Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(9), 2181-2187
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.109343

基于问题驱动理念的课程思政融入定积分概念的教学设计

蒋依夏[1,2]，郭继东[1,2]，刁玉存[1,2]，邸贺璇[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年8月12日；录用日期：2022年9月8日；发布日期：2022年9月16日

摘 要

在《高等数学》这门课程中融入课程思政的内容是实现立德树人教育目标的根本要求。定积分的概念中蕴含着重要的数学思想方法以及哲学思想，这部分内容与数学史紧密结合，是将数学文化数学精神渗透进数学教学的极佳载体。本文在问题驱动的教学理念下，对课程思政融入定积分概念的教学过程进行了详细的设计。

关键词

课程思政，问题驱动，定积分，数学文化

Instructional Design of Definite Integral Based on Problem-Based Learning Concept and Curriculum Ideology and Politics

Yixia Jiang[1,2], Jidong Guo[1,2], Yucun Diao[1,2], Hexuan Di[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Aug. 12th, 2022; accepted: Sep. 8th, 2022; published: Sep. 16th, 2022

Abstract

The integration of ideological and political content into the course of Higher Mathematics is the fundamental requirement to achieve the goal of moral education. The concept of definite integral contains important mathematical thought method and philosophical thought. Definite Integral is

文章引用: 蒋依夏, 郭继东, 刁玉存, 邸贺璇. 基于问题驱动理念的课程思政融入定积分概念的教学设计[J]. 创新教育研究, 2022, 10(9): 2181-2187. DOI: 10.12677/ces.2022.109343

closely combined with the history of mathematics, and is an excellent carrier for infiltrating mathematical culture and spirit into mathematics teaching. In this paper, under the concept of Problem-Based Learning, the instructional design of Definite Integral with integrating ideological and political curriculum has been designed in detail.

Keywords

Curriculum Ideology and Politics, Problem-Based Learning, Definite Integral, Mathematical Culture

1. 在《高等数学》课程中融入课程思政的重要性

培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题。落实立德树人根本任务，必须将价值塑造、知识传授和能力培养三者融为一体、不可割裂。全面推进课程思政建设，就是要将价值观引领寓于知识传授和能力培养之中，帮助学生塑造正确的世界观、人生观、价值观，这是人才培养的应有之义，更是必备内容。《高等数学》这门课程是理工科专业本科一年级学生的一门必修课程，在《高等数学》这门课程的教学中把马克思主义观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力。注重科学思维方法的训练的同时，我们还要将数学文化融入课堂教学，向历史上的数学家学习，进行科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感。

定积分的概念这部分内容是微积分学的核心概念，定积分是具有特定结构的和式极限，是曲边梯形计算面积的结果。变速直线运动物体的位移，同向变力对物体所做的功，都可以归结为相同和式的极限计算问题，定积分在理论和实际两个方面都具有普遍的意义[1]。定积分蕴含着重要的数学思想方法，是学生学习直边图形面积走向曲边图形面积计算的关键转折，是教学中培养学生数学思想方法的重要载体。

2. 理论基础

问题驱动教学法即基于问题的教学方法(Problem-Based Learning, PBL)。这种方法不像传统教学那样先学习理论知识再解决问题。问题驱动教学法是一种以学生为主体、以专业领域内的各种问题为学习起点，以问题为核心规划学习内容，让学生围绕问题寻求解决方案的一种学习方法。教师在此过程中的角色是问题的提出者、课程的设计者以及结果的评估者。

3. 定积分教学的课程思政目标及知识与能力目标

1) 知识目标

理解定积分以及与定积分相关的概念。

2) 能力目标

通过定积分概念的学习，培养分析和解决问题的能力，抽象以及概括的能力。

3) 思政目标

体会数学知识在生产生活中的应用，感悟数学来源于生活，服务于生活。在数学知识的学习过程中感受数学的高度抽象，以及广泛的应用性，感受数学的智慧与魅力。感受中国古代数学家的钻研精神。

