diffraction characteristics of Fresnel zone plate and provides a better theoretical basis for the design and application of zone plate.

## Keywords

Fresnel Diffraction, Fresnel Zone Plate, Scalar Diffraction Theory

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

菲涅耳波带片(菲涅耳透镜)是一种应用十分广泛的光学元件, 比如设计菲涅耳波带片-球面透镜系统, 实现变焦功能和提高分辨率[1], 利用菲涅耳透镜的聚光特性提高太阳能利用效率[2] [3], 在可见光通信中, 在接收天线上利用菲涅耳波带片口径大的优点接收光信号, 将光信号聚焦在硅光电探测器的光敏面上[4], 利用高阶贝塞尔高斯光束, 在波带片的聚焦区域获得了空心光束[5]。大多数光学教材对于圆孔的菲涅耳衍射以及菲涅耳波带片的衍射特性都是基于菲涅耳半波带法, 仅分析轴上点的明暗情况[6] [7] [8] [9]。目前, 有些论文采用多种方法从不同侧面探讨了菲涅耳波带片的性质, 分析计算了焦点的特点, 轴向、径向强度分布等[10] [11] [12]。

本文利用标量衍射理论[13], 相邻两面的光线传播都是基于菲涅耳衍射模型, 编制程序计算了圆孔的菲涅耳衍射特性, 更进一步计算了菲涅耳波带片衍射特性。计算的菲涅耳衍射图直观明了地显示观察平面近轴区的完整光强分布, 不同观察平面的轴上点的明暗由露出的半波带个数决定, 与半波带法分析轴上点明暗一致。不同观察平面上完整的光强分布图有利于深入了解菲涅耳波带片的衍射特点, 为波带片的设计与应用提供更好的理论依据。

## 2. 标量衍射理论分析菲涅耳衍射

如图 1 所示考虑无限大的不透明屏上的一个有限孔径  $\Sigma$  对单色光的衍射。设平面屏有直角坐标系  $(x_1, y_1)$ , 在平面观察区域有坐标系  $(x, y)$ , 两者坐标平行, 相距  $d$ 。

由惠更斯-菲涅耳原理可知波阵面上任意未受阻挡的点, 产生一个与原波频率相同的球面子波。此后空间任何一点的光振动是这些子波叠加的结果, 菲涅耳衍射观察屏上的  $P$  点的复振幅可以表示为

$$\tilde{U}(P) = C \iint_{\Sigma} \tilde{U}_0(Q) \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) d\sigma \quad (1)$$

其中  $\tilde{U}_0(Q)$  为衍射屏上的复振幅分布,  $K(\theta)$  为倾斜因子。根据基尔霍夫对此公式的完善, 在傍轴条件下, 设衍射屏上点的坐标为  $(x_1, y_1)$ , 接收屏上点的坐标为  $(x, y)$ , 衍射屏与接收屏间距离为  $d$ , 当满足菲涅尔近似条件时, 即

$$\frac{k}{8d^3} \left[ (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right]_{\max}^2 \ll \pi \quad (2)$$

此时可得到菲涅耳衍射的计算公式[13]

$$\tilde{U}(x, y) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_0(x_1, y_1) \exp\left\{ \frac{ik}{2d} \left[ (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right] \right\} dx_1 dy_1 \quad (3)$$

把上式指数项中的二次项展开, 并改写成傅里叶变换的形式, 可以写成

$$\tilde{U}(x, y) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \exp\left[ \frac{ik}{2d} (x^2 + y^2) \right] \mathcal{F} \left\{ \tilde{U}_0(x_1, y_1) \exp\left[ \frac{ik}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right] \right\} \quad (4)$$

上式为菲涅耳衍射的傅里叶变换表达式, 它表明除了积分号前面的一个与  $x_1, y_1$  无关的振幅和相位因子外, 菲涅耳衍射的复振幅分布是孔径平面的复振幅分布  $\tilde{U}_0(x_1, y_1)$  和一个二次相位因子  $\exp\left[ \frac{ik}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right]$  乘积的傅里叶变换。基于式(4)再利用 matlab 快速傅里叶变换(FFT)处理, 可以求出任意衍射屏菲涅耳衍射图像。

