

# 图表法在高等数学中的应用研究

## ——以曲线积分和曲面积分为例

郑李玲, 欧玉芹, 李智群

北部湾大学理学院, 广西 钦州

收稿日期: 2022年8月25日; 录用日期: 2022年10月6日; 发布日期: 2022年10月14日

### 摘要

图表法教学是运用图形、符号、表格等手段辅助教学, 将知识、信息、思想等直观化的方法。基于高等数学中曲线积分和曲面积分的教学内容多、抽象概念多、公式之间的关系多、学生难掌握等特点, 本文利用思维导图和列表式相结合, 从章节的整体到知识点局部的分解, 制作相应的图表, 帮助学生理清思路、提升记忆, 构建高效学习知识体系和培养学生创新思维。

### 关键词

图表法, 高等数学, 曲线积分, 曲面积分

# Research on the Application of Chart Method in Higher Mathematics

## —Taking Curvilinear Integral and Surface Integral as Examples

Liling Zheng, Yuqin Ou, Zhiqun Li

School of Science, Beibu Gulf University, Qinzhou Guangxi

Received: Aug. 25<sup>th</sup>, 2022; accepted: Oct. 6<sup>th</sup>, 2022; published: Oct. 14<sup>th</sup>, 2022

### Abstract

Chart teaching is the use of graphics, symbols, tables and other means to assist teaching, knowledge, information, ideas and other intuitive methods. Based on the characteristics of curvilinear integral and surface integral in higher mathematics, such as more teaching content, more abstract concepts, more relations between formulas, and more difficult for students to master. Using a

combination of mind maps and lists, From the whole of chapters to the partial decomposition of knowledge points, corresponding charts are made to help students clarify their thoughts, improve their memory, build an efficient learning knowledge system and cultivate students' innovative thinking.

## Keywords

Chart Method, Higher Mathematics, Curvilinear Integral, Surface Integral

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

高等数学是面向非数学类理工科专业学生开设的一门公共必修基础课程。高等数学教学对提高学生的科学和人文素质、培养学生的逻辑思维能力有着重要的意义,尤其是对培养学生的创新精神及数学应用意识有着不可替代的作用,并且对培养高素质应用型人才也起到深远的影响[1]。高等数学教学中普遍存在教学内容多和抽象问题难以具体化,部分学生数学基础薄弱,自主学习能力较低,挂科的人数多。如何合理有效地解决这些问题,是值得我们深入探索研究的有现实意义的课题。

图表式教学法是指教师在教授过程中,运用图形、符号、表格等手段来辅助教学,表现其思想、知识、信息等的一种直观的阐释方法[2]。图表式教学法在医学领域和中小学课堂中使用已比较普遍,如思维导图的应用研究的相关文献资料较多,但知网检索中关于思维导图在高等数学教学应用文献仅有20篇左右,说明这种教学方法未得到足够的重视。为了提高教学效果,笔者根据不同的教学内容采用不同的图示开展教学实践,便于学生理解、联想和记忆,提高学习效果,提高思维能力。

## 2. 图表法的特征

图表法主要有以下三个特点:1) 直观性:图表法能将知识点中关键信息之间的联系直观呈现出来;2) 精确性:通过图表学生容易分辨重难点;3) 科学性:图表法对内容中关键信息进行分类归纳,符号知识在人脑中存储的图式原理。本文主要讨论思维导图和列表,它们的特征分别如下:

思维导图是一种可视化的总结工具,基本特征[3]:1) 注意的焦点清晰的集中在中央图形上;2) 主题的主干为分支从中央向四周放射;3) 分支由一个关键词的图形或者写在产生联想的线条上面的关键词构成,比较不重要的话题也可以分支的形式表现出来,附在较高层次的分支上;4) 各分支形成一个连接的节点结构。因此,思维导图有以下几个方面的特色:整合新旧知识,使前后知识关联,防止思维中断,保持思维方式连续感,以及更好把握内容的整体性和方向性,提高课程学习效率。

