

# Application of Modeling Ideas in the Teaching of Mathematical Analysis

Juhe Sun, Li Wang, Liyan Wang, Yanjie Li

School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning  
Email: juhesun@163.com

Received: Mar. 29<sup>th</sup>, 2020; accepted: Apr. 13<sup>th</sup>, 2020; published: Apr. 20<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

“Mathematical analysis” is a basic discipline of mathematics. In the process of its production and development, it has been closely connected with various application problems. Modeling ideas can design teaching according to practical problems, which not only can improve students’ learning interest, but also help to cultivate students’ innovative research ability. Moreover, the expansion of each stage in the modeling process can bring different levels of students reward. This article takes the curvature as an example to study the application of modeling ideas in the “mathematics analysis” hierarchical teaching.

## Keywords

Modeling Ideas, Mathematical Analysis Teaching Design, Curvature

---

# 建模思想在“数学分析”教学中的应用

孙菊贺, 王 莉, 王利岩, 李艳杰

沈阳航空航天大学, 辽宁 沈阳  
Email: juhesun@163.com

收稿日期: 2020年3月29日; 录用日期: 2020年4月13日; 发布日期: 2020年4月20日

---

## 摘 要

“数学分析”是数学专业的一门基础学科,它在产生和发展的过程中,一直是和各种各样的应用问题紧密相连的。建模思想是可以根据实际问题来设计教学,不仅能提高学生的学习兴趣,更有助于培养学生的创新研究能力,而且建模过程中每阶段的拓展能给不同层次的学生带来不同的收获。本文以曲率为例,研究建模思想在“数学分析”教学中的应用。

## 关键词

建模思想, 数学分析教学设计, 曲率

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

目前, 高等教育正朝着普及化的方向发展, 进入同一所大学学生的学习能力与扩招之前相比有很大的差距。同时, 经过高中阶段“魔鬼刷题式”的训练后, 很多学生已经没有了对数学的好奇和渴望。而《数学分析》这门课程是数学专业本科生最重要的基础课之一, 具有知识点多而难的特点。学生缺少学习兴趣, 不愿深入思考, 学习主动性差, 再加上课程本身的特点, 使得“数学分析”教学面临着严峻的挑战。显然, 传统的讲授式的教学方式已经不适合今天的大学生了。为此, 专家们也对大学数学的学习提出了很多教学改革的方法和手段, 包括线上线下相融合的教学实践, 分流学习讨论和多媒体的有效利用和项目教学法得实施等等[1] [2] [3], 另外针对《数学分析》课程的教学改革也是层出不穷[4] [5] [6] [7] [8], 但是授课内容还是完全依照讲义居多。所以, 现存的“数学分析”的教学方法还是重视理论而忽视了应用。而真正能引起学生兴趣的恰恰是来自于生活和工作的实际应用。学生只有学以致用, 才能学得认真, 学得深入。

教学方法中融入建模思想能引起学生的好奇心, 激发其解决问题的欲望, 从而能认真有效地学习必要的知识点。同时, 如果要使建模问题得到解决, 还需要很多拓展知识和研究能力。可以鼓励一部分有能力学生完成建模, 形成论文, 培养其解决问题和做研究的能力。因此, 建模教学思想的应用弥补了传统教学方法的不足, 值得推广。

## 2. 建模思想在教学中的应用案例分析

建模教学思想是以工程、生活或工作中出现的实际问题为出发点, 引起学生的学习兴趣。在建模问题的选取时, 要注重与教学内容中的知识点的结合紧密度。课程的设计要科学合理, 教学目标既要注重面对全体学生的知识点传授, 还要注重对部分学生的创新能力和科研能力的培养。

教学中融入建模思想不仅能提高学生的学习兴趣, 让学生学会知识并认识到这些知识对以后的学习和工作的作用, 还能培养学生的科研能力, 满足课上“吃不饱”学生的需求。下面, 我们以知识点“曲率”为例, 展示一下建模教学思想在“数学分析”教学中的应用。

