Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(3), 431-438
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.113071

Hans汉斯

阿波罗尼斯圆定理、性质及应用探究

方　澍[1]，骆晨丹[1]，胡　凯[1]，叶雨璇[2]

[1]绍兴文理学院数理信息学院，浙江　绍兴
[2]绍兴文理学院土木工程学院，浙江　绍兴

收稿日期：2023年1月30日；录用日期：2023年3月6日；发布日期：2023年3月14日

摘　要

圆在高中数学题型中广泛且内容应用灵活，而阿波罗尼斯圆作为一种特殊的圆时常伴随着解三角形、平面向量、立体几何及解析几何等内容出现，将原有常规解复杂的问题进行简化。为避免思维固化、计算繁琐等问题，本文提供了构造阿波罗尼斯圆的两个条件及阿波罗尼斯圆相关性质，提供新型解题思路，使得解题高效化、便捷化、灵巧化。再从不同的应用层次出发，随着层次的递增，学生对性质掌握的要求也就越高，本文设置相关题目逐级加深对性质的理解，便于学生对应不同的层次进行掌握学习。

关键词

阿波罗尼斯圆，性质，动点轨迹，反演点

Apollonius Circle Theorem, Properties and Applications

Shu Fang[1], Chendan Luo[1], Kai Hu[1], Yuxuan Ye[2]

[1]School of Mathematical Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang
[2]School of Civil Engineering, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: Jan. 30th, 2023; accepted: Mar. 6th, 2023; published: Mar. 14th, 2023

Abstract

Circles are widely used in high school mathematics problem types and flexible content, while Apollonian circles, as a special circle, often appear with solving triangles, plane vectors, solid geometry and analytic geometry, simplifying the original conventional solution of complex problems. In order to avoid problems such as solidification of thinking and cumbersome calculation, this paper provides two conditions for constructing Apollonius circles and the related properties of Apollonius circles, and provides new problem-solving ideas, which makes problem solving efficient, convenient and dexterous. Starting from different application levels, with the increase of levels, the higher the requirements of students for mastering nature, this paper sets up related topics to deepen the under-

文章引用: 方澍, 骆晨丹, 胡凯, 叶雨璇. 阿波罗尼斯圆定理、性质及应用探究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(3): 431-438.
DOI: 10.12677/ces.2023.113071

standing of nature step by step, so that students can master and learn according to different levels.

Keywords

Apollonius Circle, Quality, Moving Point Trajectory, Inversion Point

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

高中数学在整个高中学习中是重要学科之一，在新课标的持续改革之下，学生不仅要掌握书本的基础理论知识，更重要的还是培养核心素养，强化自身数学思维，学生要敢于思考、勇于创新，发展和进步数学综合能力[1]。高考数学作为选拔人才的重要手段，是一项考查基础知识和能力的工具。数学解题具有通解与巧解之分：通解更具有知识的体系性，对问题具有更广阔的拓展空间，而巧解偏向解题的创造性，有时候比通解更加高效。兼顾通解和巧解，学生的数学素养才得以更好地发展。解三角形、平面向量、立体几何及解析几何等题目常出现在数学试题中，学生使用通解经常会遇到计算复杂、思路不清、运用不精等一系列问题。本文探究的阿波罗尼斯圆在一定程度上巧解，将复杂问题简单化，对阿波罗尼斯圆的性质特征探究有助于深入对圆的应用，可有效解决相关圆类问题。

2. 阿波罗尼斯的定义、建立及性质

2.1. 定义

古希腊数学家阿波罗尼斯(Apollonian)于公元前 3 世纪研究了众多圆锥曲线及平面轨迹问题，写下了《圆锥曲线论》与《平面轨迹》等巨著。其中，《平面轨迹》一书记载了如下著名结论：到平面上两定点 A、B 距离之比等于定值的动点轨迹为直线或圆(定值为 1 时是直线，定值不为 1 时是圆)。