列表法[4]即将学科所涉及的内容用精辟文字以表格的方式进行归纳和分类,使分散的内容趋于集中,使零散的内容趋于系统化、条理化。其中列表应用于教学的主要核心是对比,包括:1) 同时列表对比:即系统对比,特点是将两个易于混淆的定义、两种物质以表格的形式展示出来;2) 前后列表比较:在原有的基础上与新的相近内容对比,分析异同,记住新知识,巩固旧知识;3) 纵横全面列表对比:将内容进行纵向和横向列表比较的应用。因此,列表的特色在于使所学的内容变得目标明确、层次分明、条理清晰、简单明了的效果。

## 2. 图表法在曲线积分和曲面积分中的应用

曲线积分与曲面积分是高等数学多元函数积分学的重点和难点，针对曲线积分和曲面积分教学内容多、抽象概念多、公式之间的关系多、学生难掌握等特点，部分学者从概念、计算、相关公式等方面的知识进行类比，如文献[5] [6] [7] [8]，主要是线性式地一一列举各个知识点，但仍然显得较为繁杂，不够直观。笔者在曲线积分和曲面积分授课中采取图表法教学，教会学生制图、看图、读图，用少量的图表将大量信息联结成为整体，以图为知识记忆单元，将模糊零乱的思维变得清晰有序，把信息之间的关系变得易于理解和记忆。

### 2.1. 思维导图式的教学

科学而恰当地运用思维导图进行教学，有助于把复杂问题简单化、把抽象问题可视化、把零乱问题条理化，便于学生理解、联想和记忆，提高学习效果，提高思维能力。

#### (1) 章节知识图示

数学是一个严密的逻辑体系，知识的整体性、连贯性是数学学科的基本特点，学习中特别需要从整体上把握数学知识体系、思想方法，只有这样才能更好学习各个具体的知识点。首先对曲线积分和曲面积分的知识点关系通过思维导图加工提炼，形成图 1，能清晰快速了解本章知识的内容。其次对曲线积分和曲面积分分类，进一步梳理相应知识的框架，见图 2 和图 3，每个中心主题包括四个一级内容，每一级都可以很灵活地收缩和展开相应关键词及超链接、备注等内容。通过图 1~3 能把零碎的信息组块建成更大的组块，降低了学生的认知负荷，提高了大脑的加工和存储能力，提升了思维加工的质量。

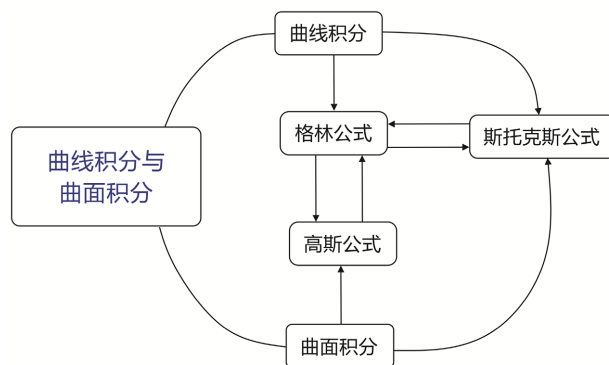


Figure 1. Diagram of knowledge relation between curve integral and surface integral

