

数学抽象素养的建构策略探究

孟 茹^{1*}, 杜育书²

¹南京师范大学教师教育学院, 江苏 南京

²晋中市经纬中学校, 山西 晋中

收稿日期: 2022年3月14日; 录用日期: 2022年4月20日; 发布日期: 2022年4月27日

摘 要

数学抽象是数学学习的一种重要思想方法, 通过数学抽象可以反映数学的本质特征, 让高中生形成理性思维, 使得学习数学成为高度概括、表达准确、结论一般、有序多级的系统过程。由于概念形成过程是最典型的数学抽象过程, 因此本文旨在探究如何在高中概念数学中培养数学抽象素养, 帮助高中生理解数学本质。在概念教学中可通过以直观素材为先导, 引入数学概念; 以探索数学本质为宗旨, 经历数学抽象; 以充分变式为关键, 突出本质特征; 以比较正例反例为补充, 完善数学系统; 以正确的语言为突破, 强化抽象实践; 以恰当的总结反思为支撑, 积累抽象经验等6个教学策略培养高中生数学抽象核心素养, 有助于高中生真正理解数学知识的本质, 提升思考问题和解决问题的能力。

关键词

数学抽象, 教学策略, 概念教学

Exploration on the Construction Strategy of Mathematical Abstract Literacy

Ru Meng^{1*}, Yushu Du²

¹School of Teacher Education, Nanjing Normal University, Nanjing Jiangsu

²Jinzhong Jingwei Middle School, Jinzhong Shanxi

Received: Mar. 14th, 2022; accepted: Apr. 20th, 2022; published: Apr. 27th, 2022

Abstract

Mathematical abstraction is an important thought method of mathematics learning. Through mathematical abstraction can reflect the essential characteristics of mathematics, let high school stu-

*通讯作者。

文章引用: 孟茹, 杜育书. 数学抽象素养的建构策略探究[J]. 创新教育研究, 2022, 10(4): 773-782.

DOI: 10.12677/ces.2022.104127

dents form rational thinking, and make learning mathematics become a systematic process of highly generalization, accurate expression, general conclusion, and orderly multilevel. Since the concept formation process is the most typical mathematical abstraction process, this paper aims to explore how to cultivate abstract mathematics in high school conceptual mathematics and help high school students understand the essence of mathematics. In concept teaching, we can take the intuitive material as the guide, introduce mathematical concepts; with the purpose of exploring the essence of mathematics, experience mathematical abstraction; take sufficient variation as the key to highlight essential characteristics; complement the comparison of positive and negative examples to improve the mathematical system; focus on correct language 6 teaching strategies, such as the accumulation of abstract experience and the support of appropriate summary and reflection, cultivate high school students' core literacy of mathematical abstraction, help high school students truly understand the nature of mathematical knowledge, and improve their ability to think and solve problems.

Keywords

Mathematical Abstraction, Instructional Strategies, Concept Teaching

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来新课程改革如火如荼, 核心素养在中小学教育实践中不断深化, 教师愈发认识到自身需要不断提升专业技能, 将核心素养融入课堂中, 促进学生深度学习。史宁中教授认为: 数学在本质上研究的就是抽象的事物[1]。因此高中数学六大核心素养中, 数学抽象起到承前启后、举足轻重的作用。在数学的整体理论体系中, 数学抽象不但是最重要的思想方法, 而且也促进数学学科的整体发展。对于高中生而言, 数学抽象有助于培养他们的理性思维, 让他们看清问题的本质; 对于教师而言, 在数学教学过程中数学抽象这一数学方法、核心素养是贯穿始终的。为此, 如何培养高中生的数学抽象素养, 是当下数学教师亟待研究和探索的热点与难点。

2. 数学抽象的含义

数学抽象既是理性思维的根柢, 也是数学化活动必须遵循的规则方法。数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象, 得出研究对象本质的思维能力。主要包括: 从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系, 从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构, 并用数学语言予以表征[2]。史宁中教授把数学抽象划分为感性抽象和理性抽象, 其中感性抽象是基于现实的抽象, 是把现实中的数量与数量关系、图形与图形关系引入数学内部, 是“从感性具体上升到理性具体”的思维过程; 理性抽象是对感性抽象得到的思想材料进行二次抽象, 是“从理性具体上升到理性一般”的思维过程[3]。

