

Teaching Seminar of Random Signal by Linear System

Mingqian Liu, Bingbing Li, Wanli Guo

School of Telecommunications Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi
Email: mqliu@mail.xidian.edu.cn

Received: Jul. 18th, 2015; accepted: Aug. 1st, 2015; published: Aug. 7th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Random signal by the linear system is an important content in the teaching of random signal analysis. Random signal by the linear system involves linear system theory and time frequency domain analysis theory of signal, which lead students to understand and grasp the contents of this part uneasily. In this paper, the linear time invariant system and the narrow band system are introduced firstly, and then the signal of the linear system is analyzed respectively from the time domain and the frequency domain. The white noise is also analyzed by linear system. Finally, designing examples and experiments make students know how to use the content of this part. This article has some guidance to the teaching of random signal by the linear system and can help students to better understand and apply.

Keywords

Random Signal Analysis, Linear System, Narrow Band System, White Noise

随机信号通过线性系统的教学研讨

刘明骞, 李兵兵, 郭万里

西安电子科技大学通信工程学院, 陕西 西安
Email: mqliu@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2015年7月18日; 录用日期: 2015年8月1日; 发布日期: 2015年8月7日

摘要

随机信号通过线性系统是随机信号分析教学中的重要内容。由于随机信号通过线性系统涉及到线性系统理论以及信号的时频域分析理论,从而导致学生对该部分内容较难以理解和掌握。本文首先介绍线性时不变系统和窄带系统,然后分别从时域和频域对经过线性系统的信号进行分析,并分析了白噪声经过线性系统,最后通过设计实例和实验让学生们对该部分的内容加以应用。文章对于随机信号通过线性系统的教学有一定的指导作用,并且有助于学生更好地理解 and 工程应用。

关键词

随机信号分析, 线性系统, 窄带系统, 白噪声

1. 引言

随机信号通过线性系统是“随机信号分析”课程教学中的重要部分[1],并对于工程应用中随机信号通过线性系统[2][3]有着重要的指导意义。

关于随机信号通过线性系统的教学,重点在于理解线性系统的定义和随机信号通过线性系统的时频域分析、掌握信号和噪声经过线性系统或窄带系统的运用。在理论教学和实验教学中,学生普遍反映随机信号通过窄带系统是难以掌握和应用的。因此,笔者认为,在随机信号通过线性系统的内容教学中不能脱离实际的工程应用背景,并根据以往的教学和科研经验,展开对“随机信号分析”课程中随机信号以及白噪声通过线性系统进行研讨。

2. 线性系统

2.1. 线性时不变系统

我们以确定性信号为例来说明线性系统,这里输入 $x(t)$ 和输出(响应) $y(t)$ 均是确定性信号。线性系统如图1所示,其输出 $y(t)$ 与输入 $x(t)$ 之间的关系可表示为:

$$y(t) = L[x(t)] \quad (1)$$

式中符号 $L[\bullet]$ 是对输入信号 $x(t)$ 进行某种运算的标志,称作算子。

若对于任意常数 a 和 b , 输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 有

$$L[ax_1(t) + bx_2(t)] = aL[x_1(t)] + bL[x_2(t)] \quad (2)$$

则称系统为线性系统。线性系统满足齐次性和可加性原理。若输入 $x(t)$ 时移 c 段时间,输出 $y(t)$ 也只引起一个相同的时移,即

$$y(t-c) = L[x(t-c)] \quad (3)$$

则称此系统为时不变系统。满足式(2)和式(3)的系统称作线性时不变系统[4]。

2.2. 窄带系统

在无线通信中,基带信号需要调制到一个载频上才能发射出去,通常这种已调信号的带宽远远小于载波频率,这种信号称为窄带信号,多数无线电接收机接收并处理的信号几乎都是窄带信号。因此研究窄带信号和窄带系统[5]是十分有意义的。

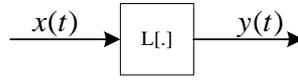


Figure 1. Linear system
图 1. 线性系统

若实平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度满足

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_X(\omega) & \omega_0 - \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_0 + \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

