

# 基于高中数学“三角函数”新旧教材的多维对比分析

梅方莹, 张金竹, 孙幸荣

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年4月12日; 录用日期: 2023年6月20日; 发布日期: 2023年6月30日

## 摘要

教育改革和素质教育推进的目的是为了提高教育质量和学生综合素质。教材作为教育教学实施的重要工具, 也随着教育改革和素质教育的推进不断更新。本文选取人教版2004年、2019年两版高中数学教材中“三角函数”部分作为研究对象, 主要从教材的结构编排、章节导入、教材内容、例习题、数学史五个维度进行对比。通过分析得出结论: 新教材与旧教材相比, 更加凸显知识间的联系; 新教材更加关注概念、命题形成的科学性和严谨性; 新教材更加注重教学过程的简洁性, 删繁就简, 删去了许多不必要呈现的知识, 也精简了习题; 更加强调对于研究方法的学习。

## 关键词

数学教材, 三角函数, 比较分析

## Comparative Analysis of Trigonometric Functions between Old and New High School Mathematics Textbooks

Fangying Mei, Jinzhu Zhang, Xingrong Sun

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Apr. 12<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jun. 20<sup>th</sup>, 2023; published: Jun. 30<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

The purpose of educational reform and quality education is to improve the quality of education and the overall quality of students. As an important tool for educational implementation, text-

books are also constantly updated with the promotion of educational reform and quality education. This paper selects the “trigonometric functions” section of the 2004 and 2019 editions of the People’s Education Press high school mathematics textbooks as the research object, mainly comparing the structure, chapter introduction, content, example exercises, and mathematical history between the two editions. By analyzing the data, it is concluded that the new textbooks highlight the connections between knowledge more than the old textbooks. The new textbooks pay more attention to the scientific and rigorous formation of concepts and propositions. The new textbooks focus on the simplicity of the teaching process, trimming unnecessary knowledge and simplifying exercises. The new textbooks also emphasize the learning of research methods.

## Keywords

Mathematics Textbooks, Trigonometric Functions, Comparative Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题提出

新课程标准把“立德树人、提升学科素养”作为教学的根本任务，2019年新版高中数学教材发行，多地中学正式推进新课标、新教材、新理念、新目标，新版教材是新课程标准教育理念的实际呈现，通过新版教材与旧版教材的比较，能够让教师更清楚地认识到新版教材与旧版教材的相同之处与不同之处，体会到新版教材改进更新的具体意义。文章以2004年人教A版普通高中课程标准试验数学教科书必修4(以下简称“旧教材”)和2019年人教A版普通高中数学教科书必修一(以下简称“新教材”)为研究对象，对“三角函数”的部分，从结构编排、章前引言、教学内容、例题、数学史等五个维度进行比较分析。新旧教材的三角函数部分各有其优势与特色，对其进行比较研究，可以更好地了解新旧教材在高中数学“三角函数”方面的差异和改进之处，找出学科的发展变化，有利于把握教学方向和调整教学设计。同时，对比分析可以帮助一线教师更好地掌握授课重点和难点，指导教学内容的设计和教学方法的选择，有助于教师更好地选择适合学生的教学方法和内容，并更好地完成教学任务，使教学更加精准和高效。

教材对于教师而言是教学开展中的重要依据，对于学生则是学习的重要材料，因此怎样充分利用教材对教师和学生来说都有着十分关键的意义。2019年由人民教育出版社出版发行的人教A版高中数学教材相较于之前的人教版高中数学教材在各个方面都有所变化。三角函数是学生在高中阶段的学习中首次接触的具有周期性的模型，作为基本初等函数之一占据重要地位；又是学习高等数学的必备基础，为学生继续学习深造做准备。但在教学实践中，众多的公式和抽象的定义使学生学习过程中记忆强度大并且在内容相近的时候很容易混淆，导致教师的教学开展困难、教学内容枯燥；学生难以理解其数学本质，缺乏学习的主动性。所以选择对于新旧版本中三角函数内容部分进行比较研究。