3. 数学抽象的过程与方法

抽象深度的不同, 史宁中教授把数学抽象大体分为简约阶段、符号阶段、普适阶段等三个层次[3]。其中, 简约阶段是把握事物在数量或图形方面的本质, 把繁杂问题简单化、条理化, 能够清晰地表达; 符号阶段是去掉具体内容, 利用概念、图形、符号关系表述已经简约化了的事物在内的一类事物; 普适

阶段是通过假设和推理建立法则、模式和模型,并能够在一般意义上解释具体事物[3]。李昌官则站在数学教学视角,按高中生学习认知的先后顺序,把数学抽象分为感知与识别、分类与概括、想象与建构、定义与表征、系统化与结构化等5个阶段[4]。吴增生通过对数学抽象的认知与脑机制的研究,得出数学抽象的基本操作步骤“分离属性与建构模型→概括与一般化→定义与符号化→系统化”[5]。对比来看,三者同有简单化、符号化、一般化的特点,借助“数学直观”,让高中生经历数学抽象过程,进行有针对性的抽象活动,可以有效培养数学抽象能力,发展数学抽象素养。

4. 数学抽象的培养策略

数学抽象相比其他核心素养来说,更加需要学生明确研究的对象,创造性地将数量关系与空间形式进行抽象,并且更深入地探究分析出数学研究对象的本质特征,但是其本质不易被挖掘。从大量教学事实来看:在数学抽象的过程中,学生必须尝试将问题“四化”,即数学化、一般化、符号化、系统化,不难看出其中数学化是数学学科所特有,其重点难以琢磨,不易深化。在运用数学抽象的方法中,抽象是数学活动的必经之路,学生必须在数学化的基础上把大量具体的空间形式和数量关系的带有现实复杂背景的情境材料,去伪存真、由表及里地进行化繁为简,从而提炼数学概念、进行数学建模、理解数学本质,其要点不易建构、不易提炼。在教师的教学实践中,教师培养符合新时代要求的创新人才任务艰巨,需要深刻认识高中生的最近发展区以及心理发展阶段,引导学生进行数学抽象的问题指向性应该模糊一些,发散一下,其尺度难以把控、难以表达。

在大家都熟知的柯尼斯堡七桥问题中,当地的居民试过多种方法,一直不能成功走过一遍每座桥,并回到最开始的出发点,却不知其中缘由,归根结底是居民数学抽象素养不够。简单来说,没有抽象意识的居民,要求他们把每座桥抽象为一边,把比桥大很多的岛和河岸视作一点几乎不现实,更难的是居民们在岛上行走的路程比桥长很多。从这个案例可分析出:数学抽象四种类型中的第一阶段——弱抽象,对思维成熟的成年人来说都不简单,更何况是在读高中生,但是在实际教学过程中“特征分离概括化”这一原则经常被忽略。部分熟练掌握弱抽象的高中生可以把问题抽象:对于一个有着四个顶点和七条边的连通图,能否找到一个恰好包含所有的边,并且没有重复的路径。特征分离后形成普适的一笔画问题,顺理成章地将问题转化到数学内部进行解决。经过分析探究发现在七桥问题的这个点线图里,有四个奇结点,是不可能一笔画出的,因此得出七桥问题无法完美解决的数学依据。

分析七桥问题不难发现,数学抽象素养的培养难点在于学生缺乏抽象意识思维往往停留在表面,所以无能为力;数学本质隐藏很深、难以挖掘,所以计无所出;重点知识复杂繁多,难以琢磨,所以无从下笔;抽象实践很少,缺乏数学化经验,所以无计可施;抽象教学指导要求高,教学问题指向性太强,所以难以突破。下面从6个方面立足于抽象思维思想方法在高中数学概念教学中的实施,从高处着眼,小处着手,以教学策略为切入点,深入、具体地探究如何培养高中生的数学抽象素养。

