

光学教学中光栅散射的数值模拟

高峰, 杨迪, 李健, 吴迪, 陈识璞

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2023年4月19日; 录用日期: 2023年6月22日; 发布日期: 2023年6月30日

摘要

光栅是波动光学的教学重点之一。对于布拉格光栅, 我们通常利用布拉格公式来判断产生强反射低透射的条件。但该公式具有比较大的局限性, 许多影响透射谱和反射谱的物理量没有被考虑到, 因此我们可以利用传输矩阵方法来补充课堂教学内容的不足, 通过让学生自主编程模拟, 以达到促进学生知识的理解和科研能力的培养。本文详细地介绍了传输矩阵方法在布拉格光栅中的应用及相关结论, 为其在教学中的应用提供指导帮助。

关键词

布拉格光栅, 传输矩阵, 透射谱, 反射谱

Numerical Simulation of Grating Scattering in Optical Teaching

Feng Gao, Di Yang, Jian Li, Di Wu, Shipu Chen

College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Apr. 19th, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Grating is one of the teaching emphases of wave optics. For Bragg gratings, we usually use the Bragg formula to judge the conditions of strong reflection and low transmission. However, this formula has relatively large limitations. Many physical quantities that affect the transmission spectrum and reflection spectrum have not been taken into account. Therefore, we can use the transfer matrix method to supplement the deficiencies of classroom teaching content. By allowing students to program and simulate independently, we can promote students' understanding of knowledge and cultivate their scientific research ability. In this paper, the application of the transfer matrix method in Bragg grating and the related conclusions are introduced in detail to provide guidance

for its application in teaching.

Keywords

Bragg Grating, Transmission Matrix, Transmission Spectrum, Reflection Spectrum

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

光栅是大学物理光学教学中的重要内容，又分为衍射光栅和布拉格光栅两种。其中布拉格光栅是介质折射率沿光的传播方向周期性排布的一种无源光学器件，如图 1(a)所示，可用作传感器、滤波器和高反射镜等，应用十分广泛[1] [2]。在波动光学的教学中，教师通常利用光程差概念，得到布拉格条件 $2d \sin \varphi = k\lambda$ ，当满足该条件时，反射率达到极大值，透射率达到极小值。但是布拉格公式具有比较大的局限性，它只考虑了光栅常数 d 与入射光波长 λ 的关系，且只能判断反射率达到极大值时的条件，无法直观地展示波长连续变化时对应的透射谱和反射谱，而且影响透射和反射现象的其他因素没有被考虑进来，不利于学生理解。

因此，在分析布拉格光栅的光学特性时，需要借助其他理论，例如耦合模理论、傅里叶光学方法和传输矩阵方法等[3] [4]。其中，传输矩阵方法是利用矩阵将介质两端的输入光和输出光联系在一起，从而得到各束光波电场强度之间的数值关系，是分析光栅散射性质的经典模拟方法。该方法具有易于理解、便于数值计算的优点。借助该方法，我们可以在教学中通过向学生布置“小课题”的形式，引导学生利用编程软件进行数值模拟实验，从而拓展教学内容，鼓励自主地研究影响布拉格光栅透射和反射的因素，让学生从知识的吸收者变为知识的“创造者”，加深学生们对知识的理解，增加学习趣味，培养科研能力。同时，该方法还可以在光学教学中进行延伸，可应用于增反膜、增透膜和啁啾光栅等其他光学器件散射特性的教学过程中。

2. 传输矩阵原理

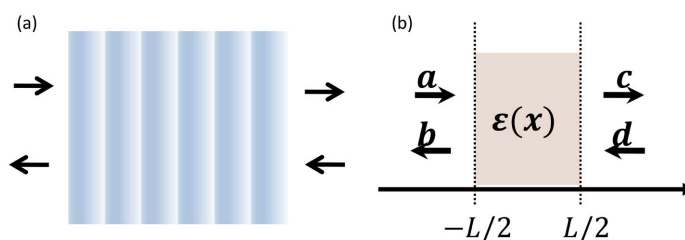


Figure 1. Scattering diagram of one-dimensional optical structure
图 1. 一维光学结构的散射示意图