感受定积分中化整为零、以直代曲近似替代、积零为整、极限思想、量变会产生质变等哲学思想和数学思想方法。

4. 定积分概念教学的学情分析及教学方法

学生在学习定积分之前学习了极限的思想，以直代曲近似代替的数学思想，为学习定积分打下了思想方法的基础。学生在高中数学的学习中，由于定积分概念在选修教材中，高考也不考，调查发现学生在高中阶段没有学习过定积分的概念。学生基础薄弱，分析问题，解决问题的能力较差。

根据学生的学情，我在本节课的教学中采用的是设计课前任务单，让学生课前以个人独立思考，搜集网络资源并学习，再以小组为单位进行讨论的方法完成课前任务单，为课堂学习搭建脚手架。定积分概念的探究过程是本节课的难点，课堂上采用问题驱动的教学方法，启发引导学生思考，逐步得出定积分概念。

5. 课程思政融入定积分教学的教学过程设计

5.1. 概念的引入

在 17 世纪，许多科学问题亟待解决，这促使了微积分学的诞生。英国的大科学家牛顿和德国的科学家莱布尼兹各自独立的完成了微积分的创立工作，微积分的创立极大的推动了数学的发展。过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分往往迎刃而解。恩格斯曾这样评价微积分：在人类的一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神文明的最高胜利了！因此，用这个数学文化的内容来进行引入，并且用提问的方法，问同学们：微积分是高等数学的核心内容，大家知道微积分是由谁创立的吗？进而介绍相关数学史内容，引出本节课学习微积分学中的一个非常重要的概念：定积分。

在过去的学习中，学生已经知道三角形，矩形，平行四边形，梯形等平面直边图形的面积计算方法。但在我们的生活中，还会遇到计算我国国土面积，计算西湖湖面面积等曲边图形的面积计算问题。教师在此时提出：那么应该如何计算曲边图形的面积呢？引发学生的思考。生活中常见的曲边图形，例如地图、水迹等，通过对其添加水平和竖直直线的方法对其进行分割，可以得到一种基本的几何图形：曲边梯形。什么是曲边梯形呢？由三条直线(其中两条直线互相平行且与第三条直线垂直)与一条曲线围成的封闭图形，称为曲边梯形。这里也包括两条竖直的边中的一边或两边缩为一点的情况。数学中，我们往往将图形放入坐标系中研究(如图 1)。一般的设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负且连续，由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b$ 和 $y=0$ 围成的平面图形称为曲边梯形[2]。我们用英文单词面积 area 的首字母的大写字母 A 来表示这个曲边梯形的面积。教师在此提出问题：那么曲边梯形的面积应该如何计算呢？引发学生的思考。通过这样的过程，让数学与我们的生活紧密联系起来，可以让学生感受数学来源于实践，来源于我们的生活也服务于生活。

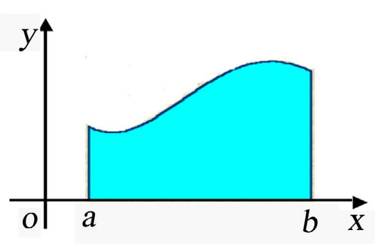

Figure 1. Curved trapezoid
图 1. 曲边梯形

对于教师提出的如何计算曲边图形和曲边梯形的面积问题，这个对于学生来说是很困难的。所以在教学中可以和学生一起来回顾圆这个曲边图形面积的计算公式，以及公式的推导过程。在这里可以融入数学文化的内容。我们都知道圆的面积公式是 $S=\pi R^2$，但是在人类历史上，为了计算出圆的精确面积，许多数学家付出了不懈努力。其中就有我国古代魏晋时期的数学家刘徽利用割圆术来计算圆周率的光辉历史。刘徽在他的数学著作《九章算术注》这本书中提出割圆术作为计算圆的周长，面积及圆周率的基础[3]。割圆术的要旨是用圆内接正多边形去逐步的逼近圆(如图 2)。刘徽从圆的内接正六边形出发，边数逐次加倍，并计算每次的正多边形的周长与面积。他指出：割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。这是典型的极限思想的体现。让学生从中感受我国古代数学家的钻研精神，对待学问孜孜以求的精神，我国古代数学家也可以做出领先世界的数学成就。