4.1. 以直观素材为先导,引入数学概念

现实中有大量的感性材料和直观素材,不难想到教师提供给学生越直观、越丰富、越全面的感性材料,数学概念就越容易掌握,显然抽象过程也越容易被学生所接受。但是基于现实教学过程发现,概念问题引入内容陈旧,且只是为了引入而进行形式上的阅读,并没有引起学生对于此部分内容的重视,长此以往,高中生缺乏对概念实际背景的理解,导致高中生对概念本质理解片面、不深刻,浮于表面。不难发现,数学中的许多概念都与现实生活有着密切的联系,因此在数学概念的教学过程中,教师可以结合概念在现实生活中的原型创设生动有趣且高中生容易理解的问题情境,充分利用直观的教学手段和教学实践活动,调动高中生学习的热情和主动性,将新概念与高中生头脑中丰富的生活经验和知识基础建立联系,实现从抽象到具体的转化,自主地生成概念。

例如：导数的概念就是对现实生活中一些现象高度抽象的结果，生活中的某些实际问题，如运动速度、物种繁殖率的计算问题。并且导数表示函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率，而切线的斜率则是它的几何意义，教学时可结合高中生实际生活有关的问题，如物体运动时某一时刻的速度、曲线的斜率、电流的强度等等创设问题情境，加深高中生的理解。除此之外，效率最高、利润最大、用料最省等运筹学问题在函数上则表现为研究函数增减、变化快慢、最大(小)值的问题。

4.2. 以探索数学本质为宗旨，经历数学抽象

数学概念的形成过程是最典型的数学抽象过程，但是从大量的教学案例以及与部分高中生的交流得知，部分教师在传统的概念课中，都是以讲授为主，重点放在习题的讲解和做题能力的提高上，高中生本身缺乏经历得到完整概念的数学抽象过程，导致高中生对于数学概念本质的理解处于表面水平。因此在概念形成的学习需要学生尽可能地经历完整的数学抽象过程，重视完整的数学概念形成过程，注重从概念产生的背景、形成的过程、语言的转化等教学过程加深对概念的理解[6]。

在高中生形成概念之初，一般情况下无法准确分辨概念的本质属性，这就要求教师在教学的过程中综合运用多种教学方法，引导高中生主动进行抽象思考，通过开展系列的问题探究活动，丰富高中生的内心体验，最终概括出事物的本质属性，理解和掌握所要学习的数学概念，不断培养高中生的创造意识和思维能力。

例如：在等比数列的学习，列举数列 $1, 3, 9, 27, \dots$ ，高中生可观察发现数列中各项在增大，且每一项都是前一项的 3 倍。列举数列如下：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots,$$

分析得出数列中各项在减小，每一项都是前一项的 $1/2$ 。此时高中生感知、观察、辨别这两个数列的共同属性，发现数列各项在增大或减小，每一项都是前一项的相同倍数。再列举数列 $1, -2, 4, -8, \dots$ ，发现此时数列的各项并不是呈规律性的增大或减小，但是每一项是前项的 -2 倍。学生归纳、类比、抽象出这三个数列的本质属性，也就是每一项与前一项的比为一个常数，常数比不同，数列各项大小有不同的性质。此时将等比数列推广到全体，概括形成数学概念，学会数学语言表达。练习时可结合实际生活中存在的问题和现象，如细胞分裂，病毒传播、银行利息等，加深高中生对等比数列本质属性和现实意义的理解。

再如几何学中的“平面”，它没有厚度、在空间中无限延伸，在现实生活中根本不存在。再如高中阶段学习的指数函数，当我们把细胞分化的过程用一个指数式来表示，但根据现实问题，谁能确保分化过程中不会出现意外。所以说，还需让学生领悟到把现实问题抽象成数学问题是一个理想化的过程。尽管抽象过程十分理想，但这种建模方式却可以帮助高中生更加直观的理解所学的数学知识，也能够发散高中生的思维，培养他们的数学建模意识，提高数学抽象能力。当教授高中生棱柱时，拿出讲台上的粉笔盒，让高中生亲眼看到棱柱的现实原型，这种方式足以让高中生通过几何直观感受数学知识，自觉的将数学和现实生活联系起来。当教师把粉笔盒所具有的数学元素讲解给大家的同时，高中生自身会有一个自我探究和理解的过程，他们也能够依照教师的思路自主的将粉笔盒上的数学元素抽象成数学课本上的顶点、棱和面。