## 2. 新旧教材中“三角函数”内容的比较分析

本章对新旧教材“三角函数”部分从结构编排、章前引言、教材内容、例题、数学史等五个维度展开比较。

## 2.1. 结构编排的比较

本节通过比较新旧教材“三角函数”结构编排顺序的异同，来分析新旧两版教材“三角函数”在具体内容上的差异，如下表 1 所示。

**Table 1.** Comparison of the structure arrangement of trigonometric function between new and old textbooks

**表 1.** 新旧教材“三角函数”结构编排的比较

旧教材		新教材	
第一章三角函数		第五章三角函数	
必修 4	1.1 任意角和弧度制	必修一	5.1 任意角和弧度制
	1.2 任意角的三角函数		5.2 三角函数的概念
	1.3 三角函数的诱导公式		5.3 诱导公式
	1.4 三角函数的图象与性质		5.4 三角函数的图象与性质
	1.5 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象		5.5 三角恒等变换
	1.6 三角函数模型的简单应用		5.6 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$
第三章三角恒等变换		5.7 三角函数的应用	
	3.1 两角和差的正弦、余弦和正切公式		
	3.2 简单的三角恒等变换		

两版教材“三角函数”的章节内容没有什么变化，但在章节编排的顺序上存在着巨大差异。

从内容分布情况可以看出，新教材将整个三角函数内容合并为一个章节。旧教材将“平面向量”作为一章的内容插入在三角函数和三角恒等变换这两个章节之间，在旧教材中三角函数在必修 4 中进行了研究。而在新教材中，三角函数在一系列函数体系中进行了研究，一方面三角函数是函数的一个分支，在学习函数的其他分支后，来介绍三角函数符合学生学习的思维习惯和心理认知发展；另一方面，结合三角函数介绍函数的周期性，这样有利于学生学习理解函数的单调性、奇偶性、周期性等三个函数的基本性质[1]。新教材中在引入三角函数概念时，把有关三角函数线的知识点删除了，同时将旧教材三角恒等变换归到了新教材三角函数图象与性质之后，这样使得三角函数的知识点更加简洁、知识模块连贯清晰，避免了三角函数的图象与性质、平面向量、两角和与差相关知识的穿插学习而造成学生知识的割裂。新教材的这种编排方式更加科学合理，可以帮助学生更好地理解 and 掌握三角函数。

## 2.2. 章前引言的比较

新教材将旧教材的两章合为一章后，总体沿用旧教材风格，但未设计目录，与旧教材的章引言相比较显得十分简练，章导图形式与旧教材一致，结构略小，但显得很干净、直接。具体可参照表 2，导言中引用的案例与旧教材一致，都注重于将数学知识应用到生活中常见的具有周期性的现象中。不同之处在于，旧教材在引用完案例后会用问句“如何用数学的方式描述这些变化规律呢”来引出三角函数，而新教材则直接点明“这些现象都可以用三角函数刻画”[2]，用陈述句来表达更加直接明了，同时也降低了对于学生的语言理解难度，更容易理解。对于数学学困生也是一种帮助，间接的突出课标的基本理念，以学生发展为本，立德树人。新旧教材的章前导言都很好地渗透了数学文化，突出三角函数对于人类生活、社会发展、自然变化的影响与意义，并且解释了三角函数的所蕴含的思想及应用方法，符合课程标准的要求。但新教材在章前导言介绍中的问题多以句号结尾，内容清晰简练并且与其他函数知识联系密切，很好地贯彻函数主线，对于学生知识结构的嫁接也有一定梳理作用。

**Table 2.** A comparison of the introduction before the chapter  
**表 2.** 章前引言的比较

旧教材	新教材
第一章 三角函数	第五章 三角函数
	
必修 4	必修 1
第三章 三角恒等变换	
	

### 2.3. 教材内容的比较

对于新旧教材“三角函数”内容的比较，按照教材的结构编排，以下从弧度制概念引入、任意角三角函数概念、三角公式和定理引入、周期性内容体现等四个方面的差异具体展开分析。

#### 2.3.1. 弧度制概念引入的比较

旧教材直接给出弧度制的定义，以“角度也有不同的度量制”为铺垫，后续设计自主探究让学生探究不同角度所对应的弧度，这样的探究其实更像是弧度制的练习题，而实际上旧教材的设计缺乏让学生