### 2.1. 确定建模问题

建模问题的选择非常广泛, 可以是历年省级、国家级和美国建模竞赛试题, 也可以是工程上或生活中遇到的实际问题, 还可以是老师们的科研项目中的子问题。所确定的建模问题, 必须和即将要学习的知识点紧密相关。本节课选择工程中的实际问题。火车或地铁的每两节车厢之间是靠硬连接连接的, 而在硬连接的两侧分布着提供电力的连接电缆(软连接), 如图 1 和图 2 所示。

由于列车在行驶过程中会发生转弯和上下坡等运动, 导致电缆线的弯曲状态会随之发生改变。因此, 对电缆长度的范围就要有一定的要求。我们以节约成本为前提, 在满足使用的条件下, 找到电缆线的最

佳长度。

选择本建模问题有以下三方面的原因：1) 问题贴近生活，容易引起学生解决问题的兴趣；2) 本问题来源于教师的科研课题，易懂难解，有助于培养学生的研究能力；3) 本问题最终转化为线性规划问题，该思想被广泛应用在各个科学领域，扩大了学生的知识面。

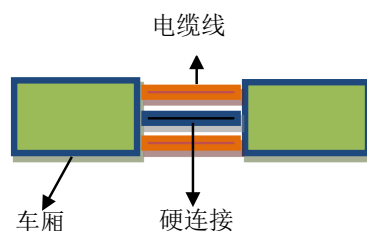


Figure 1. Top view  
图 1. 俯视图

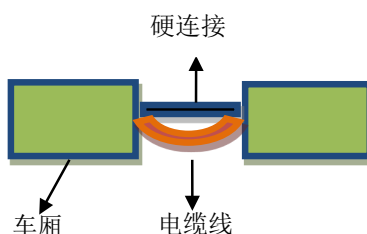


Figure 2. Side view  
图 2. 侧视图

## 2.2. 将建模问题融入到课堂的教学设计当中

将上述求两节车厢中电缆线长度问题作为引例融入到课堂教学中。引例：地铁在行走的时候都会经过弯路，两节车厢之间不仅有硬连接，还有软连接(里面布满了电缆线)，当火车或地铁转弯时，外侧的电缆线容易拉断，内侧的电缆线会被压弯，这样容易触碰到地面，那么电缆线(软连接)的长度在什么范围内比较合适呢？

分析：给出转弯状态的俯视图和被挤压一侧的电缆线示意图，如图 3 和图 4。根据现场考察，电缆线并不是锁链，而是一个较粗的胶皮管，因此当两端被挤压到一定程度时，电缆线的形状会由图 4 中的(a)形状向(b)形状转变，(b)形状最低端和连接处圆弧的大小取决于电缆线的最大弯曲程度(曲率)。由此引出曲率的定义。

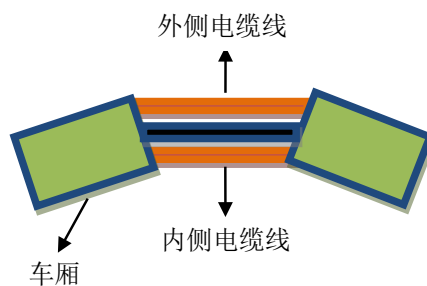


Figure 3. Top view of turn  
图 3. 转弯俯视图



Figure 4. Inside cable side view  
图 4. 内侧电缆线侧视图

实际上，建模问题可以作为引例，在交代知识点之前提出，也可以作为总结知识点时提出，说明该知识点在哪些问题上有所应用。本建模问题首先作为引例引出“曲率”，说明曲率的重要作用，之后又作为“曲率”应用问题得到解决，使得整个教学过程首尾呼应，浑然一体。

