

数学关键能力在高中数学教材习题中的表现研究

——以人教A版“函数”为例

袁 礼, 张永清

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年7月25日; 录用日期: 2023年11月18日; 发布日期: 2023年11月28日

摘 要

随着社会及教育界对学生的能力要求越来越高, 学生的学业负担也随之加重, 教材习题研究将成为今后需要关注的话题。本文将从数学关键能力的角度出发, 采用定量及文献分析法, 对高中数学人教A版教材必修第一册中函数章节的习题作一个全面分析。主要考察习题中不同关键能力类型和水平等级的题目占比, 分析关键能力在教材中的表现情况, 总结出习题设计要有侧重性, 要迎合教材特点、划分水平等级等启示, 从而更好的体现习题的适切性, 并且通过这些启示进行习题设计, 针对性地锻炼学生的各类型能力, 减轻作业负担, 进一步发展学生的关键能力。

关键词

高中数学, 数学关键能力, 教材习题, 函数

A Study on the Performance of Key Mathematics Abilities in High School Mathematics Textbook Exercises

—Taking the PEP Version A “Functions” as an Example

Li Yuan, Yongqing Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jul. 25th, 2023; accepted: Nov. 18th, 2023; published: Nov. 28th, 2023

Abstract

As society and education increasingly demand students' abilities, students' academic burden also increases, and the research of textbook exercises will become a topic that needs attention in the future. From the perspective of key mathematical abilities, this paper will use quantitative and literature analysis methods to make a comprehensive analysis of the exercises in the function chapter in the first volume of the compulsory A textbook for high school mathematicians. It mainly examines the proportion of different key ability types and level levels in the exercises, analyzes the performance of key abilities in the textbook, summarizes that the design of the exercises should be focused, cater to the characteristics of the textbook, divide the level and other enlightenments, so as to better reflect the relevance of the exercises, and through these enlightenments for the design of exercises, targeted exercise of students' various types of abilities, reduce homework burden, and further develop students' key abilities.

Keywords

High School Mathematics, Key Competencies in Mathematics, Textbook Exercises, Function

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

普通高中数学课程标准(2022年版修订版)(以下简称“新课标”)中明确指出,习题是教材的重要组成部分。教材习题的编写要有侧重性,难度要有层次性,应该开发一些促进学生数学关键能力发展的问题。其中也提到数学关键能力是数学学科的必备成分,不可或缺,数学关键能力在内涵上实现了知识与能力的统一[1]。以上文件说明国家在习题研究上有足够的关注度,而且研究习题在一定程度上有助于提升学生的数学关键能力。

知识是能力的本源,大多数知识来源于教材和习题当中。要想提升学生的数学关键能力,研究教材和习题是必不可少的。很多学者对此进行了相关研究,特别是在教材习题的研究上。徐伟建、袁永军总结出教材中的习题设置了“综合运用”“拓广探索”这些栏目,若将这些习题合理地进行再设计,能将习题的作用最大化[2]。但在实施过程中遇到这样或那样的问题。张琥对教材习题教学现状分析后指出不少教师让学生购买其他教辅资料,更有甚者抛开教材习题,使得其教学功能无法发挥[3]。杨英杰对以上几位学者的观点进行总结,认为要想解决课外资料成堆,学生负担过重的问题,就应该在教材习题上多花功夫,潜心钻研,使习题的潜力得到充分发掘[4]。喻平则对教材习题进一步剖析表明习题量多少以及难度大小都会影响学生能力及素养水平的发展,在布置习题时要考虑习题类型的比例,还要考虑关键能力不同类型不同水平的比例[5]。因此,进行教材习题的研究刻不容缓。

函数知识是必修第一册主要学习内容,贯穿整个高中的学习,作为高中数学必须课程中的五大主题之一,其地位举足轻重。其中有很多题目与函数知识相关,需要用到函数的方法才能解决,也有很大一部分题目涉及到函数中常用的思想方法,比如在向量、立体几何、圆锥曲线等问题的解决中就有所体现。

