

核电荷半径经验公式的形变修正

李光胜

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2023年3月17日; 录用日期: 2023年4月12日; 发布日期: 2023年4月19日

摘要

原子核电荷半径属于原子核基本性质之一。核电荷半径的精确测量对核结构研究和核天体物理具有重要意义。在已有经验公式的基础上考虑核形变参数对核电荷半径的影响, 经过对比发现经验公式中奇偶修正项的效果不如形变参数修正项。最终获得 $A^{1/3}$ 律六参数的修正公式, 均方根误差比原五参数经验公式下降约15%。

关键词

原子核电荷半径, 形变参数, $A^{1/3}$ 律

The Modified Nuclear Charge Radii Formula by Deformation

Guangsheng Li

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 17th, 2023; accepted: Apr. 12th, 2023; published: Apr. 19th, 2023

Abstract

Nuclear charge radius is one of the most fundamental properties for nuclei. The accurate measurement of nuclear charge radius is very important for nuclear structure research and nuclear astrophysics. Based on the existing empirical formulas, the influence of nuclear deformation parameters on nuclear charge radius is considered. Through comparison, it is found that the parity correction term in the empirical formulas is less effective than the deformation parameter correction term. Finally, the modified formula of the six parameters of $A^{1/3}$ law is obtained, and the root-mean-square deviation decreases by about 15% compared with the original five-parameter empirical formula.

Keywords

Nuclear Charge Radii, Deformation Parameters, $A^{1/3}$ Law

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

原子核电荷半径属于原子核基本性质之一[1]。核电荷半径在核结构研究中扮演着重要角色,例如在核半径的引导下可进一步研究奇异核(核晕、形状共存)性质等[2] [3] [4]。核电荷半径精确测量不仅促进人们对原子核内部作用机制的了解而且对天体物理研究具有重要意义,例如和物质状态方程(EOS)中对称能系数 L [5] [6]取值范围可由镜像核核电荷半径差值确定,以及进一步探索行星密度、中子星演化过程和黑洞研究等提供线索[7] [8]。

到目前为止,原子核数据中心的网站上发布的最新数据表(简称 CR2013) [9]中共有 957 个基态均方根核电荷半径已被实验测定。理论上用于研究原子核电荷半径的模型有 Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov (SHFB) [10]、相对论平均场(the relativistic mean-field, 简称为 RMF) [11]以及近几年核质量计算工作中较为流行的 Garvey-Kelson (GK)关系[12]、由四个相邻原子核电荷半径构成的 δR_{m-jp} 关系[13]和同位素链的核电荷半径差值关系[14] [15]等。

本文主要分为以下几个部分:第一部分介绍核电荷半径的研究意义及目前的研究进展;第二部分分别介绍传统的球形半径计算方法和使用形变参数修正的传统公式的方法;第三部分对比讨论公式修正前后的描述能力;最后为本文总结。

2. 核电荷半径与形变参数的关系

基于原子核饱和性质考虑,原子核电荷半径分布通常认为是球形核,可以使用 $A^{1/3}$ 律对其进行描述,即

$$R(N, Z) = \sqrt{\frac{5}{3}} r_0 A^{1/3} \quad (1)$$

式中 $R(N, Z)$ 对应中子数为 N 质子数为 Z 的核电荷半径, A 为质量数。

由公式(7)拟合结果与实验值对比可知,大部分原子核电荷半径实验数据与公式(7)拟合结果存在一定的偏差,且大量研究表明部分原子核存在奇特核形变和原子核形状共存等[3] [4]现象,这表明偏差较大的原子核可能不再是理论球形而是偏离球形的椭球,偏离量用形变量表示。在公式(1)的基础上考虑形变对原子核的影响[16],核电荷半径公式进一步改写为:

$$R(N, Z) = R_0(N, Z) \left[1 + \frac{5}{8\pi} [\beta_2^2(N, Z) + \beta_4^2(N, Z)] \right] \quad (2)$$