4.3. 以充分变式是关键，突出本质特征

在概念教学中突出本质特征、控制非本质特征有利于高中生抽象概念。分析部分概念教学案例后发现课堂中存在高中生认为概念过于抽象，理解不透的现象，所以教师在教学过程中要注意强调本质特征，

弱化非本质特征, 以使高中生顺利的抽象出概念并把握概念的实质。但是客观事物的本质特征和非本质特征是交融在一起的, 若只呈现本质特征, 高中生在面对非本质特征较多的实际问题时会难以注意到事物之间的细微差异。为了避免这种误解, 教师在教学过程中要以正确且充分的变式为教学途径, 重视对各种变式的运用, 促进对概念进行抽象和概括。

比如在学习函数概念时, 学生需要对丰富的生活情境进行抽象得出函数自变量和因变量间的相应关系, 教师在教学过程中对于类似函数关系可进行多次变式, 可以列举弹簧的长度 $y(\text{cm})$ 与所挂物体质量 $x(\text{kg})$ 的一组对应值、蜡烛燃烧的剩余长度 $y(\text{cm})$ 与燃烧时间 $x(\text{min})$ 的关系以及油箱内剩油量 $y(\text{升})$ 与行驶路程为 $x(\text{千米})$ 的关系表等三个变式, 充分的变式题为学生创造进行多次数学抽象的途径, 提供锻炼数学抽象的机会(表 1~3)。

Table 1. The length (cm) of the spring corresponds to a set of values for the mass (kg) of the object

表 1. 弹簧的长度(cm)与所挂物体质量(kg)的一组对应值

所挂物体质量 x/kg	0	1	2	3	4	5
弹簧长度 y/cm	18	20	22	24	26	28

Table 2. The relationship between the remaining length (cm) of candle burning and the burning time (min)

表 2. 蜡烛燃烧的剩余长度(cm)与燃烧时间(min)的关系

燃烧时间 $x(\text{min})$	10	20	30	40	50	...
剩余长度 $y(\text{cm})$	19	18	17	16	15	...

Table 3. The relationship between the amount (litre) of fuel left in the tank and the driving distance (km)

表 3. 油箱内剩油量(升)与行驶路程为(千米)的关系

行驶路程 $x(\text{千米})$	100	200	300	400
油箱内剩油量 $y(\text{升})$	48	40	32	24

4.4. 以比较正例反例为补充, 完善数学系统

在学习高中数学概念之前, 学生头脑里有一定的知识基础, 教师应当在教学中充分合理的利用高中生过去的知识经验, 建立知识之间的联系, 发挥正迁移的作用, 帮助高中生理解和把握概念的本质属性。教师也应该合理地引导高中生比较概念之间的差异, 确定概念的内涵。但是现实的课堂中, 很多高中生头脑中对于新旧概念并没有建立相应的联系。对于部分高中生没有深刻理解新旧知识的区别和联系的这种情况, 教师首先应提供充分、典型和匹配的正例和反例, 让高中生辨别、比较, 从而使高中生学会辨别所学对象的有关特征和无关特征, 利于概念的学习。其次是利用直观手段, 生动地显示事物的本质特征, 使高中生的已有经验得到重组和调整。

例如: 在向量概念的学习中, 同学们头脑中已经有了对于数的一个抽象过程, 那么在学习向量的时候, 可以与数的本质属性进行比较, 数是只有大小, 没有方向的量; 而向量既有大小, 又有方向, 通过数和向量的比较, 使高中生抓住向量的大小、方向两个本质属性。最后通过列举相关的正例和反例, 如位移、身高、温度等等, 让高中生通过辨别加深对向量概念的理解。

4.5. 以正确的语言为突破, 强化抽象实践

高中生在抽象得到数学概念的本质属性后, 用自然语言概括出数学概念, 用数学语言表征数学概念, 也是一个抽象的过程。界定准确的概念不仅能促进高中生形成正确的概念关系和概念体系, 还有利于区