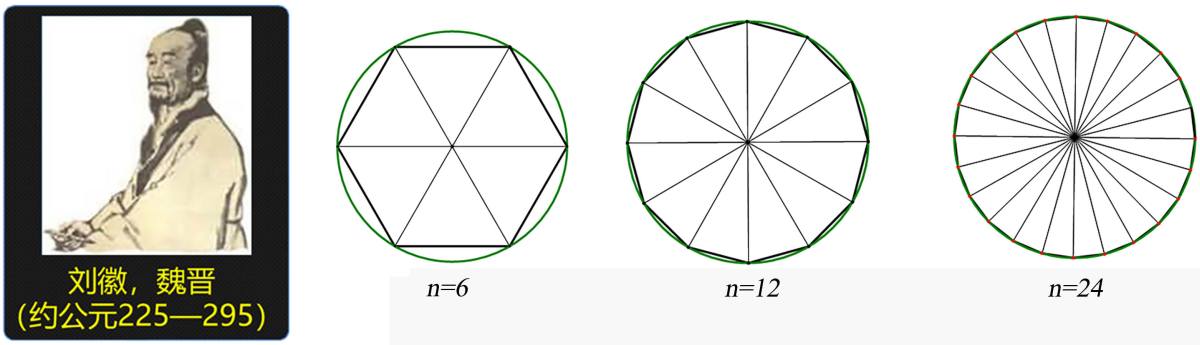

Figure 2. Liu Hui and cyclotomic method
图 2. 刘徽与割圆术

在课前给学生布置了课前任务单，让学生查找刘徽的生平以及割圆术的资料。为了检测学生们的课前任务单完成情况，所以随机抽取两位学生分别对刘徽生平和割圆术向全班同学进行汇报。通过这样的汇报检测作业完成情况的同时，也锻炼了学生的胆量与表达能力。

接下来利用小学教材中的圆面积公式推导这部分内容在网络上找到了一个合适的视频，播放这个视频给学生观看，并要求看的时候注意这个过程中使用了哪些思想方法。视频看完了，向学生提问：推导圆面积公式的过程中使用了哪些思想方法？学生回到完毕之后对这个问题的答案进行总结：这个过程中有分割、近似、求和、取极限的思想方法。这个过程是为计算曲边梯形的面积做铺垫，给后续的学习搭设支架。

5.2. 概念的探究

计算曲边梯形面积的这个过程中蕴含着很多非常重要的数学思想方法和哲学思想。通过类比圆的面积公式的推导方法，采用相同的思想方法与步骤，从比较简单的过度到比较困难的，并且在这个过程中采用问题链的设计，以问题驱动学生思考，层层递进，感受化整为零、积零为整、量变会产生质变的哲学思想和以直代曲、取极限的数学思想方法。

下面是概念探究部分的教学片段：

师：下面我们也利用分割、近似、求和、取极限的方法，来表示出曲边梯形的面积。

师：第一步分割，对 $[a,b]$ 均分比较容易做到？还是对其任意分割比较容易？均分是比较难做到的，所以我们对其进行任意分割。我们一般在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点，这些点分别记作 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}$。为了保持记号一致，把左端点 a 记作 x_0，把右端点 b 记作 x_n。这些点将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，它们分别是 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_{i-},x_i],[x_{n-1},x_n]$。每个小区间的长度等于右端点减去左端点，我们把每个区间的长度

分别记作 $\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_i,\cdots,\Delta x_n$。这样，我们就把这个曲边梯形分成了 n 个小的曲边梯形。