图 1. 曲线积分和曲面积分知识关系导图

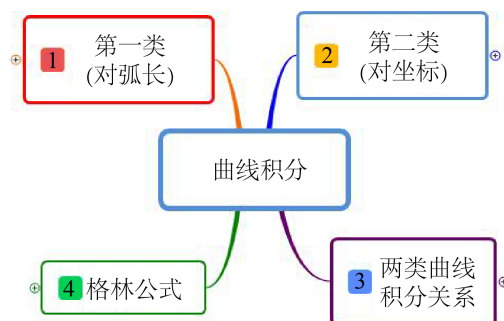


Figure 2. Curve integral knowledge map

图 2. 曲线积分知识导图

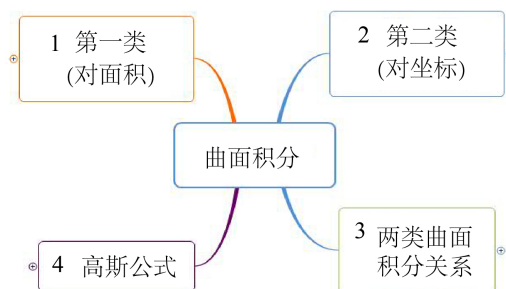


Figure 3. Surface integral knowledge map  
图 3. 曲面积分知识导图

### (2) 各知识点图示

在把握好章节知识的整体下，将各个知识点细化学习，以第一类曲线积分和第二类曲面积分知识思维导图为例(第二类曲线积分和第一类曲面积分类似)，见图 4 和图 5，分别以中心主题向外延散发散，包括定义、性质、计算等一级内容，其中部分详细的内容采取超链接的形式展示，可以是网页、文档、图片、视频等，如图中的性质、计算步骤均采用了超链接，可把抽象复杂的问题可视化。

### 2.2. 列表式的教学

列表式示图是把相关知识点的共性和异性加以对比，同中求异，异中求同，问题的异同点一目了然，学生能直观地了解和學習相关知识。针对曲线积分和曲面积分的内容，首先将曲线积分和曲面积分作对比，了解基本的知识框架，见表 1；其次将两类积分从引例、思想方法、记号、性质、计算思路等多方面进行比较，见表 2；最后在学习曲面积分时，模仿表 2 的形式，采取填写空表的方式学习相关知识，见表 3。