别概念的本质特征和非本质特征。部分高中生在从文字语言中抽取事物的本质属性, 转化为数学语言的这一项能力有所欠缺, 为此教师在讲解概念时, 可将词语与感性材料结合起来, 取二者之长进行教学, 使高中生在学习过程中全面而深刻地理解所学概念的内涵, 掌握概念的本质属性。能够通过自然语言、数学语言和符号语言的相互转化, 准确表达概念。

例如: 学习集合间的基本关系, 教师可以用 Venn 图来表示, 这种纯形式的图形语言具有直观性的特点, 高中生通过图像表示数学问题, 可以帮助高中生快速发现问题的实质, 化抽象为直观。除此之外这种语言的转化, 在函数的学习中也有十分重要的作用, 可以利用现代化多媒体技术, 如利用几何画板或者 GeoGebra 等辅助教学软件将用自然语言表达的条件通过画图的形式表示出来后, 函数隐藏的某些特性会变得更加直观, 有利于学生正确运用数学语言对函数进行表示, 更能突显出数学对象的本质属性[6]。

4.6. 以恰当的总结反思为支撑, 积累抽象经验

在整个数学抽象的教学过程中, 高中生是在老师的引导下完成的, 只有让高中生形成一个整体的系统才更有利于对知识点的掌握, 才更有利于培养高中生的数学抽象能力。所以, 在经历完数学抽象活动之后, 要让高中生及时并积极的反思整个抽象过程, 也可结合相关的数学例子让高中生辨别数学抽象结果, 检验学习情况。当然, 作为教师, 要带领高中生对整个抽象过程做出总结, 反思整个过程的不足之处或可借鉴可发扬的地方, 还要激发高中生的积极主动性, 主动将课堂上的数学抽象思想方法应用到生活实践中。例如, 讲授完函数概念之后可以给高中生设置一些类似的题目, 让高中生鉴别是不是函数, 如 $y=3$, 一个班级的所有高中生和他们两次考试的数学成绩之间是不是函数关系等。

5. 以“函数的概念”为例解析数学抽象素养培养策略的实施

“函数的概念及其表示”是人教 A 版高中数学第一册中第三章函数的概念与性质中第一节的内容。函数概念是高中阶段的一个重要概念, 是描述客观世界变化规律的重要数学模型, 它联系并整合了函数、方程与不等式知识。本节内容是对初中所学函数知识的进一步深化提高, 同时还用集合与对应的语言刻画函数, 也为后续函数性质以及基本初等函数的学习奠定基础。根据函数的本质属性, 运用数学抽象素养的培养策略, 聚焦函数概念的三要素, 展示教学的主要过程及设计意图。

【引导语】大家是否认识这幅图中的字? 这个字是《说文解字》中的“函”字, 原意为匣、盒子, 也是我们今天所学习的函数的“函”字。但函数名称不是自古就有的数学概念, 是由清代数学家李善兰翻译引入的。取“凡此变数中函彼变数者, 则此为彼之函数”之意, 函数指一个量随着另一个量的变化而变化, 或者说一个量中包含另一个量。“变化”之意偏重初中数学描述性定义, 而“包含”则更多蕴含高中数学对应思想。要想理解“变化”与“包含”的区别就需要我们进一步学习函数的概念(图 1)。



Figure 1. Explanation of Words “函”

图 1. 《说文解字》“函”

【设计意图】HPM 理念在数学教育领域中不断发展, 教师教学方向也就随之明确, 适时穿插数学文化知识尤为重要。因此在课堂正式开始前采用一个古汉字图片吸引学生的注意, 激发他们学习函数的兴趣, 调节数学课堂的气氛。借古汉字的契机教师还可以渗透部分中国数学史, 让学生初步感受学科融合的魅力, 也藉此提高学生数学阅读的能力。

5.1. 素材先导, 引入新课

2020年的春天注定令所有中国人难忘,新型冠状病毒的肆虐打破了庚子年春节的宁静,钟南山院士、无数医务人员、全国各地党员干部、普通群众纷纷冲在前方,不眠不休,直面病毒;各地防疫物资第一时间运输到武汉并且仅用十几天时间相继建成火神山、雷神山和十几座方舱医院,安置数以万计的病人住院,创造了一个又一个奇迹。假设我们是武汉抗疫保障团队,要准备抗疫场地和物资等,在准备中有如下问题需要同学们思考:

【设计意图】选取当下社会抗疫热点,基于生活原型创设整体的、易于理解的情境背景,调动高中生学习的热情和主动性,将新概念与高中生头脑中丰富的生活经验和知识基础建立联系,实现从抽象到具体的转化,自主地生成概念,引导学生进行数学抽象,建立简单的数学模型,使学生树立科学的世界观、人生观,培养爱国主义精神,可以落实立德树人的根本任务。将实际问题转化为数学问题,锻炼学生的观察能力与概括能力,渗透数学抽象核心素养。

情境 1:有部分医护人员需要从北京乘坐“复兴号”高速列车前往武汉支援抗疫,该列车加速到 350 km/h 后保持匀速运行半小时,这段时间内,列车行进的路程 S (单位: km)与运行时间 t (单位: h)的关系可以表示为 $S = 350t$ 。“根据对应关系 $S = 350t$,这趟列车加速到 350 km/h 后,运行 1 h 就前进了 350 km。”你认为这个说法正确吗?如果不正确,请你用更精确的语言表述 S 与 t 的关系。

情境 2:疫情好转后,武汉协和医院要求后勤保卫处人员每周工作至少 1 天,至多不超过 6 天。如果医院确定的工资标准是每人每天 350 元,而且每周付一次工资。那么你认为该怎样确定一个工人每周的工资?一个工人的工资 W (单位: 元)是他工作天数 d 的函数吗?是否能仿照问题 1 精确表示其关系?

探究 1:情境 1 和情境 2 中的函数有相同的对应关系,你认为它们是同一个函数吗?为什么?

【设计意图】选择既有热点又与生活息息相关的 2 个情境,引导学生从“数学现实”中抽象数学问题,实现“横向数学化”,体会数学来源于生活、应用于生活。结合问题性原则,通过问题引导学生思考逐步深入,为学生“再创造”函数的概念指明方向。这里还使用了第四个培养策略(以比较正例反例为补充,完善数学系统),这也说明补充正反例不仅可以在课堂小结中使用,也同样适用于导入阶段。

情境 3:协和医院想邀请远道而来的湘雅医院医疗队游览武汉,因此特地查看近期空气质量指数(Air Quality Index 简称 AQI)变化图(如下),你如何根据该图确定 5 月 4 日到 17 日某一天 t (日)的对应的空气质量指数(AQI)的值 I ?你认为这里的 I 是 t 的函数吗(图 2)?

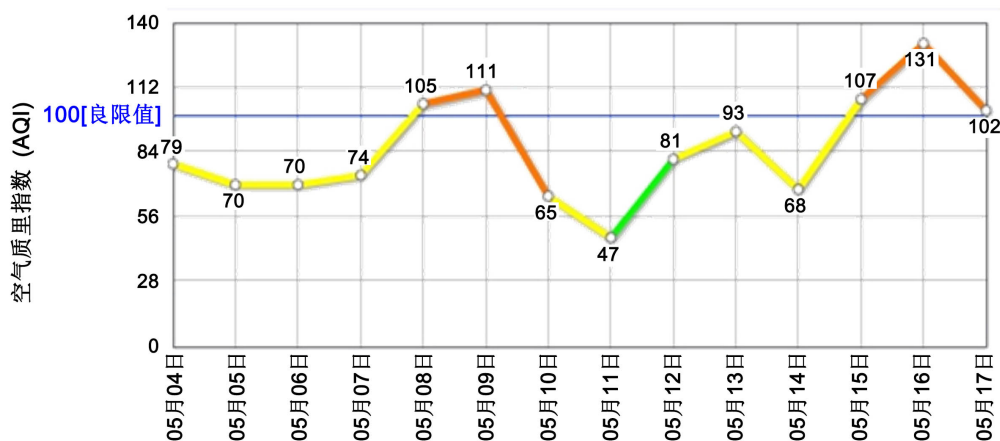


Figure 2. Changes in air quality index in Wuhan from May 4 to 17

图 2. 武汉 5 月 4 日至 17 日空气质量指数变化图

情境 4: 从 2020 年 1 月 27 日出发驰援武汉的杨医生终于帮助武汉打赢了抗疫防疫战, 6 月 11 日隔离结束回到家中的他收到女儿这学期的数学月考成绩单。请仿照前面的方法描述成绩 y 和时间 x (月)之间的对应关系(表 4)。

