

# 基于Unity 3D的积分可视化研究

卢文浩, 杨立洪

华南理工大学数学学院, 广东 广州

Email: 197720327@qq.com

收稿日期: 2021年3月20日; 录用日期: 2021年4月15日; 发布日期: 2021年4月22日

## 摘要

目前在对大学高等数学中的积分基础知识的学习, 初学者对抽象的数学定义理解困难、需要快速获取知识。本文针对这些问题构建了一个基于Unity 3D的积分可视化系统。通过3D数学函数绘制、积分可视化、功能模块开发等实现了在虚拟三维空间构建数学函数微积分的学习功能。该系统无论对于学生自学, 还是教师的教学辅助设计都有极大的帮助。

## 关键词

虚拟现实, 高等数学, 微积分, 可视化系统

# Research on Integral Visualization Based on Unity 3D

Wenhao Lu, Lihong Yang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong

Email: 197720327@qq.com

Received: Mar. 20<sup>th</sup>, 2021; accepted: Apr. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Apr. 22<sup>nd</sup>, 2021

## Abstract

At present, in the study of integral basic knowledge in higher mathematics, beginners have difficulty in understanding abstract mathematical definitions and need to acquire knowledge quickly. Aiming at these problems, this paper constructs an integral visualization system based on Unity 3D. Through 3D mathematical function drawing, integral visualization and function module development, the learning function of constructing mathematical function integral in virtual three-dimensional space is realized. The system is of great help to students' self-study and teachers' teaching aid design.

文章引用: 卢文浩, 杨立洪. 基于 Unity 3D 的积分可视化研究[J]. 创新教育研究, 2021, 9(2): 396-402.

DOI: 10.12677/ces.2021.92062

## Keywords

Virtual Reality, Advanced Mathematics, Calculus, Visualization System

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在教育行业, 如何提高教学的教学质量, 提高学生对新知识的接受程度和学习效率一直都是一个重要的研究方向。尤其是在数学教育上, 数学知识点的抽象性一直是困扰着学生的难题, 为此人们也做出了大量的努力去改良数学教学的各个方面, 其中知识的可视化就是极其关键的一部分。相比于抽象的文字叙述, 直观可见的图像更能被初学者接受, 在如今的中小学教育中, 尤其是小学教育, 数学课本和数学课件广泛的运用了许多生动的图像, 来吸引学生的兴趣, 同时让学生能够更清晰的了解到自己正在学习的知识[1]。而在大学教育方面, 这方面的可视化则比较少, 主要是由于高等数学的知识点相比于中小学的知识点更为抽象, 将它们进行可视化比较困难, 其次就是因为学习高等数学的学生在过去相对有限, 需求不如中小学教育。然而到了如今, 本科生的人数急剧增加, 对于高等数学学习的需求增加, 不仅限于数学相关专业, 许多专业也需要掌握一定的高等数学知识, 而能够提高学习效率的高等数学可视化的研究就显得相对薄弱。

虚拟现实技术是可视化应用的一个重要方面, 在可视化方面的应用已经逐步走到了世界的前沿。虚拟现实技术结合计算机技术、图形图像技术、人机交互技术等[2], 在计算机中构建虚拟场景, 模拟真实的现实世界, 并进行各类仿真, 实现生活在另一个世界的场景, 逐渐被应用于游戏、教育、医疗等领域。

本文基于 Unity 3D 三维开发引擎, 构建了高等数学积分的可视化虚拟学习系统, 实现了数学函数绘制、积分定义模拟、数值结果输出、模块控制等功能。

## 2. 积分相关定义和虚拟现实技术

### 2.1. 函数

定义在  $D$  上的函数可由映射  $f: D \rightarrow R$  表示, 记为  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ , 其中,  $D$  为定义域,  $x$  为自变量,  $y$  为因变量。当  $D \subset R$  时, 函数  $f$  为一元函数, 而当  $D \subset R^2$  时, 称  $f$  为二元函数。

### 2.2. 积分

设函数  $f(x)$  定义在有界闭区间  $[a, b]$  上, 有实数  $A$ , 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对  $[a, b]$  的任意分割  $T$  及其上的点集  $\{\xi_i\}$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 则  $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - A| < \varepsilon$ , 则称函数  $f(x)$  黎曼可积。

在二元函数的情况下, 可以定义二重积分, 设函数  $f(x, y)$  是定义在有界闭区域  $D$  上的有界函数, 对  $D$  分割为子区域集  $\{\Delta \sigma_i\}$ ,  $(\xi_i, \eta_i)$  为  $\Delta \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$  上的任意点, 当子区域的直径最大值  $\lambda$  趋于 0,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  的极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分。