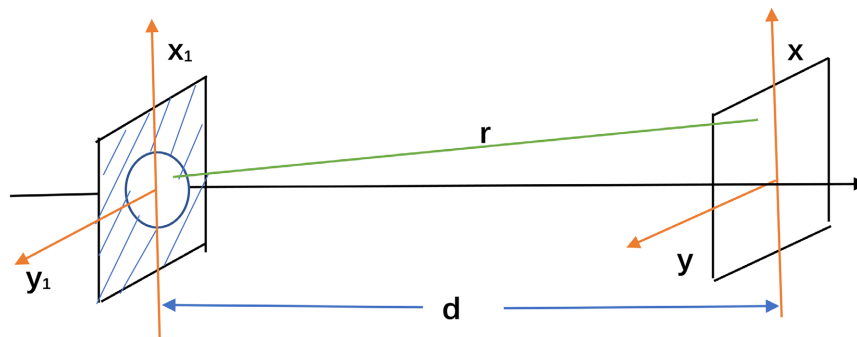
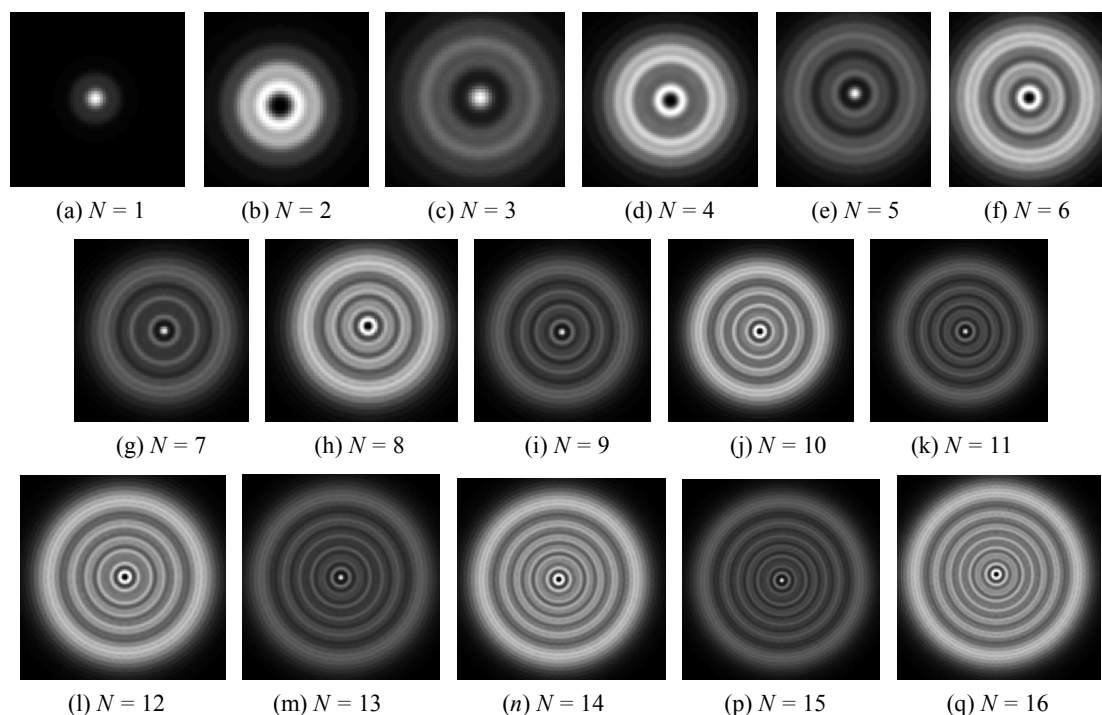


Figure 1. Fresnel diffraction diagram  
图 1. 菲涅耳衍射示意图

### 3. 圆孔菲涅耳衍射图像

本文首先计算了圆孔半径  $a = 2 \text{ mm}$ , 在不同距离的观察屏上的完整菲涅耳衍射图像。一般教科书[6][7][8][9]都用菲涅耳半波带法推导出了平行光入射时, 圆孔露出的半波带个数  $N = a^2/(\lambda d)$ ,  $a$  为圆孔半径,  $\lambda$  为入射波长,  $d$  为观察平面到孔径平面的距离。不同距离处观察平面的轴上点的光强由露出的半波带个数决定, 露出奇数个半波带为亮点, 露出偶数个半波带为暗点。我们利用式(4)可以计算出观察平面上近轴区的衍射图像, 可以直观地看到中心点的明暗和衍射级分布。如图 2 所示, 当  $a = 2 \text{ mm}$ , 入射波长  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 由  $N = a^2/(\lambda d)$  可知,  $N = 1$  时,  $d = a^2/\lambda = 6.321 \text{ m}$ , 对观察平面的中心点而言, 只能露出一个半波带, 为亮点, 接近圆孔的夫朗禾费衍射图, 如图 2 所示。也依次计算了露出 2~16 个半波带数的观察平面上的菲涅耳衍射图。图 2(b)~(q)显示了距离分别为  $d = 6.321 \text{ m}/2, 6.321 \text{ m}/3, 6.321 \text{ m}/4, 6.321 \text{ m}/5, 6.321 \text{ m}/6, 6.321 \text{ m}/7, 6.321 \text{ m}/8, 6.321 \text{ m}/9, 6.321 \text{ m}/10, \dots, 6.321 \text{ m}/16$  的衍射图。分别对应让圆孔露出 1 到 16 个半波带, 最近距离为  $6.321 \text{ m}/16 = 0.3951 \text{ m}$ 。