对于折射率不均匀的介质，无法直接写出其对应的传输矩阵，所以需要从更简单的情况入手，首先考虑一块折射率均匀分布的介质所对应的传输矩阵，如图 1(b)所示，当两侧同时射入电场强度分别为 E_a 和 E_d 的输入光时，两侧会产生电场强度为 E_b 和 E_c 的输出光，因此我们可以得到散射矩阵

$$\begin{pmatrix} E_c \\ E_b \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} E_a \\ E_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a \\ E_d \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 S 矩阵称为散射矩阵, 该矩阵是研究散射问题的经典方法之一。根据散射矩阵 S , 作线性变换我们总可以得到如下方程

$$\begin{pmatrix} E_c \\ E_d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a \\ E_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

从(2)式中, 我们可以看到将介质左侧的光经过一个线性变换后即可得到介质右侧的光, 即介质两侧的光通过矩阵 M 联系起来, 我们把该矩阵称为传输矩阵。

当入射光(设强度为 1)只从左侧射入介质内时, 若介质的左侧透射系数 t_L 和左侧反射系数 r_L , 那么左端产生的反射光场强应为 $1 \cdot r_L$, 右端产生的透射光应为 $1 \cdot t_L$, (2)式可以转化为

$$\begin{pmatrix} t_L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_L \end{pmatrix} \quad (3)$$

同理, 我们可以得到当入射光(设强度为 1)从右侧射入介质内时系统的传输关系。同样, 我们设右侧透射系数为 t_R 以及右侧反射系数为 r_R , 此时传输矩阵对应的关系为

$$\begin{pmatrix} r_R \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t_R \end{pmatrix} \quad (4)$$

联立(3)式和(4)式, 就得到了传输矩阵的表达式

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_L - \frac{r_L r_R}{t_R} & \frac{r_R}{t_R} \\ \frac{r_L}{t_R} & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix} \quad (5)$$

根据(5)式, 我们可以得到透射系数和反射系数与传输矩阵元之间的关系

$$\begin{cases} t = \frac{1}{M_{22}} \\ r_L = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \\ r_R = \frac{M_{12}}{M_{22}} \end{cases} \quad (6)$$

因此对于满足互惠关系的光学材料, 我们可以得到透射率和反射率的表达式

$$\begin{cases} T = |t|^2 \\ R = |r_L|^2 = |r_R|^2 \end{cases} \quad (7)$$

也就是说如果知道了传输矩阵的具体数值, 就可以就得光学系统的透射率 T 和反射率 R 。

以上介绍了传输矩阵的定义以及将传输矩阵与介质的透射率和反射率建立起了联系。根据电磁场在介质表面及内部的传输条件和边界关系, 我们可以得到正入射的 TE 波在长度为 l 的均匀介质中的传输矩阵为[5]

$$M_j = \frac{1}{4n_j} \begin{bmatrix} (n_i + 1)^2 e^{ikn_j} - (n_i - 1)^2 e^{-ikn_j} & (n_i^2 + 1)e^{ikn_j} - (n_i^2 - 1)e^{-ikn_j} \\ (n_i^2 - 1)e^{ikn_j} - (n_i^2 + 1)e^{-ikn_j} & (n_i + 1)^2 e^{-ikn_j} - (n_i - 1)^2 e^{ikn_j} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 n_j 为介质的折射率, n_i 为介质的左侧外界的折射率, n_k 为介质右侧外界的折射率。由于光栅是由非均匀介质组成的, 所以(8)式不可以直接应用到布拉格光栅中。对于光栅结构的传输矩阵, 我们将会在下一节中进行讨论。

3. 传输矩阵在光栅教学中的应用

在大学物理课程中, 关于布拉格反射和透射现象的介绍一般是围绕光程差的计算展开的, 该方法可以方便的计算空间点阵在透射方向产生最强相消干涉的极限情况, 但是却无法应用于折射率连续变化的布拉格光栅, 以及表现介质和入射光的其他参数对反射谱和透射谱的影响。然而, 布拉格光栅是应用最广泛的光学器件之一, 常用做传感器和滤波器等, 对于部分专业学生而言, 了解布拉格光栅散射性质尤为重要。因此我们可以在授课过程中以“小课题”的形式鼓励学生自主研究, 这样既可以让更直观的了解布拉格反射和透射现象, 同时也熟悉传输矩阵方法、培养科学研究能力。本节将主要讨论传输矩阵在教学中的应用和注意事项。

3.1. 传输矩阵计算光栅散射谱的方法和效率

如先前所述, 我们只考虑一维布拉格光栅的情况, 假设其折射率是连续变化的, 满足如下关系式:

$$n(x) = 1 + \Delta n(x) = 1 + A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