且 $\omega_c \ll \omega_0$ ，称 $X(t)$ 为高频窄带随机过程，简称窄带随机过程，图 2 为其功率谱密度。

窄带随机过程有两种表达形式，一种为实窄带随机过程的莱斯表达式，可表示为：

$$X(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t \quad (5)$$

其中， $a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + \hat{X}(t) \sin \omega_0 t$ ， $b(t) = -X(t) \sin \omega_0 t + \hat{X}(t) \cos \omega_0 t$ ， $\hat{X}(t)$ 是 $X(t)$ 的希尔伯特变换。另外一种为窄带实随机过程的准正弦振荡表达式，表示为：

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (6)$$

其中， $A(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$ ， $A(t)$ 是窄带过程的包络， $\varphi(t) = \arctg \frac{b(t)}{a(t)}$ ， $\varphi(t)$ 是窄带过程的相位。

3. 随机信号通过线性系统

随机信号通过线性系统所采用的分析方法有两种：时域的卷积积分分析法和频域分析法[6]。

3.1. 时域分析法

1) 系统输出的均值

$$m_Y(t) = m_X(t) * h(t) \quad (7)$$

若 $X(t)$ 为平稳随机过程，则

$$m_Y = m_X \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau \quad (8)$$

2) 系统输入与输出之间的互相关函数

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) * h(t_2), \quad R_{YX}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) * h(t_1) \quad (9)$$

3) 系统输出的自相关函数

$$R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)] = h(t_1) * h(t_2) * R_X(t_1, t_2) \quad (10)$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程，则

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau) \quad (11)$$

4) 系统输出的高阶距

$$E[Y(t_1)Y(t_2)\cdots Y(t_n)] = E[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)] * h(t_1) * h(t_2) * \cdots * h(t_n) \quad (12)$$

5) 系统输出的平稳性和遍历性

若输入 $X(t)$ 是宽平稳的，则系统输出 $Y(t)$ 也是宽平稳的，且输入与输出联合宽平稳；若输入 $X(t)$ 是

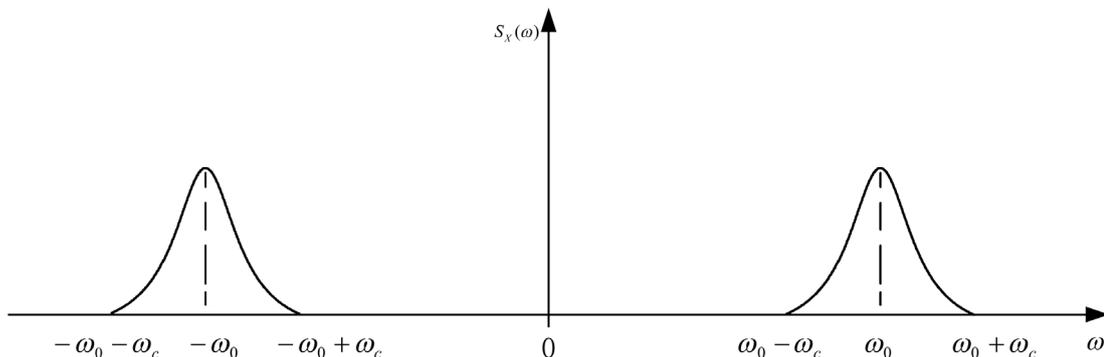


Figure 2. Power spectral density of narrow band random process

图 2. 窄带随机过程的功率谱密度

严平稳的, 则输出 $Y(t)$ 也是严平稳的; 若输入 $X(t)$ 是宽遍历性的, 则输出 $Y(t)$ 也是宽遍历性的, 且联合遍历。

3.2. 频域分析法

假定系统处于稳态, 输入信号 $X(t)$ 是平稳随机信号, 则输出 $Y(t)$ 也是宽平稳的, 且 $Y(t)$ 与 $X(t)$ 是联合平稳的, 则有:

- 1) 系统输出的均值

$$m_Y = m_X \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau = m_X H(\omega)|_{\omega=0} = m_X H(0) \quad (13)$$

- 2) 系统输出的功率谱密度

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) H(\omega) H(-\omega) = S_X(\omega) |H(\omega)|^2 \quad (14)$$

用复频率 $s = \sigma + j\omega$ 表示, 有:

$$S_Y(s) = S_X(s) H(s) H(-s) \quad (15)$$

- 3) 系统输入与输出间互谱密度

$$S_{XY}(\omega) = S_X(\omega) H(\omega), \quad S_{YX}(\omega) = S_X(\omega) H(-\omega) \quad (16)$$

显然有:

$$S_Y(\omega) = S_{XY}(\omega) H(-\omega) = S_{YX}(\omega) H(\omega) \quad (17)$$