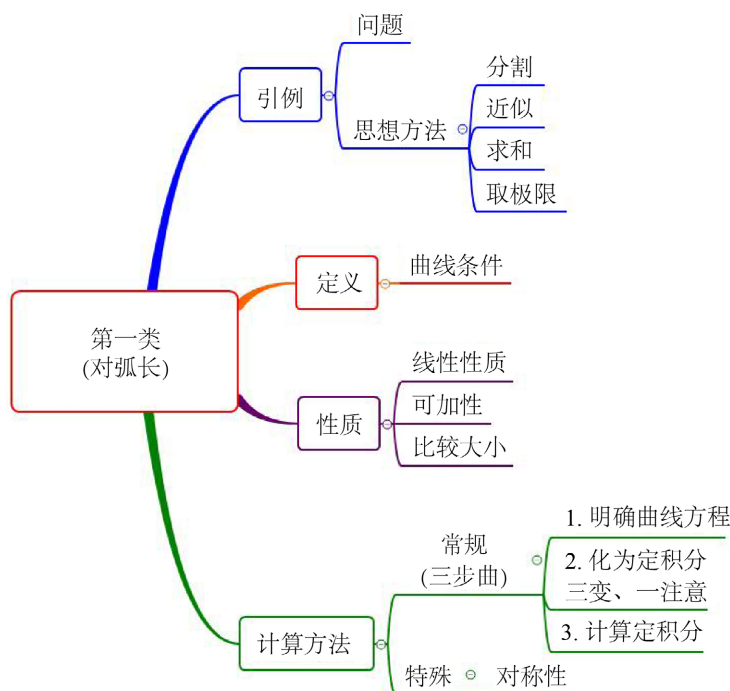


Figure 4. The first kind of curve integral knowledge map  
图 4. 第一类曲线积分知识导图

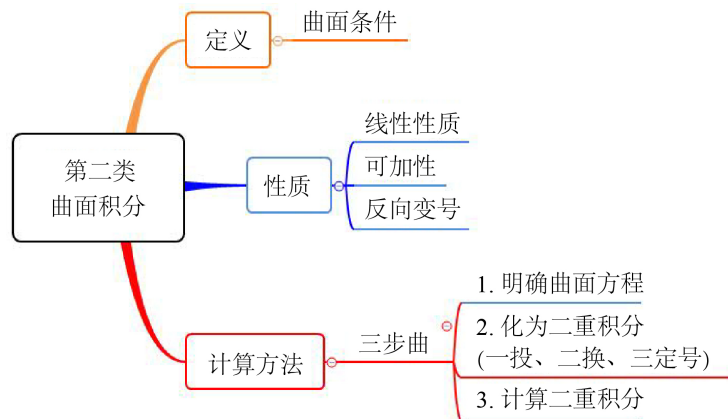


Figure 5. The second kind of surface integral knowledge map  
图 5. 第二类曲面积分知识导图

Table 1. Comparison of curve integral and surface integral  
表 1. 曲线积分与曲面积分对比

名称	曲线积分	曲面积分
思想方法	分割(化整为零)→近似(以不变代变)→求和(积零为整)→取极限(精确值)	
性质	线性性质、可加性、比较大小、反向变号	
记号	$\int_L f(x,y)dS$ (第一类) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (第二类)	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ (第一类) $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$ (第二类)
计算思路	明确曲线方程 ↓ 化为定积分 ↓ 计算定积分	明确曲面方程 ↓ 化为二重积分 ↓ 计算二重积分
关系	格林公式 $\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ $= \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$	高斯公式 $\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$ $= \oiint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$
	斯托克斯公式(曲线积分与曲面积分关系) $\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ $= \oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$	

**Table 2.** Comparison of curve integrals

**表 2.** 曲线积分对比

名称	对弧长的曲线积分(第一类)	对坐标的曲线积分(第二类)
曲线条件	曲线 $L$ 是光滑的	曲线 $L$ 是光滑有向的
思想方法	分割(化整为零)→近似(以不变代变)→求和(积零为整)→取极限(精确值)	
记号	$\int_L f(x,y)dS$	$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
性质	线性性质、可加性、比较大小	线性性质、可加性、反向变号
计算思路	明确曲线方程 ↓ 化为定积分(三变一注意) $\left\{ \begin{array}{l} \text{积分弧段} \\ \text{被积函数} \\ \text{弧长元素} \end{array} \right.$ 注意下线一定小于上限 ↓ 计算定积分	明确方程方程 ↓ 化为定积分(三变一注意) $\left\{ \begin{array}{l} \text{积分弧段} \\ \text{被积函数} \\ \text{弧长元素} \end{array} \right.$ 注意起点对应下限 ↓ 计算定积分
两类曲线积分关系	$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dS$ 其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 是有向曲线 $L$ 在点 $(x,y)$ 处的切向量的方向余弦.	
格林公式	$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$	

**Table 3.** Comparison of surface integral

**表 3.** 曲面积分对比

名称	对面积的曲面积分(第一类)	对坐标的曲面积分(第二类)
曲面条件	曲面 $\Sigma$ 是光滑的	曲面 $\Sigma$ 是光滑有向的
思想方法	分割(化整为零)→近似(以不变代变)→求和(积零为整)→取极限(精确值)	
记号	$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$	$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$
性质	线性性质、可加性、比较大小	线性性质、可加性、反向变号
计算思路	明确曲面方程 ↓ 化为二重积分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{一投: } \Sigma \rightarrow D_{xy} \\ \text{二代: } f(x,y,z) \rightarrow f[x,y,z(x,y)] \\ \text{三换: } dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \end{array} \right.$ ↓ 计算二重积分	明确曲面方程方程 ↓ 化为二重积分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{一投: } \Sigma \rightarrow D_{xy} \\ \text{二代: } R(x,y,z) \rightarrow R[x,y,z(x,y)] \\ \text{三定号: } dxdy = \pm dxdy \end{array} \right.$ ↓ 计算二重积分
两类曲面积分关系	$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$ 其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是有向曲面 $\Sigma$ 在点 $(x,y,z)$ 处的法向量的方向余弦.	
高斯公式	$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$	



### 3. 图表法在高等数学教学中的意义

图表法是利用图文并茂的特征,结合图表具备的总结功能和发散思维,帮助学生提升记忆、理清思路、跳出固有思维方式的限制大脑的动态过程,让复杂的问题简单化。结合教学实践,归纳出图表法在高等数学教学中的意义为以下三方面:

#### 1) 构建高效学习知识体系

高等数学作为理工科的基础课程,内容由代数、几何、方程、概率论和物理等学科组成,抽象、逻辑性强、内容多而零散。因此,需要借助图表工具有效整理内容之间的关系,汇总成知识网络。图表法运用于高等数学教学,将各章节前后相关的理论串联起来,由点到面、由面到网、由课内到课外的延伸、由知识到思维的延拓等构建学科完整的知识体系,培养学生全局观;将分散杂乱的知识点,归纳总结,找到他们之间的共同点,提取重难点,把复杂的知识体系精简化,构建高效学习的知识体系[9]。

#### 2) 培养学生创新思维的有效途径

中共十八大以来,习近平总书记多次强调创新思维,指出惟创新者进,惟创新者强,惟创新者胜。高等数学课程思政目标指出要塑造学生情感态度与价值观、数学素养与创新思维。因此,思维导图应用于高等数学,一方面将概念和公式等构建成一个网络知识体系,让学生清晰了解知识体系的本质特征和内在逻辑,有助于提升学生的逻辑能力;另一方面思维导图提供了多个角度思考问题的平台,既让学生学会知识的迁移也有利于培养学生的发散思维;再一方面通过宏观向具体的伸展,学生不受限于某种标准的约束,有利于培养学生从相反的角度思考问题,培养逆向思维。综上,思维导图运用于教学可润物细无声的培养学生创新思维,达成课程目标。

#### 3) 推进以“学生为中心”的教学改革

2014年8月,中国工程院院士李培根在《中国青年报》上发表了题为《教育应该真正以学生为中心》的文章,呼吁我国的高等教育应该“以学生为中心”的本科理念包括:以学生发展为中心、以学生学习为中心、以学习效果为中心[10]。在以“学生为中心”理念指导下,将图表法应用于高等数学教学,教师由传统的知识灌输者转变为引导者:1)利用图表的可视化特征,引导学生建立层次分明、条理清晰的系统化知识网络,体现了教与学的有机统一,有利于提升学生分析问题的能力和整理知识点的速度;2)利用图表信息量大和辐射发散性特征,引导学生拓展思维,增强相关学科间的交叉融合,培养学生自主学习能力;3)利用图表制作的开放性,加强师生间的讨论与互动,有效调动学生课堂的积极性。综上,利用图表法教学改进了学生自主构建知识的“输入”和“输出”,有效推进以“学生为中心”的教学改革。

### 基金项目

基于“互联网+教育”下的《线性代数》课程教学改革研究与实践,项目编号:2020JGB410。

### 参考文献

- [1] 罗李平,曾云辉,吴雄韬. 解决高等数学教学问题的七点措施——以衡阳师范学院为例[J]. 高等数学研究, 2022, 25(1): 105-108.
- [2] 曾田田. 图表式教学法在刑事诉讼法教学中的应用研究[J]. 成功(教育), 2011(16): 38-39.
- [3] 杨凌. 概念图、思维导图的结合对教与学的辅助性研究[J]. 电化教育研究, 2006(6):59-61.
- [4] 郭喜梅. 《病原生物学》理论教学中应用列表比较法的体会[J]. 中国医学教育技术, 2011, 25(4): 456-459.
- [5] 熊菊霞,黄勇,靳庆庚,曲良东. 线面积分的类比教学法[J]. 教育教学论坛, 2019(10): 178-180.
- [6] 司红颖,付松. 关于曲线积分与曲面积分——《高等数学》教学研究[J]. 商丘职业技术学院学报, 2012, 11(5): 4-6.
- [7] 江蓉,王守. 关于曲线积分与曲面积分教学的探讨[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2012, 37(2): 142-146.

- [8] 陈晓, 赵晓花. 浅谈对称性在曲线积分计算中的应用[J]. 山东农业工程学院学报, 2018, 35(2): 156-158.
- [9] 赵炬明, 高筱卉. 关于实施“以学生为中心”的本科教学改革的思考[J]. 中国高教研究, 2017(8): 36-40.
- [10] 刘政, 郭雪松, 金萍, 丁楠, 邸佳妮, 王会. 应用型大学思维导图教学法应用研究[J]. 继续医学教育, 2022, 36(6): 25-28.