其中 A 为光栅的调制幅度, 反应折射率变化的大小, L 是光栅常数, x 为光栅中不同位置的坐标。从(9)式中可以看到, 折射率随位置发生连续变化, 而传输矩阵是计算均匀介质中光的传输特性。对于折射率连续变化的介质, 我们在教学过程中应该着重介绍微积分思想在物理中的应用, 可以与高等数学中函数积分等于函数与横轴围成的面积这一内容进行类比, 这里我们同样将光栅的每个周期进行等间隔划分, 划分后每个微元中, 介质的折射率虽然是变化的, 但是当划分的微元组数足够多时, 每个微元内的折射率变化将会非常小, 因此可以近似的看作是一个均匀的介质, 如图 2(a)所示。但是当划分的微元个数趋于无穷多时, 计算结果会非常精确, 但是计算量也会变大, 所以我们需要挑选合适的划分数目使得计算足够精确, 且满足比较高的运算效率。

在图 2(b)、图 2(c)、图 2(d)中, 我们考虑划分微元个数对结果的影响, 其中蓝色实线为透射谱, 绿色虚线为反射谱。为控制变量, 我们先假设 $A = 0.1$, $L = 500 \text{ nm}$, 光栅的周期数为 100, 根据布拉格公式 $2d = k\lambda$, $k = 1, 2, 3, \dots$ 我们可知当 $\lambda = 1000 \text{ nm}$ 时会发生比较强烈的反射。在图 2(b)中我们将每个周期划分为 200 份间隔相等的微元, 在图 2(c)中我们将每个周期划分为 100 份间隔相等的微元, 在图 2(d)中我们将每个周期划分为 20 份间隔相等的微元。从图中我们可以看到当划分为 200 份和 100 份时, 透射谱和反射谱基本相同, 在 $\lambda = 1000 \text{ nm}$ 时, 透射率分别为 0.159886 和 0.161178, 二者的差距约为 0.8%; 而当划分数为 20 份时, 透射率为 0.175228, 与划分数为 200 份时相比, 相差 9.6%, 具有比较大的差距。为了更清楚的说明三者之间的关系, 我们分别在图 2(e)对比了三种划分方式的透射谱, 在图 2(f)中对比了三种划分方式对应的反射谱, 其中绿色虚线代表每个周期划分数为 200 份, 蓝色实线代表划分数为 100 份, 红色虚线代表划分数 20 份。两幅图中呈现的规律相似, 我们不妨以图 2(e)为例进行讨论, 从图中我们不难看出当 λ 远离 1000 nm 时, 三种划分方式都具有相近的结果, 这说明划分的精度对结果影响较小, 但是当 λ 在 1000 nm 附近时, 只有 200 划分与 100 划分二者的结果比较接近, 而 20 划分的结果出现了比较

大的偏差,并且我们可以看到在 $\lambda=1000\text{ nm}$ 时,透射率的计算值随着分组数的增多而降低,逐渐逼近该光栅透射率的理论值,也就是说透射率的计算值存在一个极限,并且从图中我们可以看出当分组数足够多时,通过增加单个周期内划分组数从而提高计算结果精度将十分困难,因为更多的划分组数意味着需要更多的计算资源。通过以上分析,我们不难发现,选择将单个周期进行100组等间隔划分已足够保证精确度(误差为1%以内),同时兼具计算效率,对于大学物理课程的学生而言是比较合适的选择。