或

$$S_Y(s) = S_{XY}(s) H(-s) = S_{YX}(s) H(s) \quad (18)$$

3.3. 线性系统输出的概率分布

线性系统输入是一个随机信号, 它的输出也是随机信号, 因此具有一定的分布, 通常情况, 难以确定一个线性系统输出的分布。但在下述两种情况下, 线性系统的输出为高斯分布:

- 1) 线性系统输入为高斯过程, 则输出也是高斯过程;
- 2) 若输入为非高斯过程, 其等效噪声带宽远大于系统带宽, 则系统输出近似高斯过程。

4. 白噪声通过线性系统

设连续线性系统的传递函数为 $H(\omega)$ 或 $H(s)$ ，其输入白噪声功率谱密度为 $S_x(\omega) = N_0/2$ ，那么系统输出的功率谱密度为[7]：

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 \frac{N_0}{2} \quad (19)$$

或物理谱密度为：

$$G_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 N_0 \quad (\omega > 0) \quad (20)$$

输出自相关函数为：

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \int_0^{\infty} h(u)h(u+\tau) du \quad (21)$$

输出平均功率为：

$$E[Y^2(t)] = \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (22)$$

在上述的线性系统、随机信号通过线性系统以及白噪声通过线性系统之后，同学们可以综合所学的知识，思考如下的实例，以更好地理解 and 掌握概念及性质，从而进一步的应用。

实例：在如图 3(a)所示的系统中，零均值的平稳随机信号 $S(t)$ 的功率谱密度 $S_s(\omega)$ 如图 3(b)所示， $N(t)$ 为一个均值为 0，双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，其中 N_0 为常数，窄带带通滤波器的系统传递函数如图 3(c)所示，其中 W (rad/s) 为窄带带通滤波器的带宽，并且 $\omega_0 \gg W$ ， ω_0 和 W 均为常数， $S(t)$ 与 $N(t)$ 相互独立，则系统输出 $Y(t)$ 的功率谱如何求得？