### 2.3. 虚拟现实技术在数学教育的应用

虚拟现实技术结合了计算机图形技术、仿真模拟技术、传感技术等于一体, 通过构造三维空间场景,

模拟现实真实场景, 为使用者提供了多感知的沉浸体验, 被应用于多个领域。在教育领域上, 被应用于医学、物理、模拟实验室等方面。在数学教育上, 小学阶段可以提过虚拟现实技术更直观的学习知识, 培养学生抽象思维。中学阶段, 可以有针对性的对知识点可视化, 方便学生理解。在大学阶段, 数学符号大多抽象晦涩, 虚拟现实技术在这方面具有重要价值[3]。

陈哲涵, 丁文英[4]通过构造虚拟现实三维场景, 模拟物流的场景, 提出了运筹学的可视化学习系统, 增强学生的学习积极性。FCC Alves [5]等人通过虚拟现实和增强现实技术, 实现了柏拉图多面体的三维可视化, 并应用到教学中。

### 3. 系统架构

虚拟现实技术开发软件主要有: Virtools、Unity 3D 和 Quest 3D 等。其中 Unity 3D 具有良好的功能扩展性, 具有可视化编程界面, 支持不同平台的软件开发, 被广泛应用于虚拟现实领域。Unity 3D 提供了 Mesh 来实现不同平面和三维物体的绘制, 可以通过顶点的坐标等数据来实现函数图像的绘制。

Unity3D 可以分别构建不同的场景来展示不同的界面, 通过场景之间的交互功能来实现场景间的跳跃, 每个场景单独构建, 减少因不同函数模块交互影响带来的问题。

高等数学积分的可视化虚拟学习系统由主界面、各知识点场景、功能模块组成。

#### 3.1. 主界面

主界面场景为导航场景, 点击对应按钮进入相应的知识点场景, 如图 1, 可通过按钮从其他场景返回。

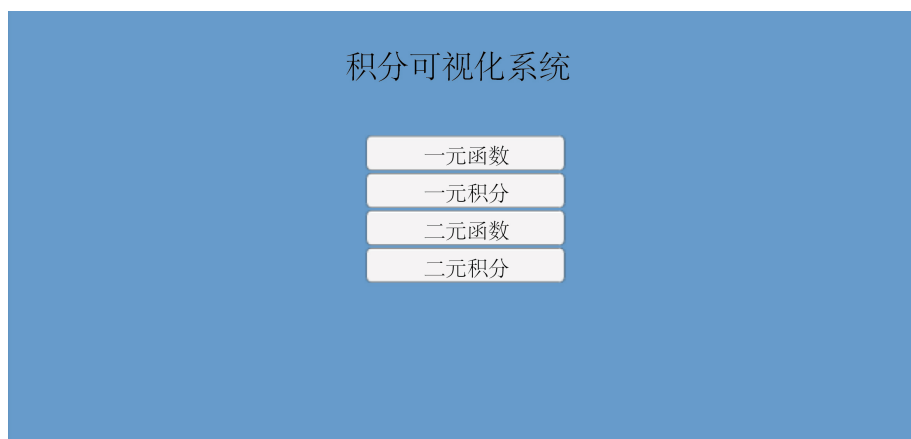


Figure 1. Main screen

图 1. 主界面

#### 3.2. 一元函数场景

一元函数在图像上的表达一般是曲线的形式, 而曲线在 Unity 3D 里面可以使用 LineRenderer 渲染器来绘制。根据自定义的函数和相关参数, 生成函数图像上的点的坐标数据, 就可以通过 LineRenderer 渲染器来进行渲染。

Unity 3D 内置了一些基础的三维模型, 函数图像的坐标系可以使用这些基础模型来模拟。

一元函数场景包含函数绘图虚拟现实场景、底部各参数输入模块、左侧函数显示模块、返回模块。

在底部输入  $x$  的定义域、值域、一元函数的表达式, 点击按钮就可以绘制该函数。分别输入不同的

函数, 该功能可以添加多个函数, 并同时绘制显示这些函数图像。左侧的函数显示模块可以记录并显示所绘制的不同函数的函数式。“axes” 单选按钮可以显示或隐藏坐标轴, “返回” 按钮可以返回到主界面。

这个场景不仅可以显示三维图像, 还可以通过添加不同的函数图像来进行图像的设计, 比如绘制  $y = x^2$  函数, 同时可以绘制它在点 (1,1) 的切线  $y = 2x - 1$ , 图像结果如图 2 所示。