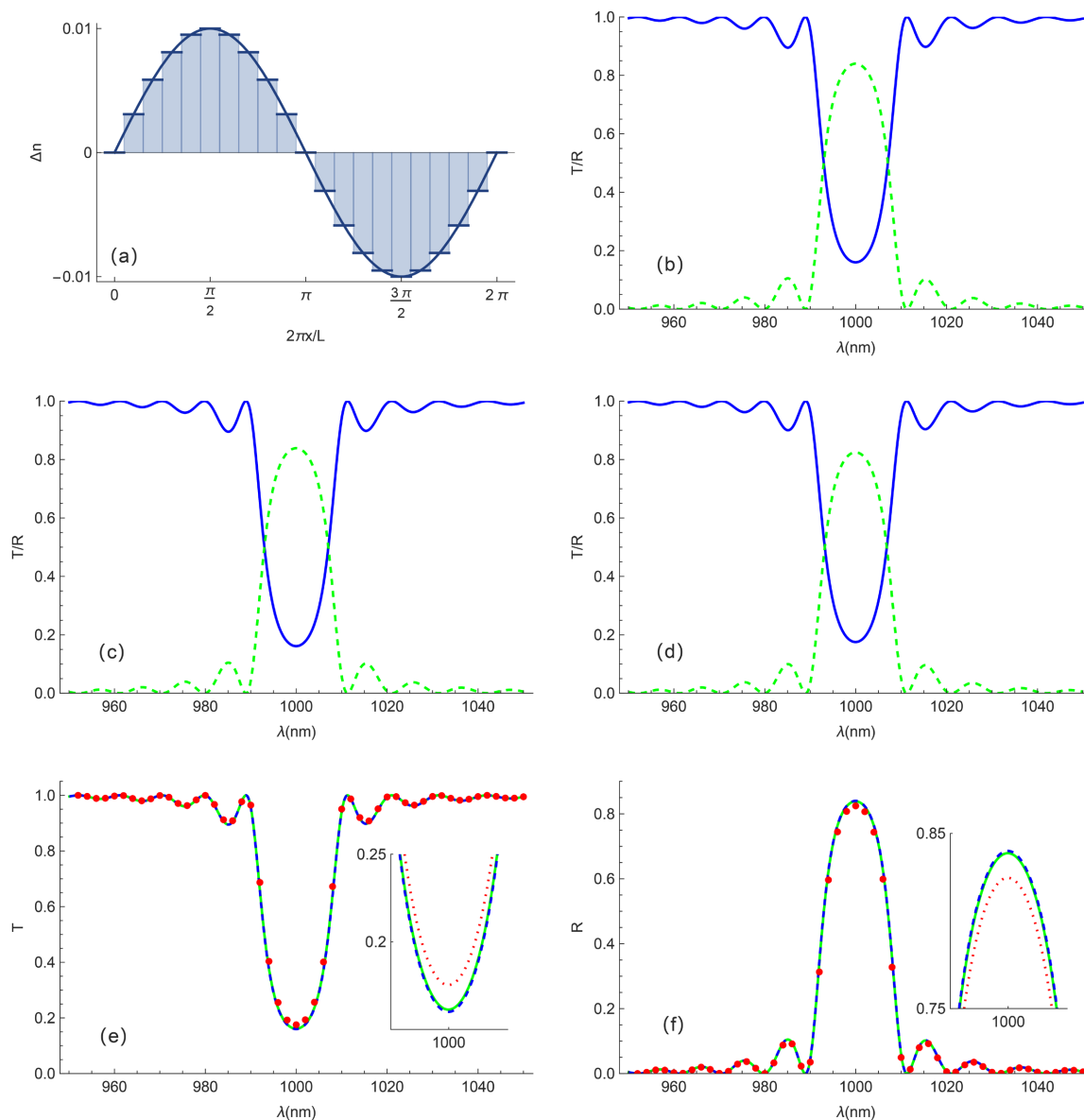


Figure 2. Schematic diagram of transmission matrix principle (a); The transmission spectrum (blue solid line) and reflection spectrum (green dashed line) obtained by dividing a single period into 200 microelements (b), 100 microelements (c), and 20 microelements (d) with equal thickness; Comparison of transmittance (e) and reflectance (f) in the above three scenarios (green dashed line represents 200 divisions, blue solid line represents 100 divisions, and red dashed line represents 20 divisions)

图 2. 传输矩阵原理示意图(a); 将单个周期划分为厚度相等的 200 个微元(b)、100 个微元(c)和 20 个微元(d)时得到的透射谱(蓝色实线)和反射谱(绿色虚线); 以上三种情况下的透射率(e)和反射率(f)的对比(绿色虚线代表 200 份划分, 蓝色实线代表 100 份划分, 红色虚线代表 20 份划分)

