

数学高阶思维能力内涵及其培养

刘杨霞

湖南科技大学, 湖南 湘潭

收稿日期: 2022年4月28日; 录用日期: 2022年6月8日; 发布日期: 2022年6月15日

摘要

数学高阶思维能力是以数学学科知识与数学思维技能为基础, 在复杂数学问题情境下, 数学问题解决能力、数学决策能力、数学批判性思维能力、数学创造性思维能力与非认知因素相互作用下形成的较高水平心智活动。在数学教学中, 教师要领悟数学高阶思维能力内涵, 提高其培养意识; 善于激发学生数学学习动机, 营造适合高阶思维能力发展的教学情境; 设计高阶学习活动, 构建高阶思维能力培养路径。

关键词

高阶思维能力, 数学思维, 数学高阶思维能力

Connotation and Cultivation of Mathematical Advanced Thinking Ability

Yangxia Liu

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 28th, 2022; accepted: Jun. 8th, 2022; published: Jun. 15th, 2022

Abstract

Mathematical higher-order thinking ability is based on mathematical knowledge and mathematical thinking skills. In the context of mathematical problem solving ability, mathematical decision-making ability, mathematical critical thinking ability, and mathematical creative thinking ability are higher level mental activities formed under the interaction of non-cognitive factors. In mathematics teaching, teachers should understand the connotation of mathematics higher thinking ability and improve their cultivation consciousness; be good at stimulating students' mathematics learning motivation, create a teaching situation suitable for the development of higher thinking ability; design higher learning activities and construct higher thinking ability training path.

Keywords

Advanced Thinking Ability, Mathematical Thinking, Mathematical Advanced Thinking Ability

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

21 世纪对人才培养的要求落地于学生的高阶思维能力,且我国核心素养旨在培养综合素质人才,高阶思维作为一种综合素质能力是核心素养的关键成分。且我国数学教学中还是存在数学教育理念与数学教育目标指向不一的现象,教师对学生填鸭式、应试化的教学使学生的思维能力处于低层次状态,学生的数学核心素养未得到强化,不利于将来应对 21 世纪的挑战,故挖掘数学高阶思维能力内涵并探究如何培养数学高阶思维是至关重要的。

2. 高阶思维能力的内涵

在已有的许多文献中,高阶思维和高阶思维能力的界定并未严格进行区分,高阶思维的界定有认知过程说与认知能力说。高阶思维能力中“能力”这个词从心理学来说有两种定义,定义一是保证活动顺利进行的个性心理特征,是从过程角度进行界定;定义二是一种内在的心理品质,是解决完某项任务的条件,是从结果进行界定。从以上原因可知,将高阶思维与高阶思维能力同视为过程或同视为结果,其界定不区分是符合认识的。

但笔者认为高阶思维应是建立在思维基础上,是从属于高层次认识过程的。如姜玉莲基于探索性结构方程建模,从结构整体性上指出高阶思维包含决策能力、问题解决能力等高阶思维技能与同伴情感支持、自我效能感等非认知因素[1],汪茂华指出高阶思维能力是高阶思维的构成要素之一,且好奇心、寻求真相、坚持、思想开放等情意倾向也是其要素之一[2]。

由上可知高阶思维应是聚焦发展过程的整体性结构,高阶思维能力要素与参与高阶思维活动的非认知要素都是其整体性结构的主要成分。其中高阶思维能力是在复杂情境中,发生在较高认知水平的心智活动时所需要的高层次认知技能[3],包括批判性思维能力、问题求解能力、创造性思维能力、决策能力,是在进行高阶思维的过程中表现出来的稳定心理特征。而高阶思维中的情感、兴趣、动机等非认知因素则是为高阶思维能力的发展创设积极条件。

3. 数学高阶思维能力的基本要素

作为学科领域的数学高阶思维能力是数学高阶思维的核心,数学高阶思维则包含高阶思维与数学思维,兼并两者的特点。在已有的高阶思维整体性结构基础上,融合数学学科特征和数学思维特点,依据《普通高中数学课程标准》中的数学核心素养和数学课程目标[4],本文将数学高阶思维能力视为是以数学学科知识与数学思维技能为基础,在复杂数学问题情境下,数学问题解决能力、数学决策性能力、数学批判性思维能力、数学创造性思维能力与非认知因素相互作用下形成的较高水平心智活动[5],主要表现为分析、综合、评价、创造。由此可知数学高阶思维能力基本要素则主要包括:数学问题解决、数学决策、数学批判性思维、数学创造性思维能力。