Table 4. Correspondence between math grade y and time x (month)

表 4. 数学成绩 y 和时间 x (月)之间的对应关系

时间 x (月)	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
数学成绩 y (分)	128	120	121	115	109

【设计意图】 这个部分主要运用策略一与策略五, 对于刚刚步入高一年的学生来说, 学生无法理解抽象的“对应关系”, 所以, 需要学生从具体情境中体会到这种“可观化”的“对应关系”, 再进行数学文字语言和符号语言的抽象。为了跨越这一障碍, 就要求教师在授课时, 强调数学文字语言“对应关系”的意义。情境 1~4, 分别采用不同的表达方式, 有助于学生理解不同表征形式下的函数。让学生从中感受数学抽象核心素养的培养。根据此阶段四个情境的建立与众多问题设置的特点而言, 主要能够达到学生数学抽象素养中情境与问题维度培养的目的, 让学生在多个情境中提炼出共有的属性, 为下一阶段概念的形成做准备。

5.2. 经历抽象, 寻求本质

探究 2: 根据以上 4 个例子填写如下表格(表 5)。

Table 5. Analysis table for 4 problem scenarios

表 5. 4 个问题情境的分析表

问题情境	自变量的集合	对应关系	函数值的集合	表示方法
情境一	$\{t 0 \leq t \leq 0.5\}$	$S = 350t$	$\{S 0 \leq S \leq 175\}$	解析式
情境二	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$W = 350d$	$\{350, 700, 1050, 1400, 1750, 2100\}$	解析式
情境三	$\{t 4 \leq t \leq 17\}$	图 2	$\{I 47 < I < 131\}$	图像
情境四	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	表 4	$\{109, 115, 120, 121, 128\}$	表格

探究 3: 分析四个实例有什么不同点和共同点?(可组内讨论)

探究 4: 尝试利用“集合-对应”的语言给函数下个定义。

探究 5: 试说明函数定义中有几个要素? 如何判断给定的两个变量之间是否具有函数关系?

延伸概念:

- ① 定义域: 自变量的取值范围;
- ② 值域: 所有函数值构成的集合 $\{y|y = f(x)\}$;
- ③ 在 a 处的函数值: $y = f(a)$;
- ④ 函数的三个要素: 定义域、值域、对应关系;
- ⑤ 非空数集是函数关系成立的前提;
- ⑥ 用区间表示函数的定义域和值域: 介绍区间的表示。

【设计意图】 这部分是培养数学抽象最为关键的一步, 通过对四个实例反复感知、观察、类比、归纳, 便可得到他们的共同特点, 得到函数的概念, 其实在这个过程中, 学生不知不觉地了解函数的概念, 但是彻底的理解还是很困难, 其中对于对应关系 f 的理解, 还是会困扰部分学生。因此教师还可以借助

其它学科知识, 来解释“对应关系”含义, 帮助学生理解。比如: 在化学中, 当我们把物质 A 放入“反应装置”中, 经过加工得到物质 B, 这样的“反应装置”就相当于函数中的“对应关系”。不难发现这部分以运用第二个策略(以探索数学本质为宗旨, 经历数学抽象)为主, 第五个策略(以正确的语言为突破, 强化抽象实践)为辅, 为学生用数学语言表达数学问题提供条件, 帮助学生提升思维与表达维度的数学抽象素养。

5.3. 巩固练习, 加深印象

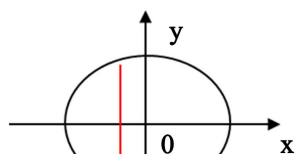
例 1 判断下列对应关系能否表示 y 是 x 的函数, 并说明理由。

1) $y = |x|$ 2) $|y| = x$

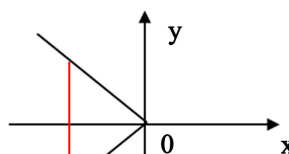
3) $y = x^2$ 4) $y^2 = x$

5) $y^2 + x^2 = 1$ 6) $y = x^2$

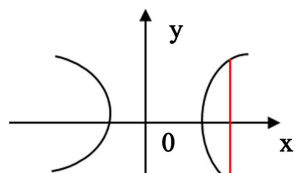
例 2 判断下列图象能表示函数图象的是()



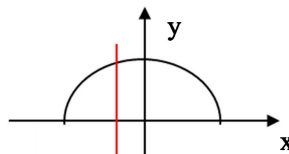
(A)



(B)



(C)



(D)

例 3 提问在这四个函数中哪个函数与 $y = x$ 相等? 以下 4 个函数中哪个函数与函数 $y = x$ 相等?