其中 $\beta_2(N, Z)$ 和 $\beta_4(N, Z)$ 分别对应中子数为 N 质子数为 Z 的原子核的四极形变和十六极形变参数, $R_0(N, Z)$ 由公式(1)计算所得。

由 δR_{m-jp} 关系[17]中 $i = j = 2$ 的表达式可知,它由两条质子数、中子数均相差 2 的同位素链核电荷半

径差值构成,形式上与同位素链转移相似。沿用文献[13]相同的近似法,令

$$\delta R_{2n-2p}(N,Z) = R(N,Z) - R(N-2,Z) - [R(N,Z-2) - R(N-2,Z-2)] \approx \delta R(N,Z) \quad (3)$$

得新的原子核半径公式

$$\delta R(N,Z) = \delta R(N,Z)_{\text{sph}} + \delta R(N,Z)_{\text{def}} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta R(N,Z)_{\text{sph}} &= \sqrt{\frac{3}{5}} r_0 \delta(A^{1/3}) \\ \delta R(N,Z)_{\text{def}} &= \frac{5}{8\pi} \delta \left[R_0(N,Z) (\beta_2^2(N,Z) + \beta_4^2(N,Z)) \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{5}{8\pi} r_0 \left[\left[A^{1/3} \beta_2^2(N,Z) + (A-4)^{1/3} \beta_2^2(N-2,Z-2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (A-2)^{1/3} \beta_2^2(N,Z-2) - (A-2)^{1/3} \beta_2^2(N-2,Z) \right] \right. \\ &\quad \left. + A^{1/3} \beta_4^2(N,Z) + (A-4)^{1/3} \beta_4^2(N-2,Z-2) \right. \\ &\quad \left. - (A-2)^{1/3} \beta_4^2(N,Z-2) - (A-2)^{1/3} \beta_4^2(N-2,Z) \right] \\ &\approx \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{5}{8\pi} r_0 A^{1/3} (\delta\beta_2^2 + \delta\beta_4^2) \end{aligned} \quad (6)$$

3. 核电荷半径经验公式的形变修正

将文献[18]中 $A^{1/3}$ 律四参数公式和五参数公式使用最小二乘法拟合,其中四参数公式拟合得 $r_0 = 1.2279$ fm, $a = 0.1517$, $b = 1.9222$, $c = 0.3934$ 以及 $\sigma = 0.0348$ fm, 无参数公式拟合得 $r_0 = 1.2279$ fm, $a = 0.1519$, $b = 1.8902$, $c = 0.3970$ 和 $d = 0.1222$, 与四参数公式相比,加入奇偶修正项后均方根似乎没有什么变化, $\sigma = 0.0344$ fm。图 1(a) 对应四参数公式的实验值与理论值的偏差分布图 ΔR_C , 图 1(b) 对应五参数公式偏差分布图。图 1 中红色虚线对应偏差值为 ± 0.05 fm, 绿色虚线对应 $\Delta R_C = 0$ fm。