### 2.3. 完成知识点教学

1) 曲率是描述曲线弯曲程度的量。如图 5 中，不同曲线或同一曲线在不同位置的弯曲程度是不一样的。

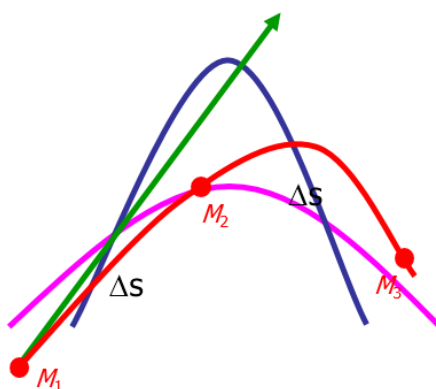


Figure 5. Bending degree diagram  
图 5. 弯曲程度示意图

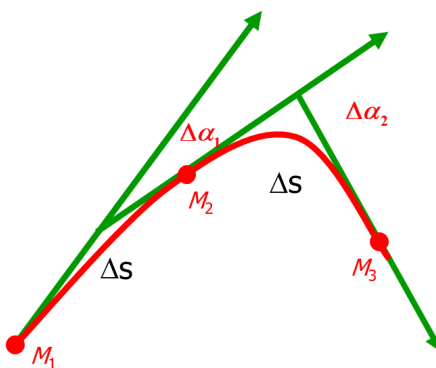


Figure 6. Same arc length, different bending  
图 6. 弧长相同，弯曲程度不同

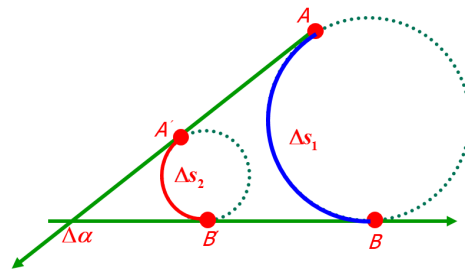


Figure 7. Same tangent angle, different bending  
图 7. 切线转角相同, 弯曲程度不同

- 2) 当弧长相同时, 曲率的大小与切线的转角  $\Delta\alpha$  成正比。如图 6 所示, 转角  $\Delta\alpha$  越大, 曲线越弯曲。
- 3) 当转角相同时, 曲率的大小与曲线的弧长  $|\Delta s|$  成反比。如图 7 所示, 弧长  $|\Delta s|$  越小, 曲线越弯曲。
- 4) 由此可以推导出曲率的定义及计算公式为

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

对于直线来说

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = 0$$

这就是说, 直线上任意点  $M$  处的曲率都等于零, 这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致。设圆的半径为  $R$ , 由图 8 可见在点  $M$ 、 $M'$  处圆的切线所夹的角  $\Delta\alpha$  等于中心角  $MDM'$ , 但  $\angle MDM' = \Delta s / R$ , 于是

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\alpha}{R} = \frac{1}{R}$$

从而

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{1}{R}$$

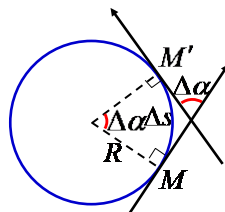


Figure 8. Arc diagram  
图 8. 圆弧示意图

该部分是必须完成的教学任务, 主要交代清楚“曲率”的定义和计算, 引导学生思考, 对于电缆线, 怎样求出某个形状下的曲率呢? 如果求出曲率之后, 怎样将求得的结果应用到电缆长度的确定上呢?

#### 2.4. 培养学生的研究能力

教学模式由封闭式向开放式转变, 以学生为主体, 解决问题。通过线上或线下的方式给学生进一步

分析所提出的建模问题，介绍所涉及的相关知识点，为问题的解决给与一定的技术支持，鼓励有能力，有想法的学生做进一步更深入的研究。这一部分的完成培养了一部分学生的科研能力和热情，从培养角度达到了层次教学的目的。具体步骤如下：

1) 教师指导。提示学生应按列车行驶状态分情况进行分析。以“最小成本”为主要目的，决定了该问题应该用优化方法求解。

2) 经过教师指导，学生分析，得到如下解决方案：

### 2.4.1. 三种静态状态分析

#### (i) 转弯状态

假设电缆线的长度为  $L$ ，列车的转弯半径为  $R$ ，则列车外侧电缆会被拉的稍直，所以必须要求  $L \geq D$ ，其中  $D$  为列车转弯时，外侧电缆两个端点之间的距离(如图 9)。