3.2. 折射率调制幅度对透射的影响

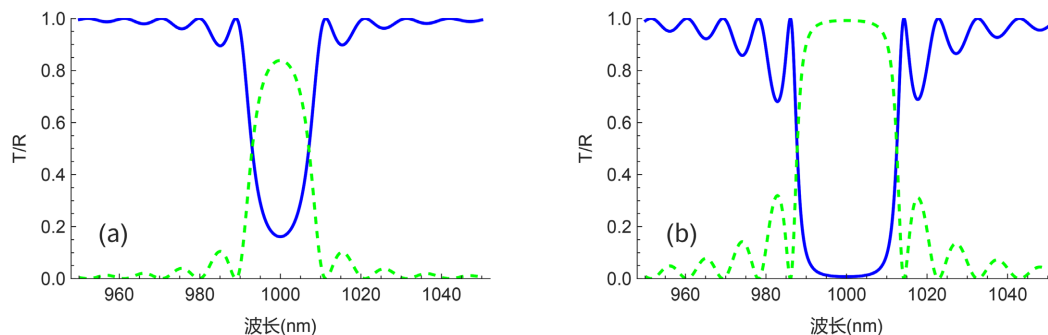


Figure 3. Transmission spectrum (blue solid line) and reflection spectrum (green dashed line) at modulation amplitudes of 0.01 (a) and 0.02 (b)

图 3. 调制幅度为 0.01 (a) 和 0.02 (b) 时的透射谱 (蓝色实线) 和反射谱 (绿色虚线)

在传统的大学物理课程中，并没有讨论光栅调制幅度 A 对光栅透射和反射现象的影响的相关内容，这容易给学生带来误解，认为调制幅度 A 对透射和反射现象没有影响，但实际上光栅调制幅度越大，光栅对透射率和反射率的影响越大。因此，为了说明该现象，我们可以在“小课题”中设置调制幅度对散射特性影响的模拟实验。这里我们以图 3 为例，具体介绍调制幅度 A 对散射特性的影响。

在图 3 中，我们利用传输矩阵画出了周期数为 100 时， $L = 500 \text{ nm}$ 的布拉格光栅在不同调制幅度下对透射谱 (蓝色实线) 和反射谱 (绿虚线) 的影响，其中在图 3(a) 中， $A = 0.01$ ，在图 3(b) 中， $A = 0.02$ 。从两个结果的对比中，我们不难发现，当加大调制幅度 A 时，透射率降低，反射率提高，这意味着在相同周期数下，调制幅度的增大导致透射光更强的相消干涉。当调制幅度较低时，光线无法在 100 个周期的干涉下输出完全相消干涉的叠加，从而导致了透射率大于 0。而当调制幅度足够大时，在光栅另一端的输出光已经产生比较强的相消叠加，从而透射率等于 0，产生全反射的现象。而且，我们还看到，当调制幅度足够大时，会在附近产生一个比较宽的全反射窗口，该窗口的出现为人们对布拉格光栅的使用提供了更强的冗余性。

除此之外，我们还可以引导学生进行其他的模拟实验，例如：透射率极小值随调制幅度 A 的变化关系，全反射窗口出现的最小调制幅度和全反射窗口半峰宽与调制幅度 A 之间的关系等等，鼓励学生总结实验现象并进行发散，提高学生的综合素质。

3.3. 周期数对透射现象的影响

除了折射率调制幅度外，大学物理课程也忽略了光栅周期数量对透射率和反射率的影响，而周期数恰恰是布拉格光栅在实际应用中的一个重要参数，所以我们在数学模拟实验中也应该设置相应内容。同样，以图 4 为例，我们具体介绍周期数对透射率和反射率的具体影响。

在图 4 中，我们令 $A = 0.02$ ， $L = 500 \text{ nm}$ ，但是布拉格光栅的周期数量不同，其中图 4(a) 对应的周期数为 1，图 4(b) 对应的周期数为 50，图 5(c) 对应的周期数为 100，图 5(d) 对应的周期数为 200。从图中，我们可以看出，当周期数为 1 时，此时该介质并不是一个光栅，入射光几乎全部透射，而不发生反射，这说明我们选取的折射率所对应的材料是一个良好的透明材料，逐渐增加光栅周期的个数时，我们发现透射率出现一个低谷，反射率出现一个峰值，并且低谷和峰值随着周期数的增加变深和变高，直到达到理论允许的极值。此时，继续增加周期数目，同样会在满足布拉格条件的位置附近出现一个全反射的波长窗口。这与增大调制幅度的现象一致，这说明增加周期个数与增大调制幅度均可以增强透射光的相消