师：这里体现了怎样的哲学思想？

生：这里体现了大化小，也就是化整为零的哲学思想。

师：第二步近似，如何近似呢？我们来看第 i 个小曲边梯形，我们用 ΔA_i 来表示它的面积。它与矩形相比，不同之处在于其中一条边是弯曲的，所以我们可以用一条水平直边来近似代替这里的曲边，也就是以直代曲。我们可以用小矩形的面积来近似代替小曲边梯形的面积，这个小矩形的高可以是左端点的函数值，也可以是右端点的函数值，也可以是这个区间上某个点的函数值，一般的，我们在区间 $\left[x_{i-},x_i\right]$ 上任取一点 ξ_i，以它的函数值 $f\left(\xi_i\right)$ 为高作矩形。那么这个小曲边梯形的面积 $\Delta A_i\approx\Delta x_i f\left(\xi_i\right)$,类似的，其它区间上任选一点，以它的函数值为高作小矩形，则第一个小曲边梯形的面积 $\Delta A_1\approx\Delta x_1 f\left(\xi_1\right)$，则第 2 个小曲边梯形的面积 $\Delta A_2\approx\Delta x_2 f\left(\xi_2\right)$，则第 n 个小曲边梯形的面积 $\Delta A_n\approx\Delta x_n f\left(\xi_n\right)$。这样我们就用小矩形的面积近似表示出了每个小曲边梯形的面积。

师：这个过程中体现了怎样的数学思想呢？

生：这里体现了以直代曲，近似替代的数学思想方法。

师：第三步求和。我们把这些式子的左边相加，结果就是大曲边梯形的面积 A,把这些式子的右边相加，就得到曲边梯形面积的一个近似值。

师：这里能体现怎样的哲学思想呢？

生：这里能体现积零为整的哲学思想。

师：我们来看这个式子，这里的每一项除了下角标不同，其它完全一致，所以我们用求和符号把它简记为 $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f\left(\xi_i\right)$。

师：第四步取极限。在上一步，我们得到了曲边梯形面积的一个近似值，这个式子的值与每个区间的长度，每个区间上点的选取有关，区间的分法不同，点的选取不同，这个和式的值就不同。区间分割的越细，近似的精确度就越高。可以想象，当分点无限增多，对 $\left[a,b\right]$ 无限细分时，这里的误差将会消失，这个和式的极限就等于曲边梯形面积的精确值。

师：那这里应该对哪个变量取怎样的极限呢？对小区间的个数 n 取 $\to\infty$ 的极限，可以吗？不可以，我们如果只对部分区间无限细分，区间数量 n 是趋向无穷大的，但是存在部分区间没有被细分，所以仍然存在误差。那怎样才能让每个区间都被无限细分呢？让每个小区间的长度 $\to 0$ 就可以了，这里把 $\left\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_i,\cdots,\Delta x_n\right\}$ 的长度最大值记作 λ。当 $\lambda\to 0$ 时，这里的每个小区间的长度就都 $\to 0$。所以对这个和式取 $\lambda\to 0$ 的极限，这个极限的精确值就是曲边梯形面积的精确值 A。这个极限值与区间的分法和点的取法有关系吗？

师：很好，没有关系。这个极限值就是面积的精确值，是一个确定的常数，所以与区间的分法和点的取法都没有关系。

师：这里能体现怎样的哲学和数学思想呢?这里从有限到无限，从近似到精确，体现了量变到质变的哲学思想和极限的数学思想，极限思想是高等数学中最核心的数学思想[4]。

师：刚才我们通过分割、近似、求和、取极限的方法，表示出了曲边梯形面积的精确值，这是一个特殊和式的极限。物理中变速直线运动物体的路程，同向变力对物体所做的功等问题。解决的思想方法与步骤是相同的，最终都归结为求一个和式的极限，我们从这些具体的计算和式极限的问题中抽象出它们的共同特性，进行专门研究得出了定积分的概念。