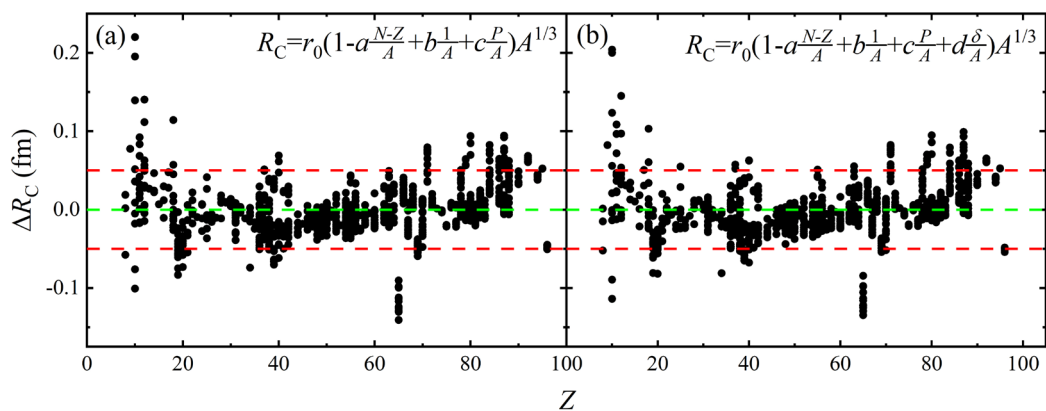


Figure 1. The map of four- and five-parameter deviation distributions

图 1. 四参数和五参数偏差分布图

从图 2 及四参数和无参数公式均方根比较可知,添加奇偶修正项后均方根并没有得到有效改善,因此参照公式(6)的形式将五参数公式中的奇偶修正项 δ 用四极形变参数 β_2 和十六极形变参数 β_4 替换。考

虑到目前实验室可确定形变参数的核素个数不到核电荷半径个数的三分之一，文中涉及的 β_2 、 β_4 均取自 WS*模型[19]。将形变参数与 CR2013 数据表整合后共有 911 个 $N, Z \geq 8$ 且同时存在核电荷半径、四极形变参数 β_2 、十六极形变参数 β_4 三类数据的核素。使用四极形变参数替换后得到新的五参数公式：

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\beta_2^2}{A} \right) A^{1/3} \quad (7)$$

式中 P 的取值与文献[18]一致。使用相同的拟合程序后得 $r_0 = 1.2316 \text{ fm}$ ， $a = 0.1607$ ， $b = 1.6929$ ， $c = 0.3005$ 和 $d = 12.4134$ 。将满足公式(7)的 911 个核素使用原五参数公式描述，对比两公式的均方根后得公式(7)的均方根比原五参数公式均方根下降约 0.0024 fm ，由此表明理论计算时含形变参数修正项的理论值比含奇偶效应修正项的理论值趋近实验值。在公式(7)获得有效改善的情况下，进一步考虑十六极形变 β_4 对经验公式的修正，进而得六参数公式：

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\beta_2^2}{A} + e \frac{\beta_4^2}{A} \right) A^{1/3} \quad (8)$$

拟合得 $\sigma = 0.0295 \text{ fm}$ ，相较原四参数公式误差精度提升约 15%，其余拟合结果为： $r_0 = 1.2346 \text{ fm}$ ， $a = 0.1788$ ， $b = 1.6676$ ， $c = 0.2773$ ， $d = 10.8053$ 和 $e = 365.7318$ 。图 2 对应给出公式(7)和(8)的偏差分布。由图 2 中两幅子图比较可知，六参数的公式在重核区拟合效果略好一些，如 $\Delta Z = 90$ 附近，由图 2(a)五参数公式 $\Delta R_c \geq 0.05 \text{ fm}$ 变化到图 2(b)的 $\Delta R_c \leq 0.05 \text{ fm}$ ，例如从左图洋红色椭圆形所示区域下降至右图青色椭圆区域。

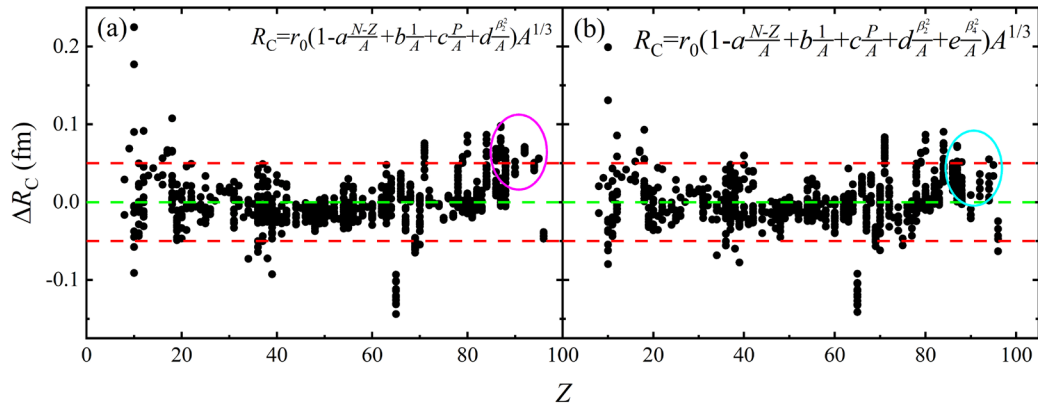


Figure 2. Deviation distribution map of empirical formula after modification of deformation parameters is introduced. (a) Corresponds to the 4-pole deformation modification, (b) corresponds to the 16-pole deformation modification