基于以上分析,本研究将从关键能力的视角出发,以人教A版教材(2019)第三,四两章节的函数内容的习题为对象,根据朱立明教授的高中生数学关键能力操作性定义表,统计分析出教材中习题考察各关键能力类型及水平等级题目占总量的比例。弄清楚教材函数内容的习题涉及到哪些数学关键能力,能

力水平分布的大致情况。依据习题能力类型及水平的分布进行习题的布置与设计,一方面促进学生对知识的理解和巩固,较好地训练学生的数学学科关键能力,对后续学习几何知识有较大的助推作用;另一方面防止低水平作业过多,进而控制作业的总量,减轻学业负担。

2. 研究设计

高中新课程改革积极倡导“用教材教,而不是教教材”[6]。叶圣陶先生认为即使教材编得再好,想让学生从中受益,关键还是得靠老师通过合理的手段去运用[7]。这就说明教材具有一定的参考价值,要创造性的使用教材,不能“唯教材论”。教材中的习题也不能全盘接受,选择习题要有合理性。研究教材习题中关键能力的体现以及习题的题型,不论是借鉴或修改都具有重要意义,且可以帮助教师进行习题的设计与布置,减少过量的基础作业,减轻学生学业负担。

2.1. 研究对象

考虑到地域因素,文章以2019年国家教材委员会专家委员会审核通过的人民教育出版社A版的高中数学必修第一册第三,四两章“函数”部分的习题作为研究对象,其中习题包括“练习”“习题”“复习参考题”三个部分的所有题目。习题数量按照阿拉伯数字进行计算。

2.2. 评价框架和指标体系的确定

本研究将要弄清楚的问题是数学关键能力在教材习题中的具体体现,由于各个数学关键能力测评的维度以及水平等级的划分不一致,就需要一套评价体系,本研究依据朱立明教授的高中生数学关键能力操作性定义表[8],以此为基础,结合单个数学关键能力的评价框架与函数相关内容,对具体操作指标一栏的内容进行相关的调整。具体内容如表1所示。

Table 1. Operational definition table of key competencies in mathematical functions for high school students

表 1. 高中生数学函数关键能力操作性定义表

一级 维度	数学观察		数学思考		数学表达
二级 维度	数学抽象能力	直观想象与化归能力	数学猜想与论证能力	数学运算能力	数学建模能力
具体 操作 指标	<p>1. 在日常生活中形成函数概念,并借助特例进行解释,发现生活中存在的函数问题。</p> <p>2. 在生活中能找到函数相关的现象,理解并能解释与函数之间的联系,并能用数学语言表达。</p>	<p>1. 能够一定的情境下,抽象出函数图像,体会函数图像与实际问题之间的关系。</p> <p>2. 能够发现函数图像之间的关系,问题情境中数据与图像之间的关系,并能用相关数据来解释图像的走势和含义。发现函数图像中隐藏的数学规律。并能解决相关函数问题,能用图像进行交流探讨问题。</p>	<p>1. 能根据常用的数学思想方法发现事物之间的数量关系。</p> <p>2. 根据已有的认知基础,对事物做出假设猜想,对做出的猜想进行简单验证,验证猜想的正确性。</p>	<p>1. 能了解函数基本的运算法则,相关知识的概念性质,了解函数与其他知识之间的基本关系。会一些简单的求解。</p> <p>2. 对于与函数相关的运算问题,能对函数题目进行分析与思考,从而判断出可以运用哪些定义或者法则,运用最佳的方法进行运算。</p>	<p>1. 能在简单情境中识别出函数模型,了解数学模型中基本的参数,知道数学建模相关流程。能对函数问题加以描述,并模仿学过的数学建模过程解决具体问题。</p> <p>2. 能从数学角度分析问题,在具体情境中建立符合情理的数量或图形关系,能够用模型的思想说明问题,形成简单的报告说明研究结果。</p>