3.1. 数学问题解决能力

数学领域中的问题解决能力与在其它学科中用数学解决问题的能力是有所区别的,前者旨在通过数学问题解决活动,提高数学思维水平与思维品质,后者是将数学作为解决问题的工具。张奠宙曾指出在数学应用中综合运用分析问题、解决问题方面的能力为数学问题解决能力[6]。由此笔者认为数学问题解决能力是充分利用数学知识,解决潜藏于新问题情境中的数学问题的能力,即能识别问题,并判断问题的条件是否完备,使用转换、建立因果关系、类推等数学思想方法将问题信息与数学知识进行加工,获得问题解决方法并对解决方案进行验证的能力。

例如数学问题解决能力在“指数函数”概念的应用:在学习新概念之前学生能根据老师创设的问题情境(将一张面积为1的纸对折 x 次,层数与折叠次数之间有什么关系)挖掘有效信息,提出数学问题,形成将生活与数学联系起来的数学化思想,与此同时学生能对数学问题进行观察、分析、推理,尝试自主解决问题并对解决方案进行验证的能力。

3.2. 数学决策性能力

数学高阶思维的产生是基于复杂的数学问题情境下,即问题情境中条件不明确的非良构性问题。此类问题的解决没有相同的模型与案例与之适应匹配,则解决过程可能会包含多种不确定性方案,而对方案的不确定性决策过程与问题解决过程既有相似也存在差异,相似是决策过程中包含问题解决成分,如对一系列方案进行比较与评价等,问题解决过程也包含决策,如对问题的最优解决必须采用何种策略;差异是问题解决更多的关注是对方案的设计,而决策是方案已存在主体认知中,更多的是对方案进行选择。王铭奇曾指出在问题解决活动中所进行的数学决策是数学决策性能力[7]。由此本文认为数学决策能力是在复杂的问题情境下解决非良构性数学问题过程中,对多种方案进行缜密思考、比较分析,从而选择出最优方案的思维能力。

例如数学决策能力在 $y = A\sin(wx + \varphi)$ 图像中的应用:因其模型在物理简谐振动、交流电的电流等有广泛应用,故学生在探讨 $y = A\sin(wx + \varphi)$ 的图像能给出多个方案,如随机取其中的参数值、只固定一个参数、固定两个参数来研究等,学生对以上出现的方案进行分析,选择最优方案研究函数图像的能力则为数学决策性能力。

3.3. 数学批判性思维能力

数学批判性思维能力是批判性思维能力在数学学习与研究中的体现。对批判性思维的探讨大多是从哲学与心理学角度,一般将其理解为有目的、有依据的、具备自律性的判断与较强逻辑的缜密思考。孙联荣从数学教育角度,指出数学批判性思维主要表现为对任何问题都冷静思考且保持反省式怀疑态度、以已有的数学知识经验作为判断依据、命题的结论及结论成立的原因都力求严谨、能大胆猜测提出新结论并进行检验与反驳[8]。李文婧等人曾指出学习者在数学学习活动中有针对性地对已有数学知识、思维过程及结果进行自我调节性分析并调整的能力是数学批判性思维能力[9]。由此本文认为数学批判性思维能力是主体能有目的、自觉的对数学策略、数学命题、数学思维进行分析辨别、推理判断、检验评估的能力。

例如数学批判性思维能力在数学命题中的应用:如给出学生一个命题进行证明(无理数+无理数还是无理数),具有数学批判性思维能力的学生则不会盲从老师的权威,敢于质疑问题是否成立,即该命题是否是真,能否证明,且在质疑题日本身错误时,能给出数学依据,举出反例,进行反驳。

3.4. 数学创造性思维能力

罗福生指出在解决数学问题过程中克服自我的思维定势,并获得相异且新颖的思维产物的能力是数

学创造性思维能力[10]。也有部分学者指出数学的创造性思维虽产生于问题解决过程中，但其关键是要看问题的出现及解决方案的获得对主体是否新颖，故指出其创新还应体现在问题提出的思维过程。本文认为数学创造性思维能力是主体在数学活动中，运用已有数学知识经验，产生新颖独特的数学思维产物的能力，包含发现问题、收集相关信息的准备阶段、保留问题并思维放空的酝酿阶段、豁然开朗灵感出现的顿悟阶段、针对问题进行检验的评估阶段。