证明如下：

设平面上定点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，动点 $P(x,y)$，且满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=k\ \ (k>0)$，即 $|PA|=k|PB|$。

由距离公式得

$$|PA|=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}$$

$$|PB|=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}$$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

则

$$\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}=k\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}$$

左右两边平方得

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2=k^2\left[(x_2-x)^2+(y_2-y)^2\right]$$

1) 当 $k=1$ 时展开整理得到

$$2(y_2-y_1)y+2(x_2-x_1)x+y_1^2-y_2^2+x_1^2-x_2^2=0$$

故 $k=1$ 时，动点 P 轨迹为直线。

2) 当 $k\neq 1$ 时，展开整理后，两边同除 $(1-k^2)$，配方得

$$\left(x+\frac{k^2x_2-x_1}{1-k^2}\right)^2+\left(y+\frac{k^2y_2-y_1}{1-k^2}\right)^2=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]$$

上述式子为圆的标准方程，且以 $\left(\frac{k^2x_2-x_1}{k^2-1},\frac{k^2y_2-y_1}{k^2-1}\right)$ 为圆心，$\left|\frac{k}{1-k^2}\right|\cdot|AB|$ 为半径 r 的圆，故当 $k\neq 1$ 时，动点 P 轨迹为圆。为了纪念阿波罗尼斯的伟大发现，该圆被后人成为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆。

2.2. 建立阿波罗尼斯圆

通常情况来讲，在特定题型下相比较运用较为复杂的代数运算来计算出答案，阿波罗尼斯圆可以较简洁的解出题目，加快解题的速度。那么该如何构造阿波罗尼斯圆呢？

首先，从定义角度出发，当在解题过程中，看到平面上一点 P 到 A、B 两定点距离之比为定值或 $\frac{|PA|}{|PB|}=k$ ($k>0$，$k\neq 1$)时，便可以尝试构造阿波罗尼斯圆，拓宽解题思路。

阿波罗尼斯圆往往具有隐秘性，通过查阅相关文献、资料[2]，得到了除定义的以外的构造条件：

如图 1，圆 O 是以 A、B 两点为定点，$\frac{|PA|}{|PB|}=k$ ($k>0$，$k\neq 1$)的阿波罗尼斯圆的充要条件为：P 是以 CD 为直径的圆 O 上的任意一点，则直线 CD 上的两点 A、B 满足 $\frac{|AO|}{|PO|}=\frac{|PO|}{|BO|}=k$ ($k>0$，$k\neq 1$)。