探究的过程。新教材基本保留了原来类比长度、重量的不同制度引入。但后续并没有直接给出弧度制的定义，而是设置问题让学生自主探究发现，圆心角所对的弧长与半径的比值，只与圆心角的大小有关，也就是说这个比值随圆心角的确定而唯一确定[3]，从而更自然地引出弧度制的概念，使学生更容易理解弧度制的产生和定义。这个探究问题的设立实际上是引导学生发现可能存在的角的定义方式，但是关于引入弧度制的必要性学生并没有体会。

### 2.3.2. 任意角三角函数概念的比较

在新旧两版教材中都是将任意角三角函数的定义分为两种，分别是单位圆定义法和终边坐标定义法[4]，两者都是利用直角坐标系中的任意角的终边坐标之间的比值定义的。旧教材利用锐角三角函数的定义引入任意角三角函数，新教材则是引导学生创建数学模型，利用以  $x$  轴正半轴为始边的任意角。来刻画单位圆上任意一点  $P$  的位置(表 3)。

**Table 3.** Comparison of the ways of introducing the concept of arbitrary trigonometric function

**表 3.** 任意角三角函数概念的引入方式的比较

	旧教材	新教材
引入方式	1. 比值与终边上的点的选取无关 2. 给出单位圆的定义 3. 用单位圆上的点表示锐角三角函数 4. 任意角三角函数	1. 建模刻画单位圆上点 $P$ 的位置变化情况 2. 任意角终边与单位圆交点坐标唯一确定 3. 任意角三角函数定义

### 2.3.3. 三角公式和定理引入的比较

诱导公式是三角函数中的重要公式，故以诱导公式为例比较新旧教材公式和定理的引入。

在概念引入上，旧教材在课前探究环节先给学生提出了问题，让其思考角的终边以及它们对应三角函数的关系，随后在同一个图中展示这些角的终边关系，利用数形结合引入诱导公式。但在课堂初始就设置一系列的问题让同学解答并展示出相对复杂的图解，容易给学生带来心理压力。在研究三角函数的对称性时，新旧两版教材同样都是运用圆的对称性，但也有不同之处，如新教材是将问题简化，先探究的关系，再引导学生继续探究其他角之间的关系，将问题逐个提出，这样的设计让学生思维清晰，遵循了学生的认知规律。

在概念深化上，旧教材对于公式三、四等都在“同理，我们有”之后直接展示结论，而新教材在给出这些结论前，会先铺垫提示语以便于学生完成对结论的证明，或是通过探究题和练习的形式让学生证明公式的合理性。另外，在细节的处理上新教材中不再出现“正弦、余弦”的语言，而是更改为“正弦函数、余弦函数”，由此可以看出新教材在定义、符号等方面都更加注重强调数学用语的规范性，以表现出数学的严谨性。

### 2.3.4. 周期性内容体现的比较

在之前的学习过程中，对于函数的基本性质学生已经接触过单调性和奇偶性，对于三角函数已经在初中有了初步的认识；而本章的学习中，学生首次接触了函数的又一基本性质——周期性。在对任意角三角函数的定义和诱导公式的研究中，学生能够感悟到周期性是三角函数区别于其他基本初等函数的最显著特征。

分析得出，新教材比起旧教材对于周期性的渗透更多，贯穿整个章节。从位置上看，章节开始前、教材正文中、探究与发现的课外拓展材料中均有涉及；在内容选取上，对于周期性的渗透不断深入，由简单的生活中的周期现象逐渐累积并提出数学中对于周期中的定义，最后不断渗透周期性的应用。