例如数学创造性思维能力在“等比数列”中的应用：教师给出的数学情境是：一张正方形纸，再对折，并在对折后的纸上剪下一角，此时将正方形纸片展开，其中间有一个洞。学生们根据以上情境提出若对折10次有多少个洞的非常规数学问题，并对提出的问题进行类比联想，给出画图、实验找规律、从特殊到一般等多个合理的解决思路，最终发现新的数学知识。

4. 数学高阶思维能力的培养

数学高阶思维能力的四个要素是学生积极适应未来社会的必要条件，因此在数学日常教学中注重高阶思维能力的培养是十分重要的。基于以上对数学高阶思维能力理论的探究，以下将三个方面提出培养建议。

4.1. 领悟数学高阶思维能力内涵，提高其培养意识

教师作为培养学生高阶思维能力的领头羊，自身要加强高阶思维理论的学习，深刻领悟数学高阶思维的内涵，提高其培养意识，并具备与其理论同步的教学观念来指导自己的教学工作。

4.1.1. 联系数学的内在价值，理解高阶思维能力内涵

作为数学教师，应学会将高阶思维理论与数学内在价值紧密结合，以加深对数学高阶思维能力内涵的理解。数学的内在价值不是功利性主义色彩在数学学科的展现，也不是数学学科在实际生活问题中作为一种工具的使用。数学的内在价值是为数学而数学，是学生数学思维的进阶，是学生对数学学习热爱的解决，是学生理性精神的培养。由此可见，数学高阶思维能力的培养是数学内在价值的一种体现，但在数学思维该领域，数学高阶思维能力的培养更注重学生在较高认知水平上的问题解决能力、批判性思维能力、决策性能力、创造性思维能力的提升。

4.1.2. 交流探讨观点与疑问，更新完善教学理念

由于每位老师的知识储备、教学视野、教学经验会存在差别，则对数学高阶思维的理解也会有所不同，那么数学教师之间应加强交流探讨。数学教研组与各年级数学备课组，可积极开展数学高阶思维交流会，分享各自对数学高阶思维的认识，提出在数学教学中应如何培养数学高阶思维能力的策略，也可结合某一具体教学内容共同探讨如何设计课堂以达到培养学生数学高阶思维能力的目的。在培养数学高阶思维能力的教学实践中，或许会存在与预设不同的效果，存在疑问与阻碍，作为教师应积极与同仁进行交流，提升自我学习能力，阅读相关文献进行反思学习，不断探索适合学生的数学高阶思维能力培养模式，完善更新高阶思维教学理念。

4.1.3. 开展教师培训活动，促进教师专业成长

汪茂华在高阶思维能力评价研究中指出学校越支持教师的专业发展，学生的高阶思维能力成绩越好[2]。由此可见学生数学高阶思维能力的发展受到教师数学专业知识的影响，其包含数学教育理论，数学学科知识、数学教学经验等，故培养学生数学高阶思维能力的前提是促进教师数学专业能力的发展。作为学校应积极为教师培养学生高阶思维能力提供学习平台，如开展相关数学高阶思维能力培训活动，聘请相关教育专家到本校为数学教师进行讲座学习；也可利用网络媒体技术，寻找网络资源供教师学习；或派本校教师去教育理念先进的地方外出学习考察等。

4.2. 激发学生数学学习动机，营造适合高阶思维能力发展的教学情境

由高阶思维能力的内涵可知，高阶思维的发展是一个错综复杂的整体，其情感、动机、兴趣等非认知因素是促进高阶思维能力发展的必要条件，如美国拉塞尔曾认为思维活动发展的起始阶段为环境刺激引起的成就动机、学习热情、自信心等心理活动，由此可知数学高阶思维能力的培养离不开非认知因素的参与。以下将主要阐述如何激发学生学习动机与营造适合高阶思维能力发展的教学情境以培养学生数学高阶思维能力。