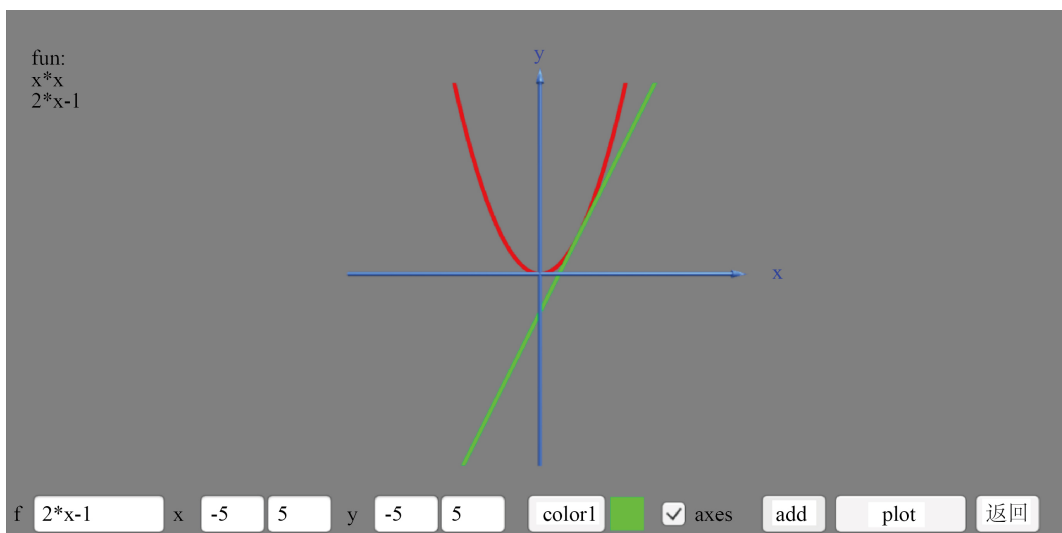


Figure 2. Image of one-variable function  
图 2. 一元函数图像

### 3.3. 一元函数积分场景

一元函数积分除了一元函数本身的绘制外, 还需要积分的可视化表达。通过 Mesh 绘制多个矩形来模拟函数积分的分割形状, 从而动态模拟一元函数的积分过程。

该场景在一元函数场景的基础上增加了右侧的数值结果输出模块以及积分分割形状的绘制模块。

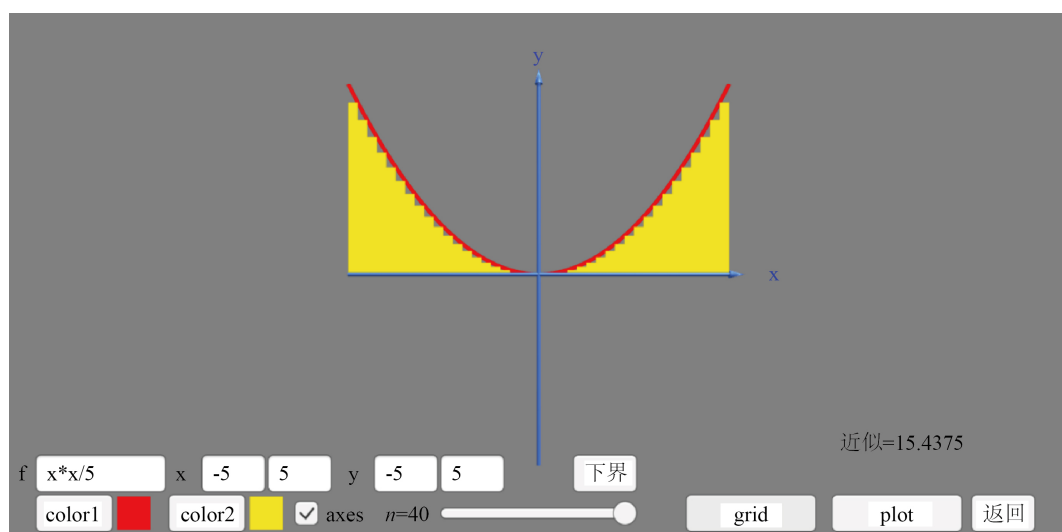


Figure 3. The image of function integral of one-variable  
图 3. 一元函数积分图像

从图 3 可以看到, 除了绘制的一元函数图像本身, 还可以绘制一元积分的可视化图像, 改变“n”拖动条来设置定义域区间的分割数, 点击“cube”按钮可以绘制表示函数积分的各个矩形, 右侧则会输出该函数的积分的近似值, 即所有矩形的面积的和, 提高分割数, 积分近似值将会趋于一个固定值, 即真实的积分值。通过这样的演示可以展示一元积分的图像意义。