Continued

3.能理解相关抽象的数学命题,并用语言进行描述,能从函数角度解释现实世界的现象与规律。	3.能对复杂的函数问题进行化归,形成直观模型,能用直观想象探讨函数问题的本质。	3.能合理分析给出的相关条件与函数基本性质,利用最佳的解决方法来进行演绎证明。	3.能将函数运算问题进行综合,形成一套自己的解题思路,掌握运算的通性通法,能按照自己解题思路解释函数问题。	3.能运用数学语言清楚地表达解决问题的过程与结果,将过程中所用到的相关知识及结果进行合理的解释,对得出的函数模型进行检验,结合实际情况,对模型做出合理的评价,最终以论文的形式进行论述。
---	---	---	---	--

2.2.1. 习题关键能力划分

厘清数学关键能力的维度划分,是给出数学关键能力操作性定义的前提条件。《新课标》在函数章节内容的学业要求中没有明确提到数据分析与预测这一关键能力,且函数内容与数据分析与预测能力的相关性不大。因此将从数学抽象能力、直观想象与划归能力、数学猜想与论证能力、数学运算能力、数据建模能力这五大能力来进行维度及水平等级的划分。

2.2.2. 关键能力类型划分

数学关键能力并非独立存在的,每种能力之间都有一定的联系。一道习题考察的不只是某一种能力,每一道题应当有一种或几种作为主要考察的关键能力。例如,高中数学人教A版教材必修第一册第79页的练习第四题:画出反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像求这个函数的定义域 I 以及它的单调性,并且证明你的结论。

此题考察学生的作图能力,发展学生的直观想象与划归能力。通过观察图像,先假设猜想函数具有某种性质,再经过一系列的推理验证,证明猜想的正确性,这是研究函数性质一种常用的方法。在推理过程中也锻炼了学生的数学猜想与论证能力。

2.2.3. 关键能力水平等级划分

水平等级划分也同样是教材习题研究的重要构成部分,喻平教授利用数学知识学习的三种形态结合布鲁姆和PISA两种模型[9],形成了数学核心素养的三种水平。随后指出学科关键能力是学习者将客观知识转化为个体知识来形成学科关键能力,根据已有的数学知识学习的三种形态,分别对应生成学科关键能力的一级水平、二级水平、三级水平[10]。以下对各级水平做了简单举例。

例如,学习了函数定义域之后,给出一个简单函数,计算出它的定义域,则为关键能力一级水平。

一般情况下,是给定一个情景,根据给出的条件来求出函数解析式,这是知识理解的水平(学科关键能力一级水平)。关键能力二级水平是给定函数解析式,让学生构建与解析式相关的问题情境,学生能将知识迁移到不同的情境当中。

数学课上举例弹簧的长度与拉力问题,让学生通过描点画出弹簧伸长的长度随拉力变化的图像,通过观察图像写出符合变化现象的函数解析式。首先该题不仅仅涉及到的是数学知识,还有物理中的拉力的相关知识,学生不仅要理解掌握函数知识,还要了解并灵活运用拉力的计算公式 $F = kx + b$ 。其次将物理问题转化成数学问题,锻炼学生的科学思维。所以归为关键能力水平三。

3. 编码方法及数据结果及分析

3.1. 编码方法

为了后续便于统计分析,数学抽象,数学猜想与论证,直观想象与划归,数学运算,数学建模这五大关键能力分别对应用字母A、B、C、D、E来表示;水平等级用阿拉伯字母1、2、3分别表示水平一、水平二、水平三。比如数学运算能力一级水平可以用D1来表示。数学关键能力在教材习题上的表现主

要从能力类型和水平等级两个方面来统计。

能力类型方面, 统计习题中考查某个关键能力的习题个数, 除以教材函数习题的总数, 得到教材考查某一关键能力的习题数量百分比。在能力水平上, 分别统计处于各个能力水平一、水平二、水平三的“函数”习题个数。除以教材的习题总数, 得到教材在各关键能力上达到水平一、水平二、水平三的习题数量百分比。如表 2 所示。