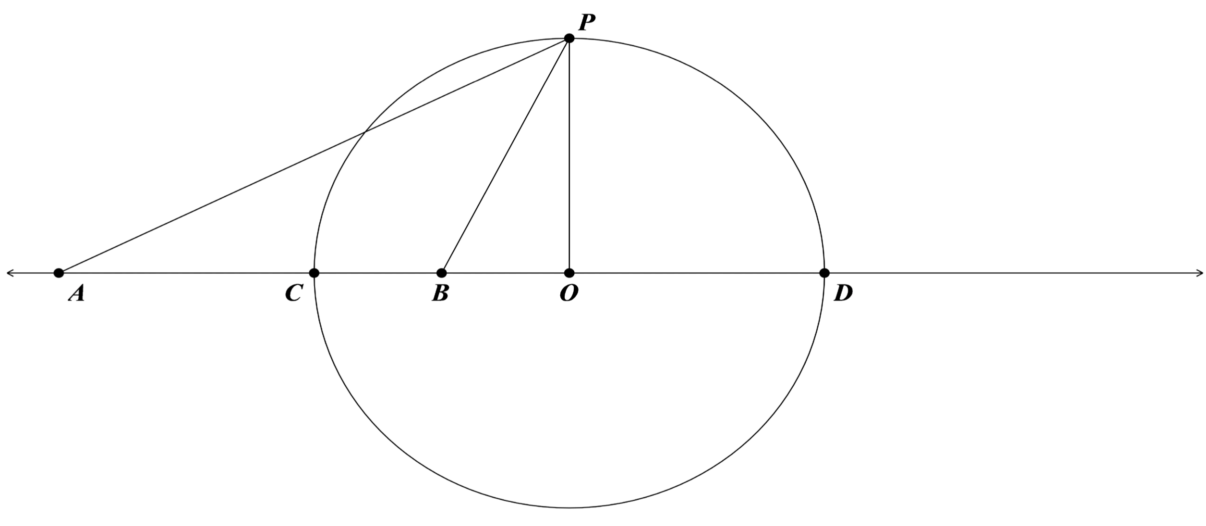

Figure 1. Apollonius circle
图 1. 阿波罗尼斯圆

证明如下：

充分性：因为 $\frac{|AO|}{|PO|}=\frac{|PO|}{|BO|}=k$ ($k>0$，$k\neq 1$)，所以 $\Delta AOP\sim\Delta POB$，因此 $\frac{|PA|}{|PB|}=k$ ($k>0$，$k\neq 1$)，

DOI: 10.12677/ces.2023.113071

故圆 O 为阿波罗尼斯圆。

必要性：因为 $\frac{|PA|}{|PB|}=k\ (k>0，k\neq 1)$，由几何得

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|CA|}{|CB|}=\frac{|OA|-|OC|}{|OC|-|OB|}=\frac{|OA|-|OP|}{|OP|-|OB|}=k\ (k>0，k\neq 1)$$

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|DA|}{|DB|}=\frac{|OA|+|OD|}{|OD|+|OB|}=\frac{|OA|+|OP|}{|OP|+|OB|}=k\ (k>0，k\neq 1)$$

上述两式联立可得

$$\frac{|AO|}{|PO|}=\frac{|PO|}{|BO|}=k$$

2.3. 阿波罗尼斯圆性质

阿波罗尼斯圆是一种特殊的几何模型，在高中数学的学习过程中十分常见，该圆的性质在解题过程中也十分常用，熟练掌握并灵活运用相关性质可以使解题更为简便，极大提高解题效率。通过查阅相关文献、资料[3] [4] [5]，以下总结了六条常用性质。

性质一：$\frac{|AO|}{r}=\frac{r}{|BO|}=k$，$r^2=|AO|\cdot|BO|$，且 k 越大，相应的阿波罗尼斯圆越小。

性质二：阿波罗尼斯圆半径 $r=\left|\frac{k}{1-k^2}\right|\cdot|AB|$，圆面积 $S=\pi\frac{k^2}{\left(1-k^2\right)^2}\cdot|AB|^2$。

性质三：当 $k>1$，点 A 位于圆 O 外，点 B 位于圆 O 内；当 $0<k<1$，点 A 位于圆 O 内，点 B 位于圆 O 外。

性质四：$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}=k$，$AC=\frac{k}{k+1}|AB|$，$CB=\frac{1}{k+1}|AB|$，$AD=\frac{k}{k-1}|AB|$，$BD=\frac{1}{k-1}|AB|$。