### 3.4. 二元函数场景

和一元函数不同, 二元函数的图像是在三维空间上表达的, 相较于一元函数的坐标系, 需要多一个维度。同时在三维空间里渲染函数图像, 除了绘制线条的 Line Renderer 渲染器外, 还需要渲染曲面的 MeshRenderer 渲染器。只要定义好曲面图像的点的信息, 即可通过 MeshRenderer 渲染器绘制曲面。

二元函数场景可以输入并绘制二元函数, 可以添加并同时绘制多个不同的二元函数, 同时记录并显示所绘制的不同函数的函数式。绘制  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = \sin(x + y)$ , 其图像如图 4、图 5 所示。

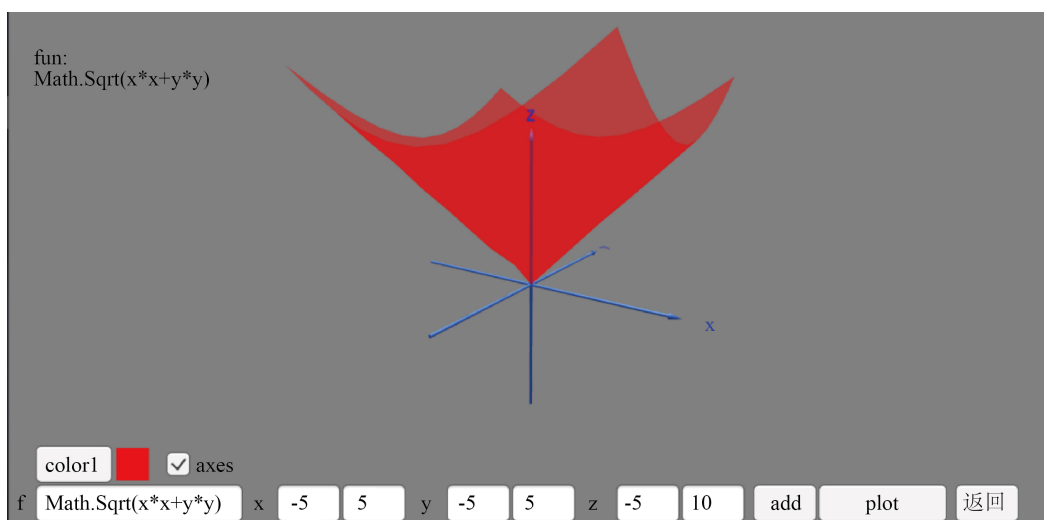


Figure 4. The image of two-variable function

图 4. 二元函数图像

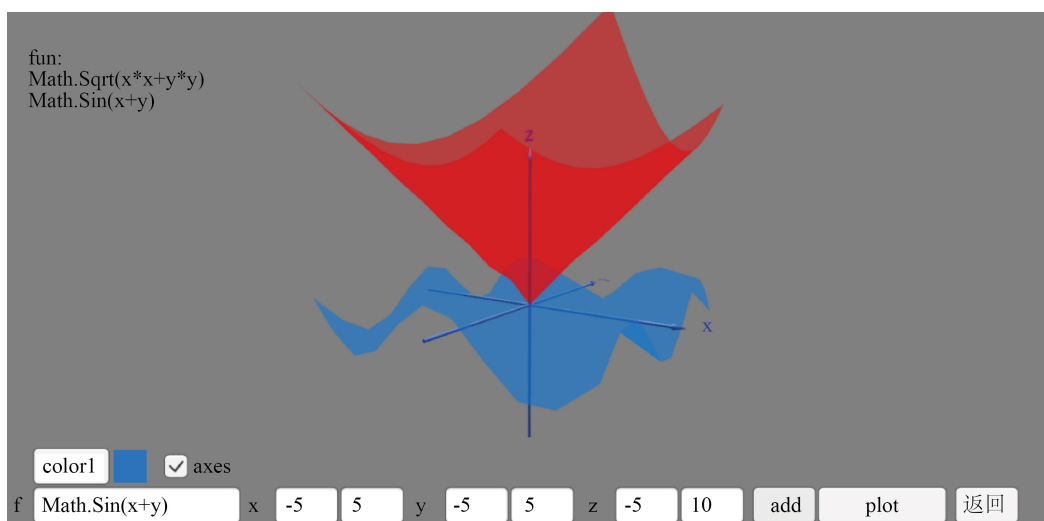


Figure 5. The image of two two-variable functions

图 5. 两个二元函数图像

### 3.5. 二元函数积分场景

二元函数的积分使用 Unity 3D 内置的立方体模型来表示积分的分块, 通过计算每一个立方体的体积的总和, 近似表示函数的积分值, 同样可以通过提高区间的分割数来使近似积分值更加接近真实积分值。以函数  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  为例, 结果如图 6 所示。

