Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(6), 1855-1859
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.96310

浅议线性代数课程的课堂教学

方成鸿，汤文菊

景德镇陶瓷大学，江西 景德镇

收稿日期：2021年11月13日；录用日期：2021年12月16日；发布日期：2021年12月23日

摘 要

通过分析线性代数课程的教学特点、教学现状，从认知理论与教学实践出发，就保持学生学习的专注度、抽象概念的讲解、提高课堂学生的注意力等方面，提出了一些教学措施，以提升课程的教学质量。

关键词

线性代数，教学方法，教学实践

Exploration on the Teaching Method in Linear Algebra Class

Chenghong Fang, Wenju Tang

School of Information Engineering, Jingdezhen Ceramic University, Jingdezhen Jiangxi

Received: Nov. 13th, 2021; accepted: Dec. 16th, 2021; published: Dec. 23rd, 2021

Abstract

By analyzing of teaching circumstance and characteristic of linear algebra, some methods and techniques of attention to learning, explication of abstract concept are suggested to increase the teaching effect with theory of cognition and teaching practice.

Keywords

Linear Algebra, Teaching Method, Teaching Practice

文章引用: 方成鸿, 汤文菊. 浅议线性代数课程的课堂教学[J]. 创新教育研究, 2021, 9(6): 1855-1859.
DOI: 10.12677/ces.2021.96310

1. 引言

线性代数是我校工科与经济管理学科等专业学生的一门必修基础课程之一，具有较强的逻辑性、抽象性与广泛的实用性。本课程在培养学生的计算和抽象思维能力方面有重要的作用，由于本课程概念繁多、内容抽象、逻辑性强，多数学生感觉晦涩难懂，而失去了理论知识的支撑，又会导致学生在推理、计算时了无头绪、照猫画虎，加之学时偏少，教师还要赶进度，整堂课讲得口干舌燥，但收效甚微。如何在课堂教学中有效提高教学效率，引导学生适应线性代数课程的教学进程呢？认知学习理论[1]的基本观点是：人的认识不是由外界刺激直接给予的，而是外界刺激和认知主体内部心理过程相互作用的结果。根据这种观点，学习过程被解释为每个人根据自己的态度、需要和兴趣并利用过去的知识与经验对当前工作的外界刺激(例如教学内容)做出主动的、有选择的信息加工过程。教师的任务首先是激发学生的学习兴趣和学习动机，然后将当前的教学内容与学生原有的认知结构有机地联系起来。基于认知学习理论，以下就提高线性代数课程的课堂教学效率，提出一些做法。

2. 明确课程目标，保持学习的专注度

教学的理论与实践告诉我们，为了达到预期的教学目的和要求，必须组织好教学过程，充分注意到教育对象的特点、课程的特点以及各个教学阶段的特点。线性代数课程的内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、向量组的线性相关性、线性方程组解的存在性与结构定理、矩阵的特征值及二次型理论等。本课程概念较多，相互之间又有错综复杂的联系，一旦不能理解清楚，易于陷入众多名词、定理的大海中，失去方向，因此，抓住一根主线就显得尤其重要，也便于理清关系。

事实上，线性代数课程的中心内容是关于线性方程组的求解[2]，这就是本课程的目标。首先在第一次课上，明确告知同学们这一点，并简介三大概念行列式、矩阵与向量组对于解线性方程组的作用，使大家了解学习任务。其次，每次引入重要的概念，都要说明它同求解线性方程组的联系，时时提醒学生不忘“初心”。以下举例说明。

2.1. 行列式

从学生熟悉的二元一次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 出发，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解 $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$，$x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$，观察解的表达式的特点，如果引入二阶行列式符号，可以将方程组的解表示为容易记忆的形式 $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，使学生直观看到二阶行列式与课程目标“线性方程组的求解”之间的联系，从而了解数学概念不是凭空思维的产物，知道来源再结合定义也有利于掌握、记忆与运用概念。

2.2. 逆矩阵

学习了矩阵运算的定义后，线性方程组可以表示为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，引导学生对比观察它同一元线性方程

$ax=b$ 形上的一致性，再根据方程 $ax=b$ 的求解过程，引入逆矩阵的概念，并得到当方阵 A 可逆时，方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解可以表示为 $A^{-1}\boldsymbol{b}$，即逆矩阵也与课程目标“线性方程组的求解”有联系，而且相对于克拉姆法则的结果，该解的表达形式更加直接。