性质五：如图 2，过点 A 作圆 O 的切线 AH (H 为切点)，则 CH、DH 分别为 $\angle AHB$ 的内、外角平分线。

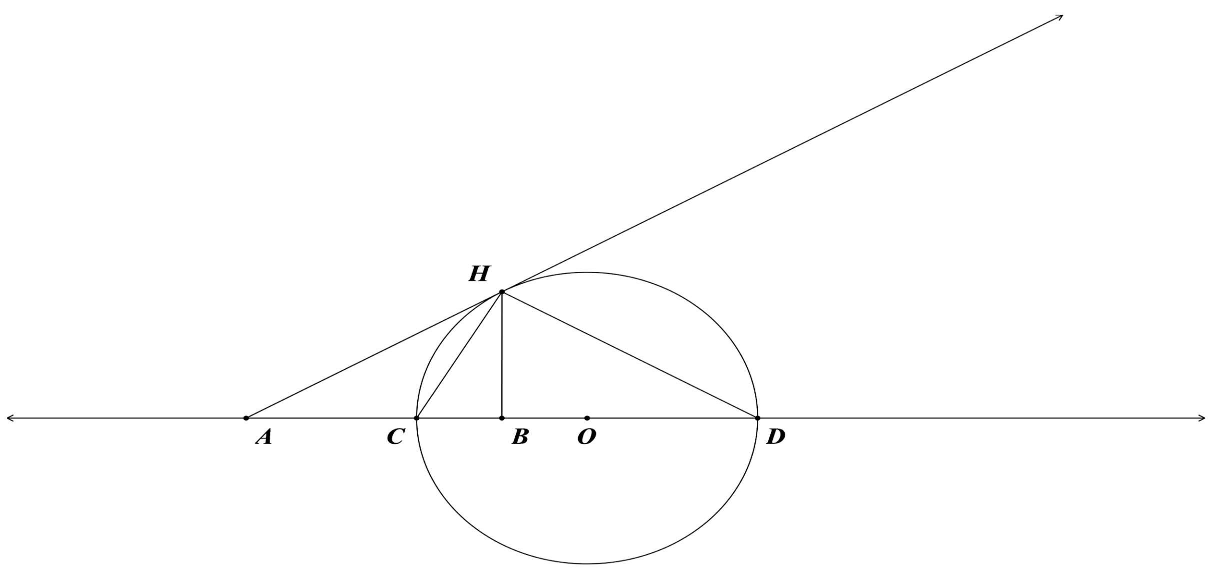

Figure 2. The passing point A is the tangent AH diagram of the circle O

图 2. 过点 A 作圆 O 的切线 AH 图

性质六：如图 3，过点 B 作圆 O 不重合于垂直 AB 的弦 MN (即不重合于 EF 的弦 MN)，则 AB 平分 $\angle MAN$ 。

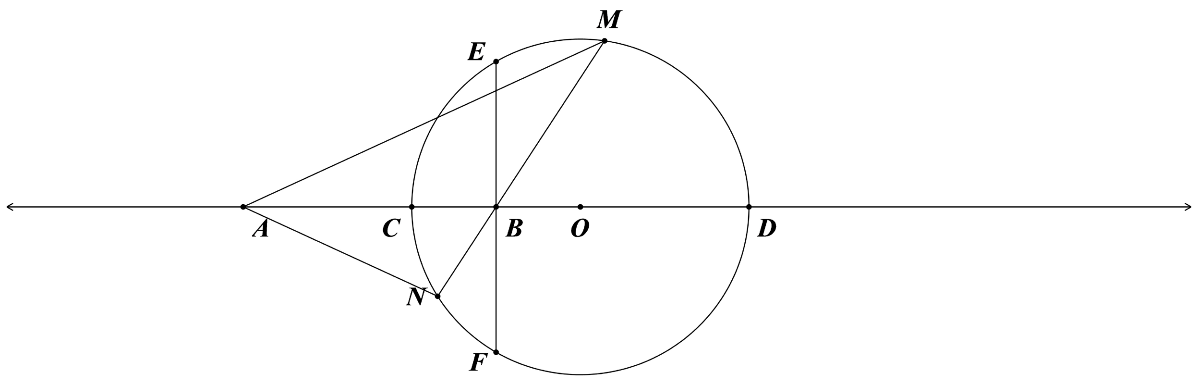

Figure 3. The passing point B is a chord MN diagram where the circle O does not coincide with the vertical AB