## 2.4. 例习题的比较

### 2.4.1. 例习题数量比较

对新旧两版教材的例题和习题的数量进行逐一统计，题量统计方式：按小题个数计算题量，针对一道小题有多个问题的情况，则按照一题计数[5]。统计结果如表 4 所示。

**Table 4.** Comparison of the number of exercises between new and old textbooks

**表 4.** 新旧教材例习题数量比较

	旧教材	新教材
例题数量	60	59
习题数量	199	224

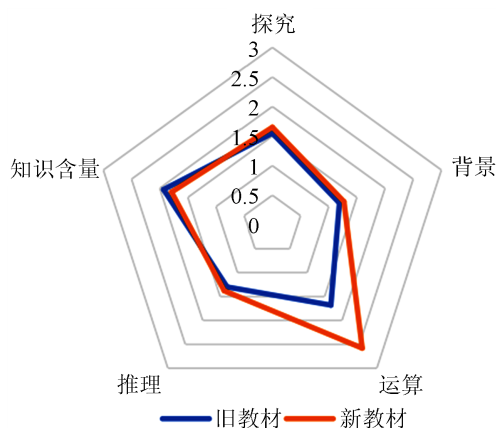
从数量上看，根据表 4 统计结果，两版教材相关例题数量相差不大，但是习题数量有差异。通过进一步分析比较得出，旧教材中部分正弦和余弦的习题及少数机械重复训练的习题在新教材中被删除了，与此同时新教材中增加了正切的相关练习题，主要原因是新教材把旧教材的两大章知识合并在一起，最明显的是减少了“三角恒等变换”的习题占比、增加了“诱导公式”“三角函数图象与性质”的占比，因此也增加了习题整体的丰富程度。

### 2.4.2. 习题难度比较

**Table 5.** The quantitative index of each difficulty factor of trigonometric function exercises in new and old textbooks

**表 5.** 新旧教材三角函数习题各难度因素的量化指标

新旧教材各难度因素的量化指标					
难度因素	等级水平	课后习题量		加权平均	
		旧教材	新教材	旧教材	新教材
探究	识记	113	120		
	理解	63	62	1.55	1.65
	探究	23	42		
背景	无实际背景	182	200		
	个人生活	4	5	1.19	1.27
	公共常识	6	9		
	科学情景	7	10		
运算	无运算	25	13		
	数值运算	108	116	1.68	2.58
	一步符号运算	28	47		
	两步符号运算	38	48		
推理	无推理	165	175		
	一步推理	8	14	1.3	1.38
	两步推理	26	35		
知识含量	1 个知识点	78	92		
	2 个知识点	56	87	1.93	1.79
	3 个知识点	65	45		



**Figure 1.** Comparison of the difficulty of exercises between old and new textbooks  
**图 1.** 新旧教材习题难度比较

从五个难度因素把新旧教材三角函数的习题进行对比,制作雷达图,对图 1 进行分析:整体可以看出,新旧两版教材的习题的运算因素偏重影响,探究、知识含量次之,背景和推理的影响较小,进而体现出三角函数部分的知识注重习题的运算,对背景方面的重视程度较低。由雷达图可以看出新教材的走势将旧教材围住,新教材习题整体难度更大一点,更加突出三角函数题目的特色,高中数学“三角函数”的习题中,计算量较大,需要学生具有较强的计算能力和技巧。整体符合三角函数知识的考察方式,以运算题为主,背景涉及偏少,多偏实用,知识点复杂而多。由表 5 新旧教材中运算的四种分类可以说明新教材不希望学生通过机械运算掌握数学知识,而是掌握数学知识的本质,对数学学习的要求也在无形中变高。总体上,整个章节的习题数量很大,题型也是丰富多样,这种设计不仅能增加题目的灵活性,一定程度上也可以增强学生对各个知识点的适应性。

## 2.5. 数学史的比较

### 2.5.1. 数学史出现的频数比较

数学史是研究数学知识、思想、方法和应用的发展史,对探索数学发展的规律和数学教育有指导作用。本文参考了刘云和朱维宗对数学史内容类型的分析框架,针对新旧教材的三角函数部分,将数学史呈现方式的内容类型分为 7 种:数学术语、数学名题、数学思想与经典方法、数学应用、知识背景、综合专题[6]。为整体把握新旧教材中三角函数部分数学史内容数量情况,对教材中数学史内容进行了统计,并用表格的形式展示,如下表 6。

**Table 6.** Comparison of the frequency of occurrence of mathematics history between new and old textbooks  
**表 6.** 新旧教材三角函数习题各难度因素的量化指标新旧教材数学史出现频数的比较

	旧教材	新教材
数学术语	弧度制发展史的简介	弧度制发展史的简介
数学问题		数学史上三角函数表
数学思想		徐光启《农政全书》
数学应用	计算机与三角函数表	计算机与三角函数表 泰勒公式
背景	周期函数与音乐	周期函数与音乐
综合专题	三角学与天文学	三角学与天文学
频数合计	4	7