Table 2. Partial data table for function exercises on key abilities and levels

表 2. 函数习题在关键能力及水平上的部分数据表

习题	A	B	C	D	E
1	1			1	
2	1		1	1	
3	2				
4	2				
5	1			1	
6				1	
7	2	1			
8	1		1		
9			1		
10	2		1		

3.2. 关键能力类型统计结果

从数量上来说, 函数习题一共有 186 道题, 在 ABCDE 能力类型的数量上分别是 69、66、54、91、70, 且各自对应的数量比为 37%、35%、29%、49%、38%。如表 3 所示。

Table 3. Statistics table of the number of questions (quantity ratio) of function exercises in each key ability type

表 3. 函数习题在各关键能力类型上的题目个数(数量比)统计表

数学抽象(A)	论证与猜想(B)	直观想象与划归(C)	数学运算(D)	数学建模(E)	题目数量
69 (37%)	66 (35%)	54 (29%)	91 (49%)	70 (38%)	186

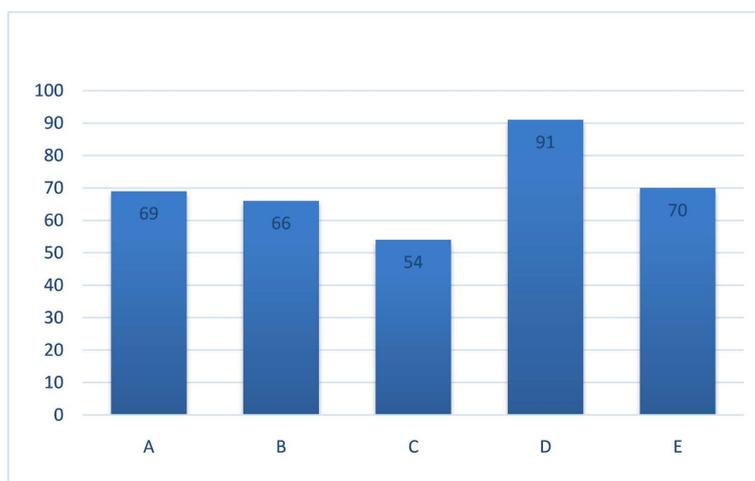


Figure 1. Statistical chart of the number of function exercises on each key ability type

图 1. 函数习题在各关键能力类型上的数量比统计图

各关键能力类型数量比较结果为：数学运算能力 > 数学建模能力 > 数学抽象能力 > 数学猜想与论证能力 > 直观想象与划归能力，其中考察数学运算能力的题目最多，91 个题目中都考察到了，考察直观想象与划归能力的题目最少，有 54 道题目。为了更加直观，根据以上的数据做了以下的统计图，如图 1 所示。

3.3. 关键能力水平的习题数量及百分比统计结果

各关键能力水平等级考察情况如表 4 所示。

Table 4. Number and percentage of exercises at each level of key competencies (%)

表 4. 各关键能力水平上的习题数量及百分比(%)

能力类型	数学抽象			数学猜想与论证			直观想象与划归			数学运算			数学建模		
	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3	E1	E2	E3
数量	52	17	0	56	10	0	47	7	0	71	20	0	65	5	0
百分比	28	9	0	30	5	0	25	4	0	38	11	0	35	3	0