**Figure 2.** Fresnel diffraction pattern of circular hole on observation plane with different number of half wave bands  
**图 2.** 露出不同半波带数的观察平面上圆孔的菲涅耳衍射图

以上衍射图片演示了不同观察平面上圆孔衍射完整光强图, 获得了明暗相间的同心环形条纹, 而且露出的半波带个数越多, 衍射条纹级数也越多, 中央密集, 往外稀疏; 对轴上点而言, 露出的半波带个数为奇数时, 衍射图片的中心点为亮点, 其他衍射级分布的能量较少, 整个视场比较暗。而当露出的半波带个数为偶数时, 衍射图片的中心点都是暗点, 中心暗点被一级衍射亮环包围, 整个视场较明亮。衍射图中心条纹的明暗随观察平面距离的变化与菲涅耳半波带分析完全一致。露出的半波带个数越多, 离圆孔的距离越近, 衍射图越接近露出半波带的自身投影。

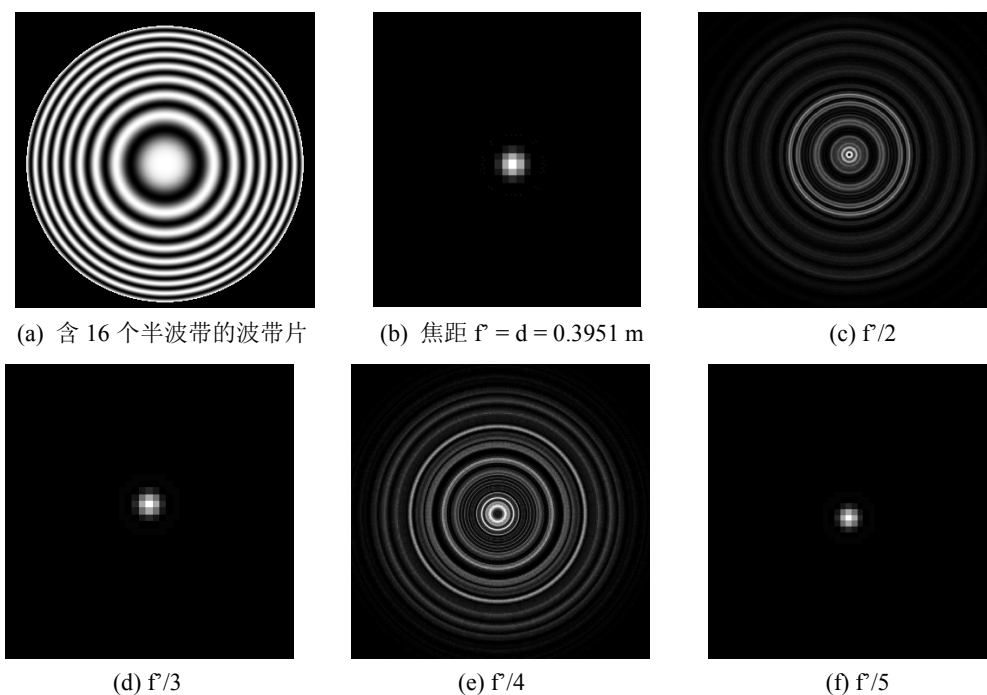
#### 4. 菲涅耳波带片衍射图像

上述圆孔衍射的分析, 是菲涅耳波带片设计的基础, 只让编号为奇数或偶数的半波带透光, 这时相邻透光带的相位差为  $2\pi$ 。菲涅耳波带片可由牛顿环或平面波和球面波的干涉全息图制备得到。对于一定距离的观察平面, 不同序数  $m$  半波环带对应的半径  $\rho_m = \sqrt{m\lambda d}$ , 根据该式可设计圆环形菲涅耳波带片透过率函数为  $t(\rho) = t_0 + t_1 * \cos(\beta\rho^2 + \varphi_0)$  [12]。

与上述圆孔衍射一致, 选取最大半径为 2 mm, 从上面的分析可知, 当观察平面与孔径平面的距离  $d = 0.3951$  m, 可获得 16 个半波带, 若只让编号为奇数的半波带透光, 透过率设为 1, 编号为偶数的半波带完全不透光, 透过率为 0, 则菲涅耳波带片的透过率函数可表示为  $t(\rho) = 0.5 + 0.5 * \cos(4\pi\rho^2)$ , 将  $\tilde{U}_0 = 1 * t(\rho)$  代入式(4), 便可以计算出菲涅耳波带片的衍射图。