图 3. 过点 B 作圆 O 不重合于垂直 AB 的弦 MN 图

3. 阿波罗尼斯圆不同层次的应用

3.1. 第一层次应用——正向运用

阿波罗尼斯圆的正用，通过已经题目条件在已知两定点的情况下，相应线段具有一定的数量关系，或满足构建阿波罗尼斯圆的充分必要条件，从而作出阿波罗尼斯圆。认真审题，问题的题干如果出现了一个动点到两定点的距离之比为常数，两向量之间具有倍数关系，解析几何及立体几何中出现了两线段长关系倍数等情况时，尝试联想阿波罗尼斯圆，数形结合，可以直观明了的解出答案。

为更简洁阐述如何应用阿波罗尼斯圆及使用阿波罗尼斯的便利性，以如下两题为例：

例 1. 在江苏高考试题中出现：满足条件 $AB=2$， $AC=\sqrt{2}BC$ 的 ΔABC 面积最大值为。

解题如下：

常规解法：解三角形思路。 $BC=x$，则 $AC=\sqrt{2}x$，有余弦定理得 $\cos C=\dfrac{3x^2-4}{2\sqrt{2}x^2}$， 由面积公式 $S=\dfrac{\sqrt{2}x^2}{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{3x^2-4}{2\sqrt{2}x^2}\right)^2}$，令 $t=x^2$，故 $S=\dfrac{\sqrt{-(t-12)^2+128}}{4}$，由三角形三边关系得约束条件 $\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\x+2>\sqrt{2}x\end{cases}$，解得 $2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$， 即 $12-8\sqrt{2}<t<12+8\sqrt{2}$， 故当 $t=12$ 即 $x=2\sqrt{3}$ 时， $S=2\sqrt{2}$ 取值最大。

巧用阿波罗尼斯圆解法：根据阿波罗尼斯圆性质，得到 $r=\left|\dfrac{k}{1-k^2}\right||AB|=2\sqrt{2}$， 故 $S_{\max}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot h_{\max}=h_{\max}=r=2\sqrt{2}$ 。利用阿波罗尼斯圆就可以将一个繁琐的问题进行简化，做到了巧解、快解。

例 2. 在宁波市模拟试题中：已知向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$， 满足 $|\boldsymbol{b}|=3$， $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$， 若 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\ge 3$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为。

解题如下：

常规解法：向量的数量积思路。由向量三角不等式得 $\left||\boldsymbol{a}|-3\right|\le\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}\right|\le\left||\boldsymbol{a}|+3\right|$， 解得 $2\le|\boldsymbol{a}|\le 6$， 由 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ 可得 $\boldsymbol{a}^2=4\left(9-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2\right)$， 故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{8}\boldsymbol{a}^2+\dfrac{9}{2}$， 而要使得 $|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|\ge 3$ 恒成立，要即

$a^2+2\lambda a\cdot b+9\lambda^2\ge 9$ 恒成立。于是令 $t=a^2$，$f(t)=t+2\lambda\left(\frac{3}{8}t+\frac{9}{2}\right)+9\lambda^2-9=\left(1+\frac{3\lambda}{4}\right)t+9\lambda^2+9\lambda-9$，只要使 $f(t)\ge 0$ 在 $t\in[4,36]$ 恒成立。故 $\begin{cases} f(4)\ge 0 \\ f(36)\ge 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 9\lambda^2+12\lambda-5\ge 0 \\ \lambda^2+4\lambda+3\ge 0 \end{cases}$，解得 $\lambda\le -3$ 或 $\lambda\ge\frac{1}{3}$。

巧用阿波罗尼斯圆解法：构建阿波罗尼斯圆。设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$，$-\lambda\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OP}$，故由题目条件 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$，可得 $|\boldsymbol{OA}|=2|\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA}|=2|\boldsymbol{AB}|$，由阿波罗尼斯圆定义，点 A 的动点轨迹是为以 CD 为直径的圆，且半径 $r=2$，同时易得 $CB=1$，$OC=2$，$BD=3$。$|\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-(-\lambda\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{OA}-\boldsymbol{OP}|=|\boldsymbol{AP}|\ge 3$。如图 4，在直线 OB 上的 C 点左侧取点 P_1，D 点右侧取点 P_2，且使得 $|\boldsymbol{P_1C}|=3$，$|\boldsymbol{P_2D}|=3$。故点 P 在直线 OB 上，其轨迹是以 P_1 为端点的射线或以 P_2 为端点的射线。故解得 $\lambda\le -3$ 或 $\lambda\ge\frac{1}{3}$。