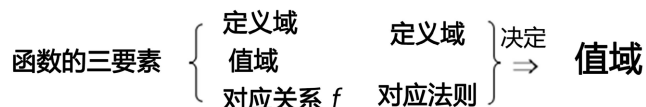
$$y = (\sqrt{x})^2, y = \sqrt{x^2}, y = \sqrt[3]{x^3}, y = \frac{x^2}{x}$$

设计意图 针对学生不易理解新的抽象概念这一难点, 教师可通过三个不同类型的例题进行知识的应用强化, 加强对概念的理解及记忆, 实现知识的“纵向数学化”, 引导学生“反思”归纳本节课所学内容, 深化函数的知识体系。例 1 和例 3 重点考察“非空数集”, 让学生体会函数的本质是两个非空数集之间的对应关系, 至于什么形式都是函数的非本质特征, 例 2 重点考察“对应唯一”, 聚焦对应关系的核心内容。即使学生前期抽象过程并没有完全理解函数的概念, 但是通过充分的变式以及正反例的补充完善知识结构, 学生可以顺利地抽象出概念并把握概念的实质。

5.4. 课堂小结, 总结反思

同学们, 今天我们站在数学先贤的肩膀上, 了解了清代数学家李善兰对于函数的翻译做出的巨大贡献; 我们还合作探究概括出了集合与对应角度上的函数的概念, 深入挖掘了“非空数集、对应唯一”的意义, 深刻理解了函数概念的内涵和外延, 对函数的概念有了一个比较全面的理解和掌握

探究 6: 什么是函数? 其三要素是什么? 你能否用思维导图概括本节内容?



设计意图 “总结归纳”是一节新授课的升华, 它对学生能否深入理解新知识的重点和关键, 能否构建起知识网络, 起着十分重要的作用。通过从丰富直观的系列问题情境中引入集合与对应视角下的函数的概念, 深入剖析函数概念的要义, 让学生感受到科学知识来之不易, 感受到数学家追求真理、献身科学的锲而不舍的精神, 感受到数学的独特魅力, 从而全方位、多领域地落实培养数学抽象核心素养的目标。

6. 结语

数学学习是循序渐进的动态探索, 在这个过程中教师要帮助学生理解应用很多数学思想和方法, 数学抽象只是其中一项基础的方法与素养。通过数学抽象培养的探究, 更好地帮助学生对于概念的理解更加清晰明确, 建立数学与现实问题的桥梁, 发现问题所隐含的信息, 让知识和现实问题得到串联, 让不可见变成可见, 让具体变成抽象, 不断从低层次向高层次进步转化。同时, 教师在教学中要引导学生掌握数学抽象的方法, 提升自身数学思维能力。在数学学习中要注重培养学生的抽象思维, 让学生形成良好的抽象意识, 并且将抽象思维运用于具体问题上去, 使学生真正做到举一反三、触类旁通, 最终达到事半功倍的效果。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准: 2017 年版[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 史宁中. 数学思想概论第 5 辑: 自然界中的数学模型[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2015.
- [3] 史宁中. 数学思想概论第 1 辑: 数量与数量关系的抽象[M]. 长春: 东北师范大学出版社, 2015.
- [4] 李昌官. 数学抽象及其教学[J]. 数学教育学报, 2017, 26(4): 61-64.
- [5] 吴增生. 数学抽象的认知与脑机制[J]. 数学教育学报, 2018, 27(4): 68-75.
- [6] 夏正华. 高一学生函数学习数学抽象能力的调查研究[J]. 数学通报, 2021, 60(6): 13-19.