4.2.1. 运用数学史与数学故事，调动学生学习的积极性

联系数学史，讲述知识的由来与发展，让学生感受数学家的伟大，启发学生学习数学家的创新精神与解决问题能力。如在讲授高一必修二概率章节第一节课时，向学生阐述概率论的产生与发展可追溯于1654年，赌徒的一个问题：两个赌徒约定谁先赢满5局，谁就获得全部赌金。赌了半天，A赢了4局，B赢了3局，时间很晚了，他们都不想再赌下去了。那么，这个钱应该怎么分才理？三年后数学家惠更斯为解决此问题写成了《论赌博中的计算》一书。也可引出与生活相关的经历或小故事，提出问题激发学生思考的内驱力，如在讲授向量加法的三角形法则中，可通过唐僧取经的小故事，询问学生唐僧从东土大唐出发绕到新疆，再往天竺的路程与悟空单独前往直接飞向西天的路程相同吗？以此引发学生思考，得出向量求和的方法。

4.2.2. 运用多媒体设备，激发学生探究知识的欲望

多媒体技术在教学中的使用，能很大程度上改变枯燥疲劳的学习环境，在教师讲授与多媒体设备相结合的人机交互模式下，由于接受多种外界刺激，学生的情绪易被激发，为学生主动学习，积极思考创设了有利条件。如在讲授正弦定理、余弦定理的应用时，教师利用多媒体播放两位法国天文学家在科学技术不发达的1752年测出地球与月亮之间的距离大约为385,400 km的科学视频，引发学生思考科学家是如何测算出的，激发学生探究知识的欲望，以引入课题。也可利用几何画板和GeoGebra辅助教学，将抽象内容具体化，便于学生直观感受。如在讲授椭圆的定义时，利用几何画板展示铅笔在绳子上画图的动点轨迹，并向学生展示改变两个固定点的距离，其轨迹发生的变化，从而引导学生根据直观体验归纳出椭圆定义。又如在讲授关于几何体的外接球时，利用GeoGebra展示不同几何体外接球的3D图像，提高学生空间想象能力，激发学生思考如何确定外接球球心的问题。

4.2.3. 构建和谐平衡的师生关系，创设敢于思考的学习环境

和谐平衡的师生关系，利于构建松弛有度的教学环境，学生从内心认可教师，将教师视为朋友，则会通过多种方式将这种情感反馈给教师，同样教师也会感受到学生的情感，则愿意为学生付出更多的心血。在这样师生合作、共同体验创造、共同收获成功乐趣的师生关系下，学生的主体性利于发挥，思想易完全开放，敢于大胆质疑，敢于想象，利于高阶思维能力的发展。

4.3. 设计高阶学习活动，构建高阶思维能力培养路径

4.3.1. 设计数学问题链，在问题的解决中开发学生的高阶思维能力

问题是思维的起点，问题与思考型任务的结合易于激发学生的思维活动，当问题以“链”的形式出现，学生能根据问题任务进行连续型的思维活动，利于学生高阶思维能力的养成。问题链的设计要遵循一定的逻辑结构，指向某一主题，各问题之间要存在联系与思维空间，使学生能在问题情境中进行自主建构，发展高阶思维能力。以下以“直线与平面平行”部分教学为例，说明不同活动问题链的设计意图。

如在本课起始环节，教师为启发同学将生活事物抽象为几何图形提出问题：直线与平面的位置关系有哪些，能举出实例吗；随之设置问题情境，引发学生认知冲突：为了美化城市，工人们要将先由的平

顶房进行“平改坡”，将平顶改为尖顶，并铺上彩色瓦片，请问工人如何确保尖顶屋脊与平顶平行；基于以上问题情境，教师为进一步让学生体会问题的抽象，培养学生分析问题和提出问题能力设置以下问题：工人“平改坡”的实际问题能否抽象为几何问题？若用直观感觉进行判断可靠吗？根据已学的线面平行的定义进行判断呢；随后教师设置操作环节，并设置一系列问题，配合多媒体，引导学生解决问题。

4.3.2. 设置数学探究学习活动，在自主思考中培养学生的高阶思维能力

数学探究活动是较复杂的数学学习活动，一般是对某一问题进行探究，其探究方式涉及个人独立探究、小组合作探究，教师引导探究，其中教师的引导探究是在学生出现不能解决的疑难点时，帮助学生寻找思维方向。整个探究活动的重点是学生们自主探究的过程，不是探究结果的出现，故需重视学生自我监控过程，启发学生思考自己正在做什么，为什么这样做，之后该从哪里做等问题。