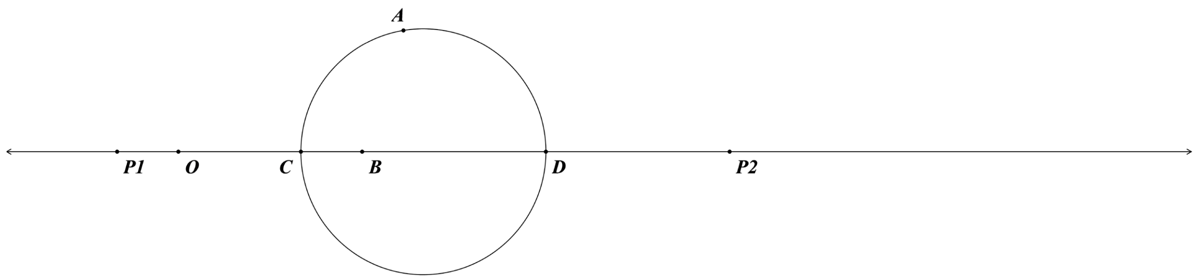

Figure 4. Clever use of the Apollonian circle solution diagram
图 4. 巧用阿波罗尼斯圆解法图

当碰到这类题时，第一时间本能会想到去使用学习过的三角形面积公式、函数思想及平面向量的数量积等通解的方法去解答，但是会发觉通解会使得运算相当复杂甚至会觉得困难，庞大的计算量会使答题者失去信心，进而放弃答题。而若熟练构造或掌握阿波罗尼斯圆及其性质来解答这些题，便相较于常规思路的计算冗长繁琐更为简便高效。

3.2. 第二层次应用——逆向运用

阿波罗尼斯圆的逆用，如果动点的轨迹已经确定且为圆，题目中已知一个反演点(即其中一个定点)的坐标，根据阿波罗尼斯圆的定理及性质，利用解析法可以解决求出另一个反演点的坐标和两反演点到动点的距离比值等问题，这是阿波罗尼斯圆应用的第二个层次。以如下两题为例：

例 3. 已知圆 $O:x^2+y^2=1$，点 $A(-2,0)$，若定点 $B(b,0)$ $(b\ne -2)$ 和常数 λ 满足：对圆 O 上任意一点 M，都有 $|MB|=\lambda|MA|$，则 $b=$，$\lambda=$。

解题如下：

由上述性质一 $r^2=|AO|\cdot|BO|$，即 $1=2*(-b)$，得 $b=-\frac{1}{2}$。由性质二或性质四可得 $\lambda=\frac{1}{2}$。

例 4. 已知圆 $O:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，定点 $A(0,0)$，$B(2,0)$，其中 P 为圆 O 上的动点，则 $\sqrt{2}PA+PB$ 的最小值为。

解题如下：

由点 A、B 均在圆 O 外，故连接 OB，在线段 OB 上找一点为 M，且 $|OB|\cdot|OM|=r^2$，$|OB|=\sqrt{2}$，故 $|OM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得到 $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$，且由性质易得 $|PB|=\sqrt{2}|PM|$。由三角不等式得到

$\sqrt{2}PA+PB=\sqrt{2}(PA+PM)\ge\sqrt{2}|AM|=\sqrt{5}$。

例 4 类题型阿波罗尼斯圆逆用常用总结如下：

已知圆：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上任意点 P 和坐标轴上任意两定点 A、B，求 $mPA \pm PB$ 或 $PA \pm mPB$ 的最值。