列车内侧电缆由于挤压其弯曲程度要变大，令  $d$  为列车转弯时，内侧电缆两个端点之间的距离。由电缆线的状态，启发学生联想到柔软、不能伸长的绳子悬挂于两点的形状满足悬链线方程

$$f(x) = ach \frac{x}{a}$$

而电缆的硬度要高于柔软的绳子，所以悬挂于两点之间的电缆线的弯曲程度要小于悬链线的弯曲程度，即电缆线的最低点要稍高于悬链线的最低点。

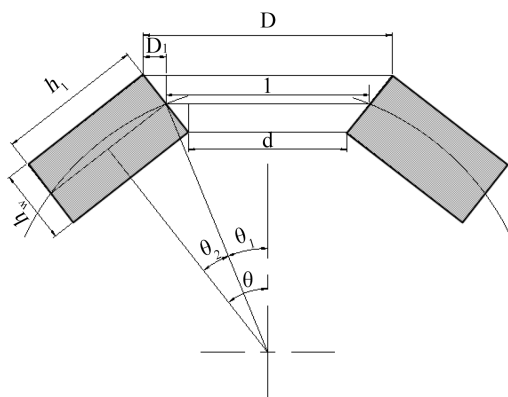


Figure 9. Top view of turning state  
图 9. 转弯状态俯视示意图

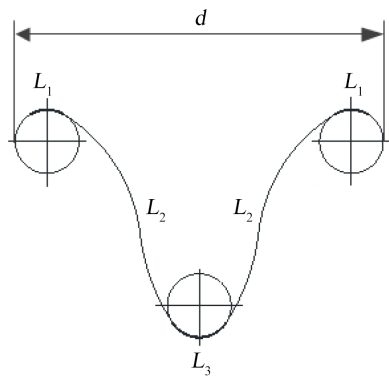


Figure 10. Schematic diagram of cable L shape  
图 10. 电缆线 L 形状示意图

由此, 只要要求  $L \leq S_{\text{悬}}$  即可, 其中  $S_{\text{悬}}$  是挂在内侧电缆两 endpoint 之间的悬链线的长度, 通过弧长公式即可得到悬链线的长度  $S_{\text{悬}}$ 。利用三角变换启发学生建立  $D$  和  $d$  与  $h_w$ ,  $h_l$  和  $R$  的函数关系模型, 如下:

$$D = l + h_w \left( l\sqrt{4R^2 - h_l^2} + h_l\sqrt{4R^2 - l^2} \right)$$

$$d = l - h_w \left( l\sqrt{4R^2 - h_l^2} + h_l\sqrt{4R^2 - l^2} \right)$$

最终得到  $L$  应满足三个条件:

(a)  $L \geq D$ ; (b)  $L \leq S_{\text{悬}}$ ; (c)  $h = ach \frac{d}{2a}$ ,  $a \geq 370$ 。

在此情况下  $L$  的精确长度应该由五部分组成, 如图 10 所示。我们得到

$$L = 2L_1 + 2L_2 + L_3$$

而  $L_1, L_3$  可以通过电缆线的达到最大弯曲程度时的曲率计算出来,  $L_2$  可以用悬链线近似代替。

### (ii) 爬坡状态

假设列车正沿着坡角为  $\alpha$  的坡度向上或向下行驶。则我们以坡面为  $x$  轴建立直角坐标系。不难看出, 若  $L$  满足上一状态的条件, 这一状态也必然能够满足。