5.3. 概念的明确

通过概念的探究环节，我们就归纳总结出定积分的概念：

定积分 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 上任意插入 $n-1$ 个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$，得到 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_{i-},x_i],[x_{n-1},x_n]$，令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，在每个小区间上任取一点 $\xi_i\in[x_{i-},x_i]$，令 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_i,\cdots,\Delta x_n\}$，当 $\lambda\to 0$ 时

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I\,.$$

我们把这个常数I叫做函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。

我们把式子中的 b 称为积分上限，a 称为积分下限，$[a,b]$ 称为积分区间，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，这个和式称为积分和式，由于和式极限理论是由黎曼最早提出的，所以这个和式也叫黎曼和，这个积分也叫黎曼积分。

事物之间是普遍联系的，定积分与不定积分从名称上看只相差一个字，从数学表达式上相差积分上限和积分下线，学生自然而然会关心这两个概念之间有什么区别与联系呢？因此在这里提出问题让学生思考，自己先建构问题的答案，学生作答，最后由老师揭晓。虽然定积分与不定积分在名字和符号上非常相似，但是最终我们发现这是两个完全不同的概念，这告诉我们不能被表象所迷惑，要深入本质。为了帮助学生更深入的理解概念，把握概念本质，因此我还提出问题：定积分的值与区间的分法和点的取法有关系吗？为什么呢?那定积分的值与什么有关系呢？先让学生思考，自己先建构问题的答案，学生作答之后再由老师揭晓。

5.4. 概念的应用

数学来源于实践也应用于实践，实践是检验真理的唯一标准。只有在运用知识的时候才能检验我们是否理解了知识、掌握了知识，所以我们要学以致用。在课前老师布置了用分割近似求和取极限的方法让大家计算曲边三角形的面积。在课堂上师生又共同完成了用分割近似求和取极限的方法求出了曲边梯形的面积。所以随机抽取一位同学来汇报用分割，近似，求和，取极限的方法计算曲边三角形的面积的解答过程。以此来检测学生对分割、近似、求和、取极限四部曲的掌握情况，并且锻炼学生的胆量与表达能力。如果这位同学遇到困难，其他同学可以提供帮助和补充。

5.5. 总结回顾

回顾总结环节对于每节课来说都必不可少，在这个环节带领学生回顾本节课有哪些收获，还哪些困惑，本节的数学知识、数学思想方法(如图 3)。

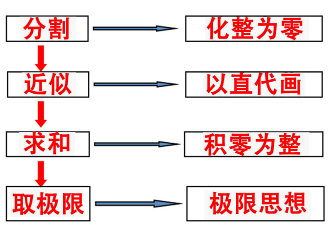

Figure 3. Thinking method
图 3. 思想方法

6. 结束语

数学文化，数学思想方法，哲学思想等思政元素融入了定积分概念的教学设计，这样数学的学习不仅仅停留在知识层面，而是上升到了思想方法层面。数学文化，数学精神，数学思想方法的学习是真正

能够影响学生一生的内容。课前任务单，问题驱动教学法让本节课的教学较好的突破了难点，课堂上师生一起经历定积分概念的探究过程。教科书中呈现的学术形态的数学概念，是一种“冰冷的美”，数学教师要将这种学术形态的知识转化为教育形态，使之在课堂上成为火热的思考[5]，这样学生才能较好地掌握定积分的概念及其中蕴含的思想方法。

基金项目

伊犁师范大学 2022 年度校级教改课题：对《高等数学》进行混合式教学、教学评一体化及融入课程思政的教学改革研究(项目编号：YSYB2022108)。

参考文献

[1] 黄永彪, 杨社平. 微积分基础[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2012.

[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2016.

[3] 周霞. 数学史融入定积分教学的案例设计[J]. 大学数学, 2018, 34(3): 115-120.

[4] 王丹. 探究在应用数学中融入思政元素的教学案例[J]. 数学学习与研究, 2021(23): 6-7.

[5] 张奠宙. 微积分教学: 从冰冷的美丽到火热的思考[J]. 高等数学研究, 2006, 9(2): 2-3.