图 2. 引入形变参数修正后经验公式偏差分布图。(a) 对应四极形变修正，(b) 对应十六极形变修正

由图 2(a)与图 2(b)比较可知，图 2(a)中轻核区偏差大于 ± 0.05 的核素的个数相对较少，而中重核区的偏差分布更加趋近绿色虚线 ($\Delta R_c = 0$)。为便于比较经验公式添加形变参数修正前后不同参数间参数值变化情况及各公式对实验值描述精度变化趋势，在表 1 中罗列出本文修正的公式(7)~(8)以及文献[18]中公式(2)、公式(4)~(11)使用最新数据表 CR2013 拟合的参数值及均方根。

4. 总结

本文主要介绍核电荷半径经验公式所计算的数值能否无限接近实验数据。利用最新实验数据对已有核电荷半径经验公式重新拟合参数，加以验证经验公式的普适性。引入形变参数对 $A^{1/3}$ 律修正，对于

CR2013 数据表中相同的 911 个核素的描述误差相比原五参数公式下降约 0.0024 fm，在四极形变修正的基础上进一步引入十六极形变修正的六参数公式得到的描述精度比原含奇偶效应的五参数公式提升约 14%。相较奇偶效应而言形变参数在核电荷半径理论计算中占据重要角色。由于目前实验条件有限，可精确测量的核电荷半径核素个数相对于目前最新的核质量数据表少之又少。同时已测形变核个数不到核电荷半径个数一半，在最新含有形变参数的实验数据表中，目前仅有近 300 个偶偶核有精确值，希望在不远的将来有更多的实验数据被精确测量。

Table 1. Fitting results for $A^{1/3}$ and $Z^{1/3}$ laws with different parameters in the CR2013 database

表 1. $A^{1/3}$ 律和 $Z^{1/3}$ 律不同参数在 CR2013 数据表中的拟合结果。

公式	参数	σ /fm
$R_C = r_0 A^{1/3}$	$r_0 = 1.2274$ fm	0.1288
$R_C = r_0 Z^{1/3}$	$r_0 = 1.6396$ fm	0.0960
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2817$ fm, $a = 0.2642$	0.0869
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{Z}\right) Z^{1/3}$	$r_0 = 1.6612$ fm, $a = -0.0458$	0.0878
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2338$ fm, $a = 0.1477$, $b = 2.2849$	0.0504
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{Z} + b \frac{1}{Z}\right) Z^{1/3}$	$r_0 = 1.5591$ fm, $a = -0.0824$, $b = 1.0379$	0.0519
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2279$ fm, $a = 0.1517$, $b = 1.9222$, $c = 0.3934$	0.0348
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\delta}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2279$ fm, $a = 0.1519$, $b = 1.8902$, $c = 0.3970$, $d = 0.1222$	0.0344
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\beta_2^2}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2316$ fm, $a = 0.1607$, $b = 1.6929$, $c = 0.3005$, $d = 12.4134$	0.0321
$R_C = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\beta_2^2}{A} + e \frac{\beta_4^2}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2346$ fm, $a = 0.1788$, $b = 1.6676$, $c = 0.2773$, $d = 10.8053$, $e = 365.718$	0.0295