2.3. 向量组

完成线性方程组解的存在定理的教学后，学生可以判别一个线性方程组是否有解以及有多少个解，能够求出方程组的通解，似乎本课程的中心任务已完成，为什么还要学习向量组的理论呢？已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$ 的通解为[3] $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，如果将增广矩阵化为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & -\frac{15}{7} & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，选择 x_2、x_3 为自由未知量，则解可以表示为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$，这时提出问题：它们都是正确的解吗？如果是，如何证明它们是相同的呢？解答这些问题就需要向量组的理论知识。

总之，尽可能围绕线性方程组的求解这个中心目标，介绍本课程的概念与定理，经由持续不断地引导，强化认知本课程学习的目标，保持学生的学习兴趣和对课程的关注度。

3. 融入几何解释，深化概念的理解

线性代数课程的内容抽象，很多内容学生不易理解。在教学过程中可以借助几何语言或几何直观来阐释线性代数中的概念和性质，从而化解线代数抽象、难学难教的状况。

3.1. 线性相关与线性无关

向量组理论是线性代数中最抽象的理论知识，也是后继课程《矩阵论》的重要基础知识，尤其是“线性相关与线性无关”概念。实际教学中，可以通过分析两个向量、三个向量线性相关的条件，指出对于三维向量来说，线性相关就是平行或者共面，由此说明线性相关就是共线、共面等几何概念的推广与抽象，使学生对线性相关概念得到较直观的认识[4]。进一步地，线性表示也可以视为几何概念，即 n 维向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，就表明向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 具有几何关系，有了向量空间的知识，还可以加强阐明：向量 $\boldsymbol{b}$ 属于向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 生成的向量空间。

3.2. 特征值与特征向量

直接引入定义，会稍显生硬，可以先提出问题：如何计算方阵的高次幂？复习已学的两个知识点：① 若 $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则 $A^m=\mathrm{diag}(a_1^m,a_2^m,\cdots,a_n^m)$，② 若 $A=P\Lambda P^{-1}$，则 $A^m=P\Lambda^m P^{-1}$，这样前述问题可以转化为：1) 什么条件下 A 与对角矩阵 Λ 相似？2) 若 A 与对角矩阵 Λ 相似，即 $A=P\Lambda P^{-1}$，如何求得对角矩阵 Λ 与相似矩阵 P？然后假设 $A=P\Lambda P^{-1}$，并利用分块矩阵的知识从分析 $AP=P\Lambda$ 出发，获得问题 2) 的解答，即矩阵 Λ 对角线上第 i 行的元素 λ_i 是代数方程 $|A-\lambda E|=0$ 的根，矩阵 P 的第 i 个列

向量 $\boldsymbol{p}_i$ 是齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解。引入特征值、特征向量的概念后，可以更简洁地表述问题 2) 的解答，即对角矩阵 Λ 主对角线上的元素都是矩阵 A 的特征值，矩阵 P 的列向量都是 A 的特征向量。站在矩阵 A 确定的线性变换的角度看，若像向量与原像向量线性相关(平行)，则该向量就是特征向量。至此，学生可以简单了解特征向量的几何特性，知晓特征值与特征向量的一个重要应用—求方阵的高次幂或多项式。关于问题 1) 的解答，先举例说明存在不与对角矩阵相似的方阵，以此提醒同学们，需要继续深入学习特征值与特征向量的性质。

3.3. 正交化算法

算法的递推公式固然可以通过代数方法计算得到，但我们先从几何角度进行说明，有利于学生了解方法的由来。给定线性无关的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$，来寻找正交向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 使得向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_i$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_i$ 等价，$i=1,2,\cdots,m$。第一个向量 $\boldsymbol{b}_1$ 没有正交的约束，故可直接取 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$；对于第二个向量 $\boldsymbol{b}_2$，因要求 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$，如图 1 所示，过点 B 作 OA 的垂线，垂足为 P，取 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{PB}$ 即可，这时 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{OP}$，其中 $\boldsymbol{OP}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_2$ 沿向量 $\boldsymbol{b}_1$ 的投影向量，由向量代数的知识得 $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-\dfrac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1$。继续，如图 2 所以，过点 C 作向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 所张成平面的垂线，垂足为 Q，取 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{QC}$ 即可，可知 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{OQ}$，而 $\boldsymbol{OQ}$ 是向量 $\boldsymbol{a}_3$ 在平面 $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\}$ 上的投影向量，它等于向量 $\boldsymbol{a}_3$ 沿向量 $\boldsymbol{b}_1$ 的投影向量与沿向量 $\boldsymbol{b}_2$ 的投影向量之和，故有 $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-\dfrac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_1]}{[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_1]}\boldsymbol{b}_1-\dfrac{[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2]}{[\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2]}\boldsymbol{b}_2$。余皆以此类推。