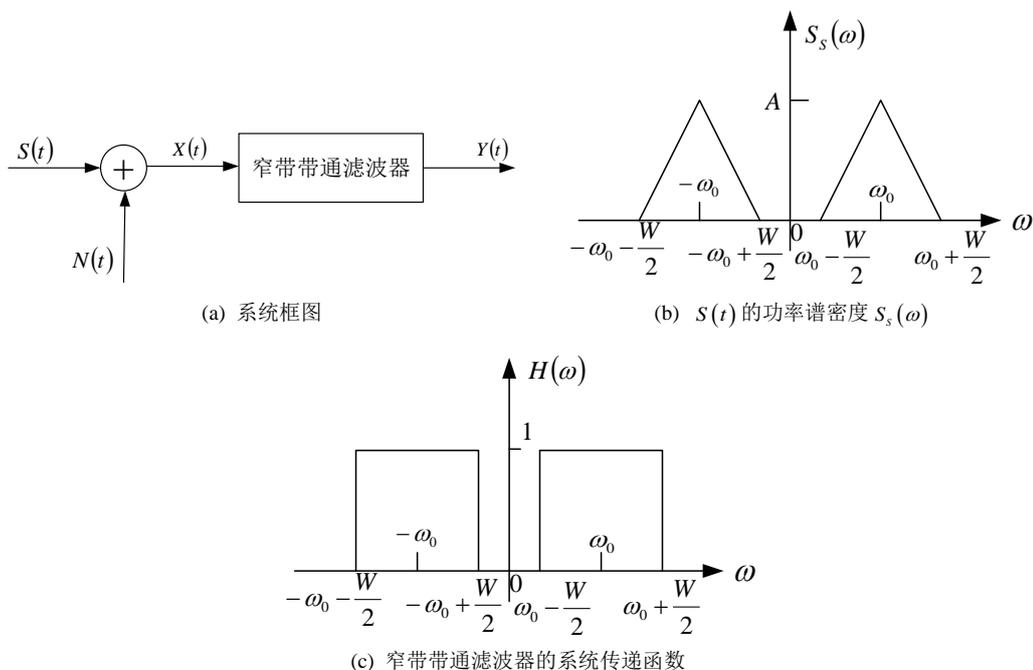


Figure 3. Instance graph
图 3. 实例图

5. 通过线性系统的设计实验

在此, 给出一个通过线性系统的实验, 通过该实验使学生掌握随机信号和噪声通过线性系统的特性及性质, 以便于学生能够学以致用。

实验的参数设置为: 输入信号为方波信号 $x(t) + n(t)$, 其方波的基频为 1000 Hz, $n(t)$ 为高斯分布的白噪声, 其中输入方波信号的时频域波形图如图 4 所示, $n(t)$ 的时频域图如图 5 所示, 输入信号通过如图 6 所示的串并系统, 其中 h_1 、 h_3 是线性系统, h_2 是非线性系统, h_1 系统要求设计成滤波器, 输入信号经 h_1 后输出为 1 KHz 正弦信号; h_3 系统要求设计成滤波器, 输入信号经 h_3 后输出为 3 KHz 正弦信号; h_2 系统要求设计成平方律器件, 输出信号 $y(t)$ 的频率为 3 个频率成分的叠加, 即 1 KHz、2 KHz、3 KHz。自选 MATLAB 或 C/C++ 仿真软件之一编程和仿真。滤波器的结构及参数和所涉及到的采样频率取值根据滤波器在这里所起的作用、输入信号本身的特点来确定, 因此这里不作规定。

通过编写仿真程序并正确地运行程序, 并用波形图来表示出仿真的结果, 分析 $n(t)$ 的均值、均方值、方差, 自相关函数、概率密度、频谱及功率谱密度; 测试滤波器的频率特性并画出频率特性曲线, 以验证是否符合要求, 其中输出信号 $y(t)$ 的时频域波形图如图 7 所示。