参考文献

- [1] 卢希庭. 原子核物理学[M]. 第 4 版. 北京: 原子能出版社, 2001.
- [2] Campbell, P., Moore, I.D. and Pearson, M.R. (2016) Laser Spectroscopy for Nuclear Structure Physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **86**, 127-180. <https://doi.org/10.1016/j.pnnp.2015.09.003>
- [3] Seliverstov, M.D., Cocolios, T.E., Dexters, W., et al. (2013) Charge Radii of Odd-A¹⁹¹⁻²¹¹ Po Isotopes. *Physics Letters B*, **719**, 362-366. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.01.043>
- [4] Flanagan, K.T., Lynch, K.M., Billowes, J., et al. (2013) Collinear Resonance Ionization Spectroscopy of Neutron-Deficient Francium Isotopes. *Physical Review Letters*, **111**, Article ID: 212501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.212501>
- [5] Xu, J.Y., Li, Z.Z., Sun, B.H., et al. (2022) Constraining Equation of State of Nuclear Matter by Charge-Changing Cross Section Measurements of Mirror Nuclei. *Physics Letters B*, **833**, Article ID: 137333. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137333>

-
- [6] Yoshida, S. and Sagawa, H. (2004) Neutron Skin Thickness and Equation of State in Asymmetric Nuclear Matter. *Physical Review C*, **69**, Article ID: 024318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.69.024318>
- [7] Horowitz, C.J. and Piekarewicz, J. (2001) Neutron Star Structure and the Neutron Radius of ^{208}Pb . *Physical Review Letters*, **86**, 5647-5650. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5647>
- [8] Yamamoto, Y., Togashi, H., Tamagawa, T., *et al.* (2017) Neutron-Star Radii Based on Realistic Nuclear Interactions. *Physical Review C*, **96**, Article ID: 065804. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.96.065804>
- [9] Marinova, K.P. and Angeli, I. (2013) Table of Experimental Nuclear Ground State Charge Radii: An Update. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **99**, 69-95. <https://doi.org/10.1016/j.adt.2011.12.006>
- [10] Goriely, S., Chamel, N. and Pearson, J.M. (2009) Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov Nuclear Mass Formulas: Crossing the 0.6 MeV Accuracy Threshold with Microscopically Deduced Pairing. *Physical Review Letters*, **102**, Article ID: 152503. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.152503>
- [11] Liu, J., Xu, C. and Ren, Z.Z. (2017) Coulomb Form Factors of Even-Even Nuclei Described by Axially Deformed Relativistic Mean-Field Models. *Physical Review C*, **95**, Article ID: 044318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.044318>
- [12] He, Z., Bao, M., Zhao, Y.M., *et al.* (2013) New Features of the Garvey-Kelson Mass Relations. *Physical Review C*, **87**, Article ID: 057304. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.057304>
- [13] Sun, B.H., Liu, C.Y. and Wang, H.X. (2017) Correlating Double-Difference of Charge Radii with Quadrupole Deformation and $b(e2)$ in Atomic Nuclei. *Physical Review C*, **95**, Article ID: 014307. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.95.014307>
- [14] Ma, C., Zong, Y.Y., Zhao, Y.M., *et al.* (2021) Evaluation of Nuclear Charge Radii Based on Nuclear Radii Changes. *Physical Review C*, **104**, Article ID: 014303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.104.014303>
- [15] 焦宝宝. 基于同位素链核电荷半径的新关系[J]. 物理学报, 2022, 71(15): 65-73.
- [16] Wang, N. and Li, T. (2013) Shell and Isospin Effects in Nuclear Charge Radii. *Physical Review C*, **88**, Article ID: 011301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.88.011301>
- [17] Sun, B.H., Lu, Y., Peng, J.P., *et al.* (2014) New Charge Radius Relations for Atomic Nuclei. *Physical Review C*, **90**, Article ID: 054318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.90.054318>
- [18] 圣宗强, 樊广伟, 钱建发. 关于原子核电荷半径的研究[J]. 物理学报, 2015(11): 112101-1-112101-8.
- [19] Wang, N., Liang, Z.Y., Liu, M., *et al.* (2010) Mirror Nuclei Constraint in Nuclear Mass Formula. *Physical Review C*, **82**, Article ID: 044304. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.82.044304>