干涉强度。通常情况下，折射率更难以控制，所以学生们可以得到通过改变周期数来改变散射特性的结论，而这一结论也更贴近布拉格光栅实际使用时的情况。

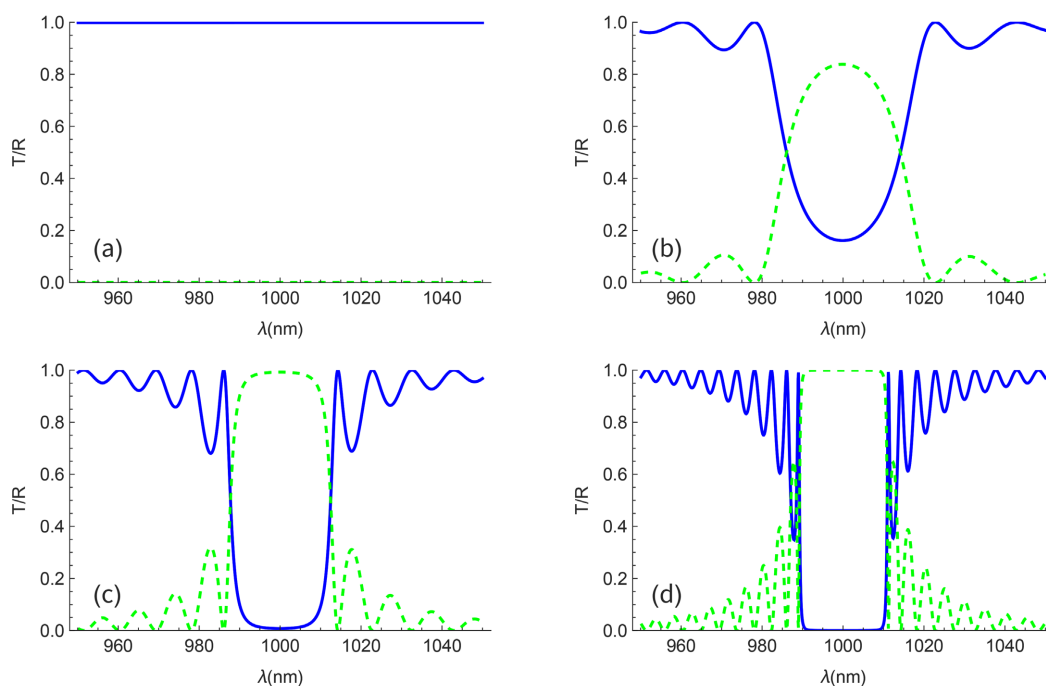


Figure 4. Transmission spectrum (blue solid line) and reflection spectrum (green dashed line) corresponding to 1 period (a), 50 periods (b), 100 periods (c), and 200 periods (d)

图 4. 周期数为 1 (a), 50 (b), 100 (c) 和 200 (d) 时的透射谱(蓝色实线)和反射谱(绿色虚线)

3.4. 入射波长对透射和反射的影响

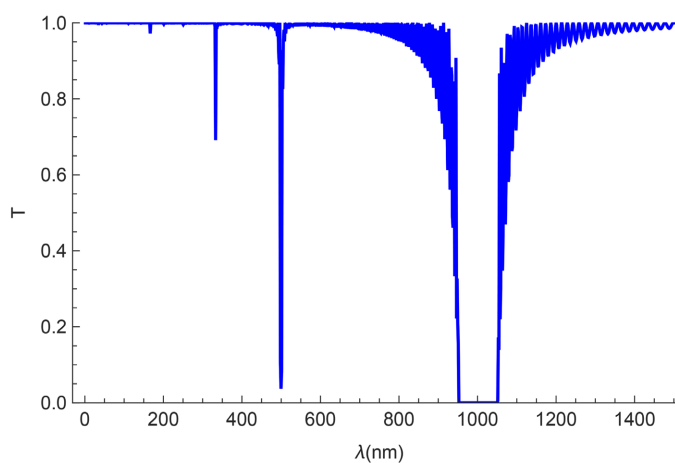


Figure 5. Transmittance to incident light of different wavelengths

图 5. 光栅对不同波长的入射光的透射率

最后，我们可以引导学生研究透射率和反射率随入射光波长的变化条件。根据布拉格条件 $2d = k\lambda$, $k=1,2,3,\dots$ ，我们可知当光正入射的波长 $\lambda = \frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \dots$ 时，即 $\lambda = 1000 \text{ nm}, 500 \text{ nm}, 333 \text{ nm}, \dots$ ，