### 2.5.2. 数学史出现频数的比较分析

根据上表统计结果, 新旧教材共有四处相同的数学史内容, 新教材新增了三处数学史素材。从内容上, 旧教材关于概念的数学史内容基本上很完善, 例如“最早的弧度制概念”, 因此新教材可以直接保留地继承。对于新增的历史上的数学问题和数学思想, 如“数学史上三角函数表”及“徐光启《农政全书》”两处素材, 通过加深数学史的渗透可以加深学生对数学思想的理解, 让学生了解历代数学家的研究成果和发现, 更好地理解数学的基础理论和概念, 从而更好的应用于实际问题[7]。对于数学应用方面, 在原有的“计算机与三角函数表”基础上加了“泰勒公式”素材, 这样既满足了学生的好奇心, 又恰到好处地帮助学生加深对知识点的理解, 充分发挥了数学史的教育价值。

总体上分析, 新教材在继承发展旧教材的优点后, 更加遵循教与学的规律, 既考虑了教师的教, 又兼顾了学生的学, 进一步满足了师生实际的需求。增加数学史的内容数量, 有助于一线教师运用数学史设计精彩有趣的教学活动, 引导学生深入地理解数学知识, 这极大地提高了数学史的教学效果, 发挥了数学史的教育价值, 落实了立德育人的根本任务。

## 3. 研究结论与建议

通过对新旧版本高中数学三角函数部分比较分析, 得到以下结论, 新教材与旧教材相比有很明显的变化; 从总体的教材编排来看, 新教材展开教学是运用了主题单元的形式, 不再是之前旧教材所采用的模块化的呈现方式。

新教材与旧教材相比, 更加凸显知识间的联系。这样的教学方式对于学生而言, 知识框架结构更加清晰, 前后之间相互有关联, 在符合学生认知规律的同时也让新知识有了固着点, 学生可以直接将其添加在已建立的知识框架上。

新教材更加关注概念、命题形成的科学性和严谨性。以三角函数定义的产生过程为例, 只有旧教材对于这个概念的引入是通过学生初中学习过的锐角三角函数, 实际上学生初中接触的锐角三角函数只是在特殊的直角三角形中边的比值关系, 任意角三角函数的定义本质是利用坐标来定义的。而新教材直接使用单位圆这一工具, 通过设置问题引导学生主动利用角的终边在单位圆上的坐标来定义任意角的三角函数。

总的来说, 新教材相较于旧教材, 在结构编排、章前引言、教材内容、例习题、数学史等方面均有较大的改进。一线教育工作者应及时关注到新教材的变化, 认识到这种变化对于学生学习数学知识的积极影响, 并帮助学生更加有效地学习数学知识。多从学生已有经验出发, 学生的已有经验不仅仅局限于学生已经学习过的知识本身, 学生已有的研究思路、接触过的数学思想方法等都是学生的已有经验。教师在教学过程中, 要重视新知识与学生已有经验的联系, 从学习方法、探究思路、数学思想、知识点本身等多个维度出发, 合理引导学生将新知与旧知之间建立。

## 参考文献

- [1] 张定强, 梁会芳, 杨怡. 数学学科核心素养导向的“三角函数”教材内容变革[J]. 数学通报, 2021, 60(12): 4-7.
- [2] 田丽萍. 高中数学新旧教材比较研究[D]: [硕士学位论文]. 银川: 宁夏大学, 2021.  
<https://doi.org/10.27257/d.cnki.gnxhc.2021.000980>
- [3] 陈静. 高中新旧数学教材“三角函数”内容的比较研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2020.  
<https://doi.org/10.27019/d.cnki.gfjnu.2020.001264>
- [4] 付钰, 张景斌. 中美数学教材三角函数习题的比较研究[J]. 数学教育学报, 2018, 27(3): 14-18.
- [5] 沈威, 曹广福. 高中三角函数教育形态的重构[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6): 14-21+71.
- [6] 朱少卿, 胡典顺, 林丹. 中美两套教材中三角函数的比较研究[J]. 数学通报, 2014, 53(10): 46-50+55.
- [7] 王芝平. 构建三角函数刻画周期现象——任意角三角函数概念的教学反思[J]. 数学通报, 2012, 51(1): 25-26+12.