由图 3(a)可知, 设计的透过率函数可以很好的模拟菲涅耳波带片的性质, 编号为奇数的半波带透光, 编号为偶数的半波带不透光。当观察平面在焦点平面时, 入射的平行光在中心会聚成亮点, 奇数编号的半波带到焦点处光程差相差  $2\pi$  的整数倍, 所以干涉加强, 形成亮点, 根据定义, 为波带片的主焦点, 如图 3(b)所示。当观察平面移动到焦距的一半距离或  $f/4$  时, 中心得到暗点, 这是因为, 当观察距离减半时, 原来每个透光半波带都可以划分为 2 个半波带, 这两个半波带, 到达观察平面中心点相干相消, 光

场减弱, 中心点光强减弱, 变暗, 但不为 0。同理距离为  $f/4$  时, 原来的每个半波带可以划分成 4 个半波带, 相干减弱, 中心点变暗。另一方面, 衍射能量分布到其他亮环上, 与圆孔衍射相比, 衍射明环纹变细变亮, 如图 3(c)和图 3(e)所示。当距离为  $f/3$ 、 $f/5$  时, 原来的每个半波带可以划分为奇数个半波带, 所以原来的透光半波带相干相消后还有一份未干涉, 原来各透光半波带剩余的一份能量到观察平面中心点的相位差仍然是  $2\pi$  的整数倍, 干涉加强, 形成次亮点, 称为菲涅耳波带片有副焦点, 如图 3(d)和图 3(f)所示。根据上述分析可知在  $f/3$ 、 $f/5$  等次焦点处会聚的亮度比主焦点处小。轴上点的明暗与半波带理论分析一致。在主焦点和次焦点有明显的聚光效应。



**Figure 3.** Diffraction patterns of Fresnel zone plate on observation plane at different distances  
**图 3.** 不同距离观察平面上菲涅耳波带片的衍射图

## 5. 结论

本文利用标量衍射理论, 相邻两面的光线传播都是基于菲涅耳衍射模型, 编制程序计算了圆孔的菲涅耳衍射特性, 更进一步计算了菲涅耳波带片衍射特性。计算的菲涅耳衍射图直观明了地显示了观察平面近轴区的完整光强分布, 不同观察平面的轴上点的明暗由露出的半波带个数决定, 与半波带法分析轴上点明暗一致。菲涅耳波带片具有良好的聚焦作用, 在焦距  $f$  处和  $f/3$ 、 $f/5$  等次焦点处都会聚成一个亮点, 能量集中在轴上点, 如同透镜成像的焦点, 而在  $f/2$ 、 $f/4$  等观察面轴上点是暗点, 能量分散到其他衍射亮环。

## 参考文献

- [1] 张耀举, 潘照平. 菲涅耳波带片 - 球面结构透镜的成像分析[J]. 光学技术, 2004, 30(2): 161-163.
- [2] 王刚, 陈则韶, 胡芑, 程晓舫. 带聚焦菲涅耳透镜光学模拟和分析[J]. 太阳能学报, 2013, 34(11): 1777-1881.
- [3] 吴旭婷, 李湘宁, 蔡伟. 大视场菲涅耳透镜的聚光效率模拟和分析[J]. 光学仪器, 2010, 32(1): 44-48.
- [4] 徐宁, 徐丹彤, 杨庚, 孙晓芸. 可见光通信中菲涅耳透镜仿真设计与优化[J]. 量子电子学报, 2012, 29(5): 629-636.

- [5] 刘岚, 张海涛, 陈子阳, 吴逢铁. 贝塞尔高斯光束经菲涅尔波带片产生特殊聚焦光强分布[J]. 红外与激光工程, 2015, 44(5): 1491-1495.
- [6] 姚启钧. 光学教程第 5 版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 101-107.
- [7] 郭永康, 朱建华. 光学第 3 版[M]. 北京: 高等教育出版社, 2017: 206-211.
- [8] 叶玉堂, 肖峻, 饶建珍. 光学教程第 2 版[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011: 244-250.
- [9] 蔡吕中. 光学第 3 版[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 232-242.
- [10] 付文羽, 刘正岐. 激光波带片衍射性质的数值模拟[J]. 光子学报, 2006, 35(11): 1756-1760.
- [11] 李平. 基于半波带分析法的菲涅耳波带片衍射特性的讨论[J]. 物理与工程, 2003, 13(4): 23-26.
- [12] 刘有菊, 张海君, 钟锡华. 圆形余弦光栅菲涅耳衍射场的研究[J]. 大学物理, 2008, 27(12): 5-8.
- [13] 苏显渝, 陈家璧. 信息光学原理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 32-36.