均应产生较强的反射现象。但是这些波长产生的反射效果是否相等呢？布拉格条件并没有告诉我们答案，所以我们可以鼓励学生通过数学模拟实验来探究该现象。我们在图 5 中，画出了不同波长对应的透射率，图中 $A=0.02$ ， $L=500\text{ nm}$ ，周期数为 100。从图中，我们不难看出，当 $\lambda = \frac{2L}{1}$ 时，全反射现象最为明显，并且在反射谱中会出现一个的全反射窗口，该结果可以从文献[6]中的图 9 得到验证。而当 $\lambda = \frac{2L}{2}$ 时，全反射窗口依然比较深，但是宽度已经较 $\lambda = \frac{2L}{1}$ 时大为变窄；而当 $\lambda = \frac{2L}{3}$ 时，透射窗口进一步变浅。而当 $\lambda = \frac{2L}{4}, \frac{2L}{5}, \frac{2L}{6}, \dots$ 时，已经很难观察到明显的低透射窗口了。这说明出射光的强度还与光的波长有关，当波长满足布拉格条件，并且波长较大时，透射端更容易发生相消干涉，该结果可以从文献[7]中的图 2 和图 3 得到验证。因此学生们根据数学模拟结果得到结论：在满足布拉格公式的条件下，透射光的相消干涉也随着波长的减小而削弱，体现为透射率逐渐升高。

4. 结束语

借助传输矩阵算法和编程软件，我们可以在大学物理课程中的布拉格光栅教学中为学生构建一个数学模拟实验项目，学生可以从透射率和反射率的角度，研究不同参数对光栅散射性质的影响。从上边的讨论中我们可以看到，数学模拟实验项目的结论贴近实际并且内容丰富，为学生们清晰地展示了影响布拉格光栅散射特性的不同因素，学生对结果的理解会更加透彻。在充实教学内容、提高教学效果的同时，也增加了课程的趣味性，培养了学生的科学研究素养。在这个案例中，我们可以看到在大学物理课程中增加难度适中的数学模拟实验，可以让学生从学习的被动者变为主动者，为学生后续参加各种理工类学术竞赛和学习专业课程打下良好的基础，真正体现了大学物理作为基础课程的地位和作用。

基金项目

2023 年沈阳航空航天大学本科教学改革研究项目：《大学物理》中计算模拟教学内容建设和实践；2021 年度辽宁省普通高等教育本科教学改革研究优质教学资源建设与共享项目：依托跨校修读学分的大学物理线上线下混合式一流课程探索与建设；2022 年辽宁省普通高等教育本科教学改革研究优质教学资源建设与共享项目：在混合式实验教学中开展跨校修读的探索与实践；2022 年沈阳航空航天大学理学院教改项目：线上和线下混合式实验教学模式的探索和建设；2022 年度辽宁省普通高等教育本科教学改革研究优质教学资源建设与共享项目：基于跨校修读的实践类课程创新教育引导及能力培养。

参考文献

- [1] 贾丹平, 曹璨, 马赫驰. 基于光纤 Bragg 光栅的力传感技术研究[J]. 传感器技术与应用, 2019, 7(3): 95-103. <https://doi.org/10.12677/JSTA.2019.73011>
- [2] 贾丹平, 姜小舟, 逯晓军. 基于 Bragg 光栅的电力电缆温度在线测量方法研究[J]. 传感器技术与应用, 2020, 8(2): 60-69. <https://doi.org/10.12677/JSTA.2020.82007>
- [3] 马海霞, 武艳军, 王吉明, 路元刚, 杨雁南. 基于传输矩阵法的多层介质膜反射特性的研究[J]. 大学物理, 2020, 39(8): 25-30.
- [4] 王辉, 朱浩, 樊代和, 吴平, 何钰, 马小娟. 传输矩阵法在大学物理波动光学教学中的应用[J]. 物理与工程, 2019, 29(5): 118-122.
- [5] Mostafazadeh, A. and Sarisaman, M. (2015) Lasing-Threshold Condition for Oblique TE and TM Modes, Spectral Singularities, and Coherent Perfect Absorption. *Physical Review A*, **91**, Article 043804. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043804>
- [6] 伊浩天. 基于传输矩阵理论的 Bragg 光栅特性研究[J]. 广西物理, 2022, 43(3): 28-34.

-
- [7] Lindner, E., Becker, M., Rothhardt, M., *et al.* (2008) Generation and Characterization of First Order Fiber Bragg Gratings with Bragg Wavelengths in the Visible Spectral Range. *Optics Communications*, **281**, 4612-4615.
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2008.04.078>