五个关键能力水平上考察多数都达到水平一，水平二占少数，达到水平三的习题为 0，如图 2 所示。

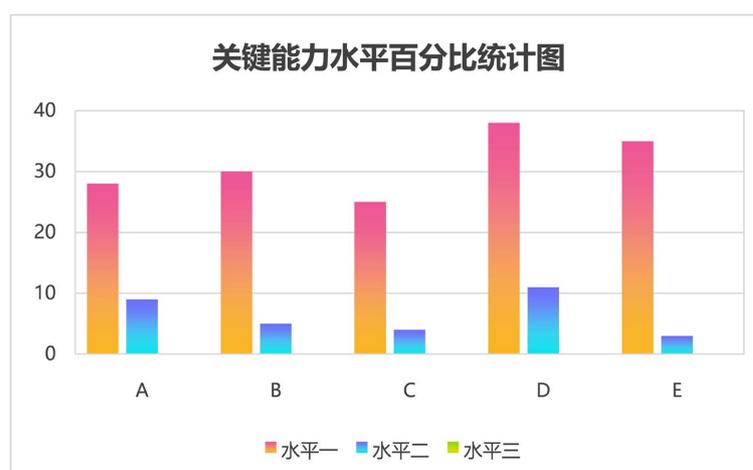


Figure 2. Percentage chart of key ability level of exercises

图 2. 习题关键能力水平百分比统计图

4. 研究结论及启示

4.1. 结论

4.1.1. 习题在能力类型上的分布

观察表 2 和图 1，“函数”内容习题在各能力类型上分布相对较适中。由于问题解决基本上都涉及到运算，教材“函数”习题在数学运算能力上所占的百分比最高，高达到 49%。其中，在数学猜想与论证能力、数学抽象能力、数学建模能力和直观想象与划归能力相对适中，分别达到了 35%、37%、38%、29%。从总体上看，除了数据分析与预处理能力，其他各能力都基本上在教材习题中得到了体现，这与《课标》中函数内容的学业要求基本相符。

4.1.2. 习题在能力水平上的分布

根据表 3 和图 2 可知，教材函数内容习题考察各能力水平一、二居多，没有习题考察关键能力水平

达到水平三。从“学业水平考试与高考命题建议”中了解到水平等级跟学业要求挂钩。水平一是高中生毕业要达到的要求,也可以作为水平考试的参考。水平二可作为高考的要求,同时也是编制高考试题的依据。而水平三是综合了必修、选择性必修和选修的一些内容[1],此时对于学生来说,难度较大。

4.2. 启示

4.2.1. 迎合教材特点,设计习题要有侧重性

人教A版教材在函数内容部分,数学运算能力的占比最高,在此能力上达到水平一的占比也是最高的,说明该教材很重视学生数学运算能力的发展,其他能力类型之间相差不大,依次是数学建模能力(38%)、数学抽象能力(37%)、数学猜想与论证能力(35%)、直观想象与划归能力(29%),大致上可以根据各能力占比来进行习题设计,能很大程度上锻炼学生的各项数学关键能力。

4.2.2. 划分水平等级,体现习题目标的适切性

习题水平等级划分有利于激活不同层次的学生对数学学习的兴趣和发展。水平一是高中毕业要达到的要求,水平二是高考的要求,为学生提供不同水平等级的习题,一方面考虑到学生学情及群体差异性,另一方面达到了习题难度要求有层次性的标准,较好地体现出习题的适切性。

基金项目

黄冈市教育科学规划2022年度课题(2022GB38)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] 徐伟建, 袁永军. 浅谈数学教材中例习题的再设计[J]. 教学与管理, 2012(19): 68-71.
- [3] 张琥. 新课标高中数学教材习题教学现状分析与建议[J]. 数学教育学报, 2012, 21(4): 60-63.
- [4] 杨英杰. 谈谈初中数学教材习题的挖掘与利用[J]. 中学数学教学, 2000(1): 27-28.
- [5] 喻平. 关键能力指向的数学作业设计[J]. 数学通报, 2022, 61(5): 1-7+12.
- [6] 卓斌. 例谈改编高中数学教材例习题的常用方法[J]. 数学通报, 2011, 50(2): 16-19.
- [7] 吴立宝, 王富英. 数学教材习题“七功能”[J]. 教学与管理, 2014(31): 66-68.
- [8] 朱立明. 高中生数学关键能力: 价值、特质与操作性定义[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2021, 22(2): 49-54. <https://doi.org/10.16826/j.cnki.1009-7228.2021.02.011>
- [9] 喻平. 数学核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 19-23+59.
- [10] 喻平. 学科关键能力的生成与评价[J]. 教育学报, 2018, 14(2): 34-40. <https://doi.org/10.14082/j.cnki.1673-1298.2018.02.006>