### (iii) 过山包状态

当前一节车厢处于下坡状态, 后一节车厢处于上坡状态时, 我们称之为过山包状态。我们近似的将山包看成突起的球面, 设球面的半径为  $r$ , 则两节车厢则运动在突起的弧面上, 此时两车厢的底面都将与弧面相切。为了使电缆线最低点高出底面 350 mm (实际要求距离) 以上, 我们要要求

$$a \geq 370 + r' \quad (1)$$

为此, 我们要计算出  $r'$  的值。经过引导学生画图分析, 即可求得

$$r' = r \left[ 1 - \frac{2(r+h)\sqrt{h_l^2 + 4(r+h)^2 - l^2} - h_l l}{h_l^2 + 4(r+h)^2} \right]$$

由此可见, 当  $r \rightarrow +\infty$ , 即底面趋于平面时有  $r' \rightarrow 0$ , 此时(1)式便为  $a \geq 370$ , 与状态(i)中的条件项符合。

以上分析问题、解决问题的过程锻炼了学生的多项能力。分情况讨论, 培养了学生严谨的逻辑思维能力; 悬链线的引入和长度计算, 培养了学生知识点应用和计算能力; 过山包状态的分析, 培养了学生的创新能力。

## 2.4.2. 建立模型

根据以上三种静态状态的分析结果, 我们可以将求电缆线长度  $L$  的问题归结为求解下面线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min L &= 2L_1 + 2L_2 + L_3 \\ \text{s.t. } L &\geq D \\ L &\leq S_{\text{悬}} \\ h &= ach \frac{d}{2a} \\ a &\geq 370 + r' \end{aligned}$$

上述问题可以通过有效的优化方法进行求解。最后根据实际测量的数据算得的结果大概在 12 m 到

13 米之间。

当学生最终将问题转化为上述线性规划问题时, 还要经过学习文献资料才能得到具体的解决方法, 而且还要用到 Matlab 程序设计等技能。整个过程培养了学生的科学研究能力, 为各种竞赛和学术研究打下基础。

### 3. 结束语

《数学分析》教学中引入建模思想, 不仅提高了学生的学习兴趣, 更使学生对知识点的理解更加的深刻。实践结果显示, 能最终成功解决问题的学生大概在 20% 左右, 这部分学生的学习总结能力、科学研究能力都得到了充分的锻炼, 不仅有机会成功申请大学生创新计划, 而且在数学建模竞赛和数学竞赛中也取得了好的成绩, 更是为研究生阶段打下了良好的基础。

信息化时代已经来临, 固守传统的教育模式不再能收到预期效果, 我们要与时俱进, 不断地追求和探索新时代的教学方法和教学改革, 为培养基础扎实的创新型人才而努力。通过建模教学在“数学分析”教学中的实施, 不仅激发了学生的学习兴趣, 提高学习效率, 拓宽了学生的知识面, 更加培养了学生的创新能力和解决问题的科研能力, 给“吃不饱”的学生一个充分的发展空间, 为将来的研究工作打好基础, 达到了层次化教学的目的。

### 基金项目

校专项课题“《数学分析》教学中加强基础理论与多样化培养目标相结合的探索与实践”的阶段性研究成果。

### 参考文献

- [1] 梁道雷. 基于线上 + 线下融合的离散数学翻转课堂教学实践研究[J]. 大学数学, 2019(2): 45-49.
- [2] 王静等. 基于 SPOC 的《高等数学》课程混合式教学新探索[J]. 大学数学, 2019(5): 29-34.
- [3] 李长毅. 项目教学法在数学教学中的运用分析[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2013, 26(9): 137-139.
- [4] 杨洁. 新形势下数学分析教学改革的探索与实践[J]. 教育现代化, 2017(34): 39-40.
- [5] 彭丽辉等. 《数学分析》教学模式改革探讨[J]. 教育教学论坛, 2015(8): 128-129.
- [6] 金玲玉, 等. 数学分析教学改革的几点认识和体会[J]. 大学数学, 2012(4): 25-30.
- [7] 吴玉田. “数学分析”课程教学现状研究[J]. 萍乡学院学报, 2016, 33(6): 109-112.
- [8] 钱晓元. 数学分析教学与三种基本数学能力的培养[J]. 大学数学, 2010(6): 207-210.