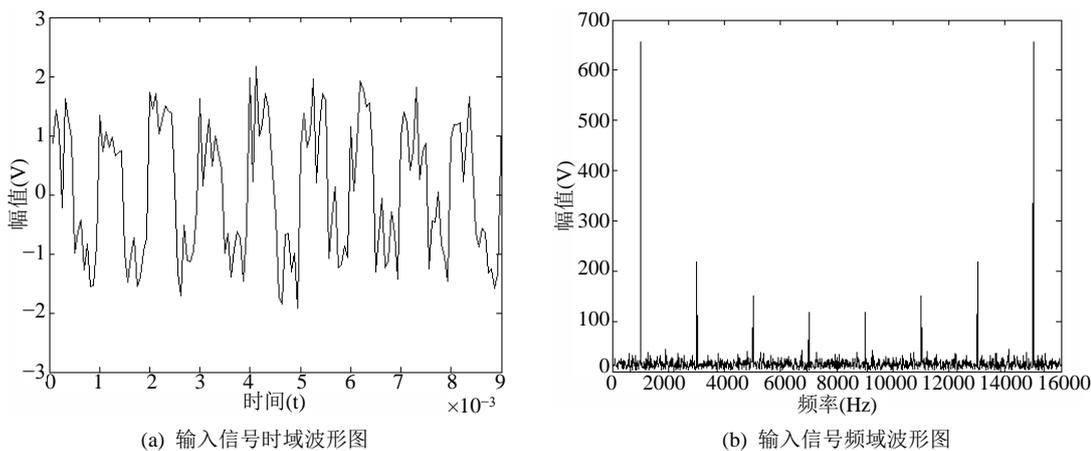


Figure 4. Time frequency domain oscillogram of input signal
图 4. 输入信号的时频域波形图

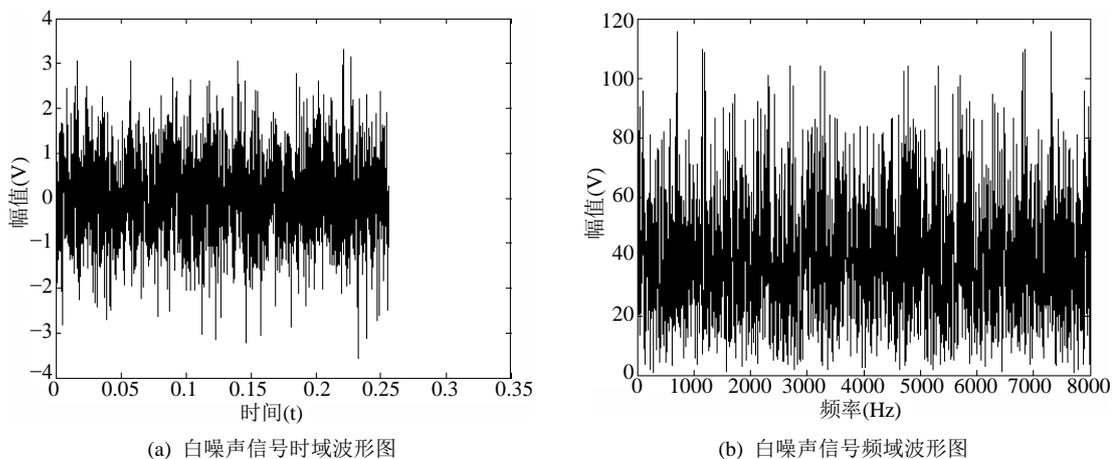


Figure 5. Time frequency domain oscillogram of Gaussian white noise
图 5. 高斯白噪声的时频域波形图

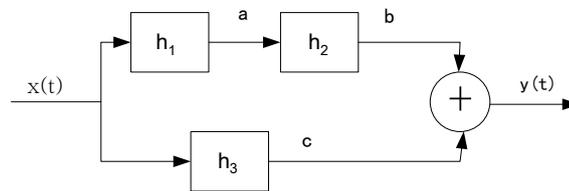


Figure 6. Principle block diagram of series parallel systems

图 6. 串并系统的原理框图

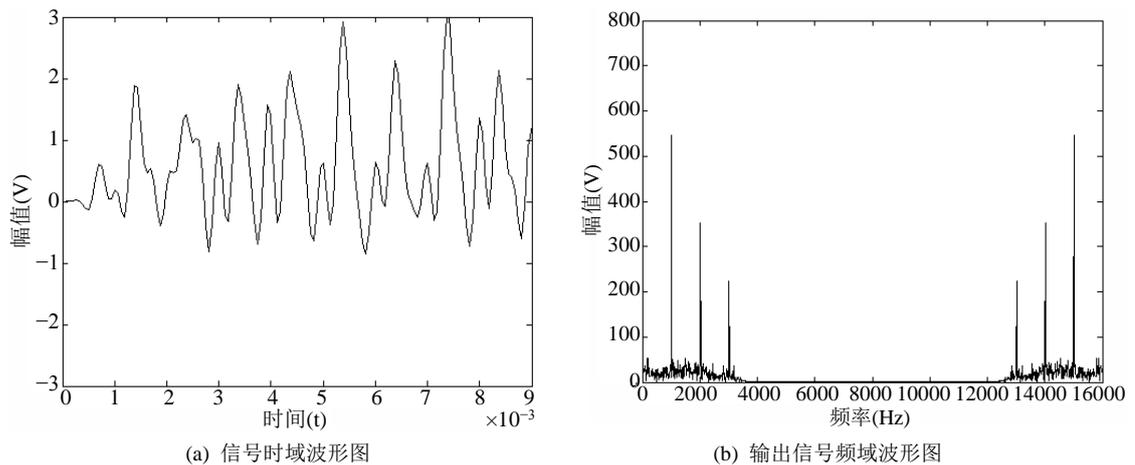


Figure 7. Time frequency domain oscillogram of output signal

图 7. 输出信号的时频域波形图

基金项目

陕西省资源共享课、信息工程拔尖人才培养模式创新实验区和西安电子科技大学教学质量提升计划项目资助。

参考文献 (References)

- [1] 李兵兵, 马文平, 田红心 (2012) 随机信号分析教程. 高等教育出版社, 北京.
- [2] 王宏禹, 邱天爽 (2015) 非平稳确定性信号与非平稳随机信号统一分类法的探讨. *通信学报*, **36**, 2015028-1-2015028-10.
- [3] 杨建华, 朱华 (2013) 不同周期信号激励下分数阶线性系统的响应特性分析. *物理学报*, **62**, 024501-1-024501-7.
- [4] 高西全, 丁玉美 (2008) 数字信号处理(第3版). 西安电子科技大学出版社, 西安.
- [5] 张伟 (2015) 基于循环平稳的 DSSS 系统窄带干扰抑制技术. *火力与指挥控制*, **40**, 18-20.
- [6] 吴大正, 杨林耀, 张永瑞 (2005) 信号与线性系统分析(第4版). 高等教育出版社, 北京.
- [7] 樊昌信, 曹丽娜 (2008) 通信原理(第6版). 国防工业出版社, 北京.