如在数学探究“用向量法研究三角形的性质”一节内容中，教师给出三角形的勾股定理，引导学生先自主探究，在探究环节中预设好学生可能会用初中所学的几何法进行证明也可能会用高中所学的向量法进行证明，若学生出现两种证明方法，教师要引导学生将两种方法进行对比探究，思考优缺点，引导学生总结每种方法的证明思路与步骤。在自主探究后，教师展开合作探究模式，让小组协作研究三角形的其它性质如三角形的垂心、外心、内心等，并要求学生在探究过程中完成教师下发的探究报告，指引学生反思自己的探究过程，对自我思维进行监控，在批判中创新，在不断的思考中发展数学高阶思维能力。

4.3.3. 构建概念图与思维导图，在整理与优化中发展学生的高阶思维能力

概念图是对知识的表征，思维导图是对思维路径的表征，两者结合用于数学教学，可整理学生数学知识结构与优化数学思维逻辑结构，而数学理论知识体系的完善是发展高阶思维能力的基础，思维导图的可视化则能有效引导思维从各个方向、维度、广度、深度进行延展，不断刺激思维向高层次发展。如在高一“平面向量及其应用”一章内容中，引导学生学会构建以下的概念知识框架图(图 1)与思维路径导图(图 2)。

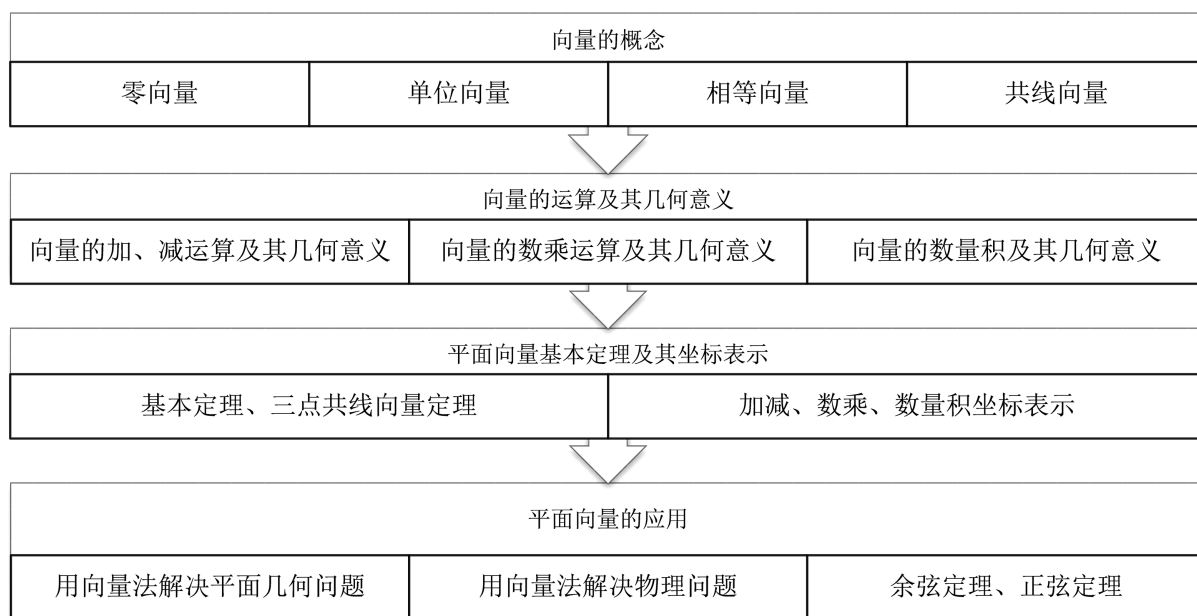


Figure 1. Conceptual knowledge framework diagram

图 1. 概念知识框架图

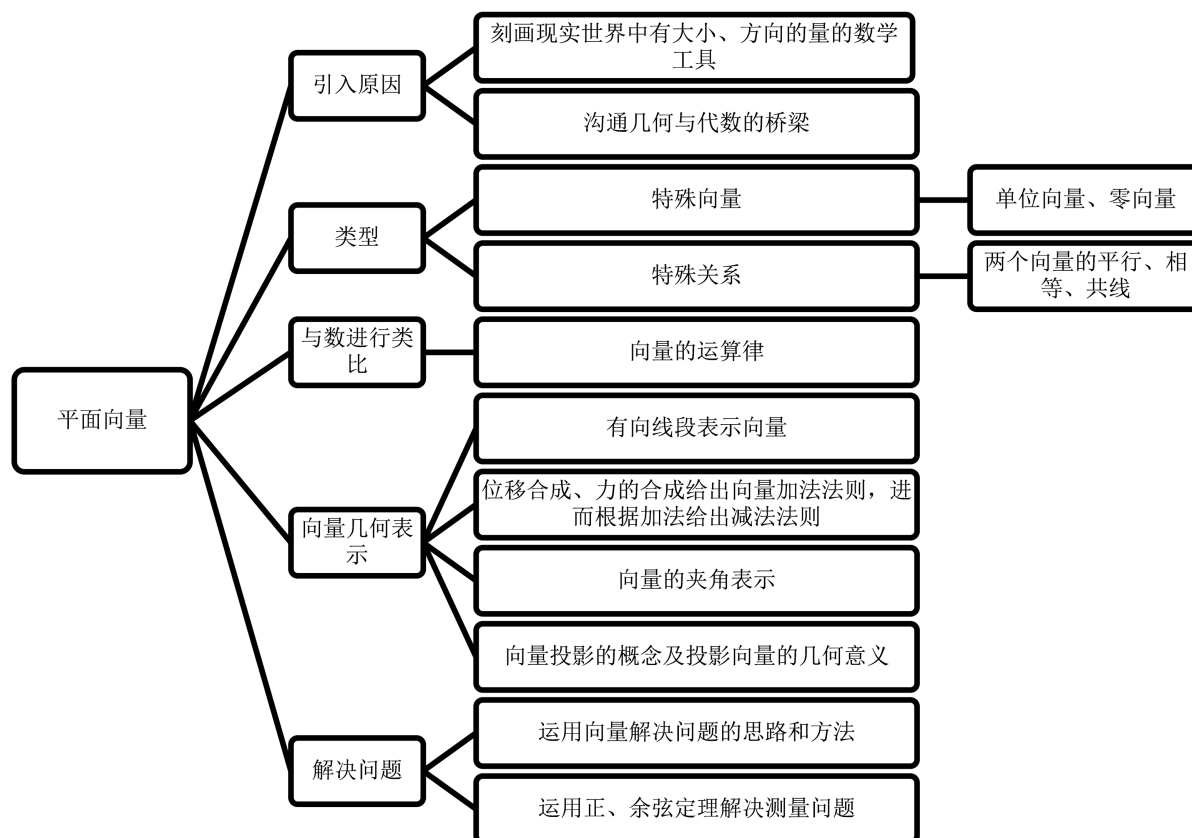


Figure 2. Mind path map
图 2. 思维路径导图

5. 结语

在数学教学中，培养学生数学高阶思维能力是一个持续性的过程，需要教师不断探索适合学生的培养路径，要尽可能为学生创设利于高阶思维能力发展的学习空间，提高学生适应未来社会的问题解决能力、决策性能力、批判性思维能力、创造性思维能力。

参考文献

- [1] 姜玉莲, 解月光. 基于 ESEM 的高阶思维结构测量模型研究[J]. 现代远程教育研究, 2017(3): 94-104.
- [2] 汪茂华. 高阶思维能力评价研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2018.
- [3] 钟志贤. 面向知识时代的教学设计框架: 促进学习者发展[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 2006.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017.
- [5] 周莹, 林毅. 初中生数学高阶思维的结构模型建构及问卷编制[J]. 数学通报, 2021, 60(2): 16-24.
- [6] 张奠宙, 王振辉. 关于数学的学术形态和教育形态——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽”[J]. 数学教育学报, 2002(2): 1-4.
- [7] 王铭奇. 数学决策在高一函数教学中的应用研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2011.
- [8] 孙联荣. 数学教育中培养批判性思维的探讨[J]. 数学教育学报, 1995(4): 16-20.
- [9] 李文婧, 傅海伦. 数学批判性思维及其教学策略[J]. 教育科学研究, 2006(5): 36-38.
- [10] 罗福生. 高中数学教学中培养学生创造性思维能力的理论与实践研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西师范大学, 2005.