情况 1：当 A、B 都在圆外时，将其中一个点利用阿波罗尼斯圆性质转化到圆内，再使用三角形三边关系求解。

情况 2：当 A、B 都在圆内时，将其中一个点利用阿波罗尼斯圆性质转化到圆外，再使用三角形三边关系求解。

情况 3：当 A、B 分别在圆内、圆外时，且无法直接求得最值，可以同时用阿波罗尼斯圆性质将两个点同时转化，再使用三角形三边关系求解。

3.3. 第三层次应用——综合运用

如果对阿波罗尼斯圆进一步研究，通过解析法和几何性质得出隐藏条件，以此构建出阿波罗尼斯圆，不仅能快速解决一些试题，还能有效培养学生的数学抽象和逻辑推理的核心素养。以下题为例：

例 5. 在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，F 是正方形 DCC_1D_1 内的动点，且满足 $\angle AFD=\angle EFC$，则三棱锥 $F-BCD$ 的体积的最大值为。

解题如下：

如图 5，在 $Rt\Delta ADF$ 和 $Rt\Delta ECF$ 中，由点 F 满足 $\angle AFD=\angle EFC$，得 $\Delta ADF\sim\Delta ECF$，因为 $EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$，故 $DF=2CF$，即点 F 的轨迹为圆。设圆心为 O，由上述性质一得 $\frac{|DC+OC|}{|OF|}=\frac{|OD|}{|OF|}=\frac{|OF|}{|OC|}=2$，解得 $|OC|=2$，$|OF|=4$，在圆 O 和 CC_1 交点作 N，由几何易得 $CN=2\sqrt{3}$。假设点 F 到棱 CD (即底面 $ABCD$)上的高为 h，则 $V_{F-BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot h\le\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot CN=12\sqrt{3}$。

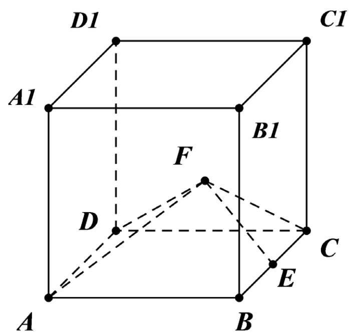

Figure 5. Schematic sketch
图 5. 示意草图

4. 结语

“以学生为主体，教师为主导”是教师教育的基本理念，在学生反映在解三角形、平面向量、立体几何及解析几何等题型中碰到计算繁琐复杂或毫无头绪进行求解的情况下，如何解决上述问题成了教师提高教学质量的方向，而阿波罗尼斯圆在一些情况下就可以使上述繁琐的问题得到极大的简化。本文对阿波罗尼斯圆的定义、构造方法、相关性质以及其在高考中的重要性进行简单的介绍。在学生学习的基础上，提出三个不同层次的要求：正向运用、逆向运用以及综合运用，通过一些对应层次的教学题目，帮助学生理解以及思考，随着层次的递增，对应的要求也逐级升高，便于学生实现不同思维水平之间的

过渡以及提高，有利于培养学生对几何思维水平以及思考能力，一定程度上解决了学生在解三角形、平面向量、立体几何及解析几何等题型求解困难时的困扰。

致　谢

最后，感谢学校教师提供的悉心指导和积极帮助，同时也对参考文献中的思想和方法的所有者表示最真挚的谢意。

参考文献

[1] 秦俊红. 高中数学教学中培养学生核心素养的策略[J]. 知识文库, 2022(10): 142-144.

[2] 魏东升. 阿波罗尼斯圆的一个几何结论及应用[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2021(13): 37-39.

[3] 马进才, 雷红涛. 阿波罗尼斯圆性质及其应用[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2017(23): 12-14.

[4] 翟丽. 阿波罗尼斯圆的拓展及其教学价值[J]. 高中数学教与学, 2019(22): 13-15.

[5] 李欣荣. 关于阿波罗尼斯圆的解读与应用探究[J]. 中学数学, 2022(3): 68-69.