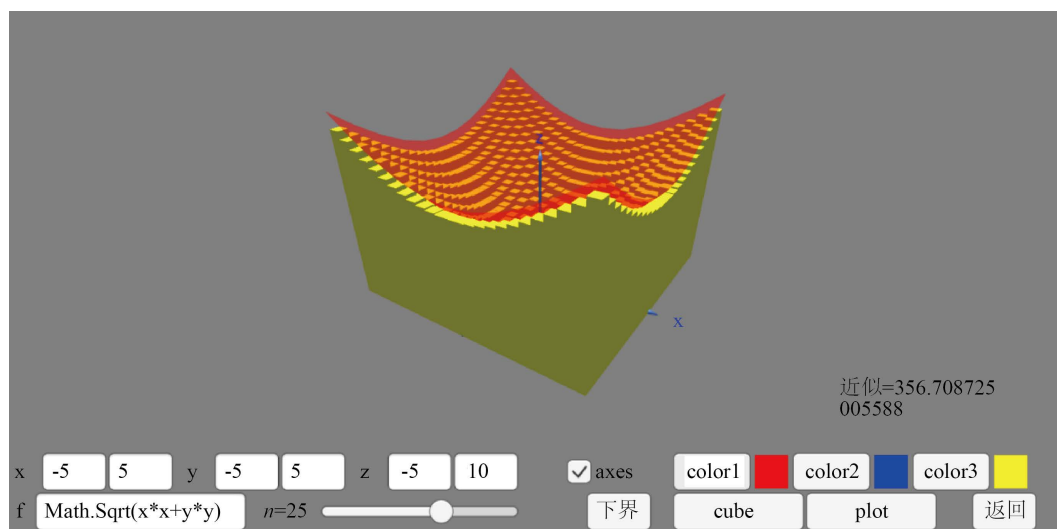


Figure 6. The image of function integral of two-variable  
图 6. 二元函数积分图像

通过三维的演示可以展示二元函数的积分的图像意义, 使平面图案无法完全表达的三维积分可视化在虚拟现实空间表达出来。使用者可以自由的移动和旋转视角, 对图像进行各个方位和角度的观察, 降低了对三维空间的理解上的困难。

## 4. 应用效果

目前在数学教学方面, 可视化教学更多的是集中在平面可视化中。本文通过虚拟现实技术, 实现数学函数和数学积分的三维可视化, 学生通过简单的操作, 输入函数和相关的参数就可以获得三维的图像, 在虚拟现实空间内从多个角度观察。在教学上, 教师在教授积分相关的课程时, 可以演示该系统进行积分三维可视化, 为学生提供更直观的视角, 从而更好的理解其定义。在学生自学方面, 学生自己可以操作该系统进行模拟, 对自己不懂得地方加以可视化观察和分析, 提高学习效果。

## 5. 结论

针对在高等教育领域数学知识可视化的缺乏, 本文论述了虚拟现实技术在构建数学知识可视化系统的研究背景和研究意义, 以 Unity 3D 为平台, 提出并构建了数学积分虚拟现实可视化系统, 通过输入函数和相应参数, 快速绘制三维数学图像, 并实现了积分知识的可视化方案。通过具象化抽象的数学定义, 可以提供更加形象生动的三维可视化数学图像, 既可以作为教师授课的辅助工具, 也能提高学生学习的兴趣。

## 参考文献

- [1] 文伟海. 微积分知识可视化研究及其智能系统设计[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2020.

- [2] 陈璟. 虚拟现实技术在基础教育中的应用及对策分析[J]. 普洱学院学报, 2020, 36(6): 130-132.
- [3] 江绘良, 郑一, 张雪宁, 孟思, 张剑. 虚拟现实技术在数学教学领域中的应用[J]. 高师理科学刊, 2020, 40(9): 51-53.
- [4] 陈哲涵, 丁文英. 虚拟现实技术在运筹学教学中的应用实践[J]. 中国教育技术装备, 2020(8): 39-43+58.
- [5] Alves, F.C.C., Diniz, M.M., Rodrigues, A.F.B., *et al.* (2018) Teaching Platonic Polyhedrons through Augmented Reality and Virtual Reality. *The 17th Brazilian Symposium*, Belem, 22 October 2018, 1-4.  
<https://doi.org/10.1145/3274192.3274243>