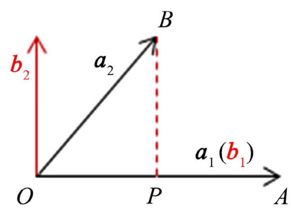

Figure 1. Two vectors
图 1. 2 个向量

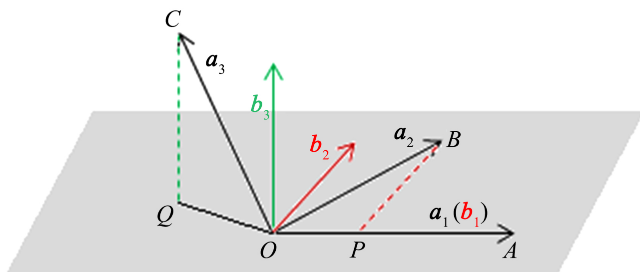

Figure 2. Three vectors
图 2. 3 个向量

4. 课件辅助教学，提高效率与注意力

线性代数课程许多概念的定义较长，行列式、矩阵、方程组的书写都较耗费时间，可以充分运用现代信息技术手段，以多媒体课件的形式快捷展示这些内容[5]，将更多的时间用于课程知识的讲解，从而提高课堂时间的利用效率。制作课件需注意几点：字体不能太小，单页显示的行数不宜多于 10 行，字母

符号的形例要上下前后保持一致。课件的使用定位为辅助教学，所以演算、推理仍需使用板书。

任何学习过程都离不开注意，注意是学生有效地进行学习所不可缺少的条件。在大学课堂一次 2 节课中时时保持注意力集中，这不是容易的事情，那么作为教师来说，要尽量保持学生注意力集中的有效办法就是，采取多样化的教学手段，不时激发他们学习的兴趣。

线性代数的学习中有一些抽象、枯燥的内容，在讲授这些知识时，教师可运用一些新颖的方法，或者特殊的教学手段，来引起学生的注意，激发学生的学习兴趣[6]。比如，恰当地提问，让学生思考、讨论并回答；运用多媒体教学具有形象性、多样性、新颖性、趣味性、直观性、丰富性等特点展示、演示某些知识点；利用教学平台，进行简单的即时互动答题；适时穿插讲述一些相关的数学家的事迹、逸闻等。总之，精心设计每一个问题，合理安排每一项活动，巧妙运用先进的教学资源，以新颖而富有变化的教学过程，充分吸引学生的注意力，从而获得较好的课堂教学效果。

5. 结束语

从实际教学经验出发，本文介绍了线性代数课程教学的一些做法。随着时代的发展，学生乃至每个人的思维方式、生活模式都在发生变化，教学活动也要适应时代的变化和发展。作为教师，一方面要有深厚的专业知识功底，另一方面也要树立先进的教学理念，精心设计教学过程，采用灵活多样的教学模式，抓住新媒体时代带来的机遇进行教学改革和创新，这样才能有效地提升教学质量，促进学生知识水平以及综合能力的提高。

基金项目

景德镇陶瓷大学教学研究项目(TDJG-19-Y38)。

参考文献

[1] 冯忠良．教育心理学[M]．北京：人民教育出版社, 2015.

[2] 何立国，施武杰．以线性方程组为中心展开线性代数课程的教学[J]．大学数学, 2009, 25(6): 203-206.

[3] 同济大学数学系．线性代数[M]．北京：高等教育出版社, 2014.

[4] 唐秋林．提高线性代数课堂教学效率策略探析[J]．科技风, 2020(12): 27-28+31.

[5] 俞晓岚，谢剑．新媒体环境下线性代数教学改革的思考与探索[J]．科技风, 2020(4): 47-48.

[6] 崔丽英．提高线性代数教学质量的策略[J]．林区教学, 2021(1): 77-79.