

浅谈初中生数学问题解决能力的影响因素

张永清

数学与统计学院黄冈师范学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年9月25日; 录用日期: 2024年1月23日; 发布日期: 2024年1月31日

摘要

问题解决能力的培养一直是众多国家数学课程体系中的重点, 本文通过对数学问题解决过程的阐述以及对一些初中学生解题情况的整理与分析, 对影响数学问题解决能力的因素进行了总结, 并提出了相对应的教学建议。

关键词

数学问题解决能力, 影响因素, 教学建议

A Brief Discussion on the Influencing Factors of Junior High School Students' Mathematical Problem-Solving Ability

Yongqing Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Sep. 25th, 2023; accepted: Jan. 23rd, 2024; published: Jan. 31st, 2024

Abstract

The cultivation of problem-solving ability has always been the focus of mathematics curriculum system in many countries, and this paper summarizes the factors affecting mathematical problem-solving ability through the elaboration of the mathematical problem-solving process and the collation and analysis of some junior high school students' problem-solving situation, and puts forward corresponding teaching suggestions.

Keywords

Mathematical Problem-Solving Ability, Influencing Factors, Teaching Suggestions

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

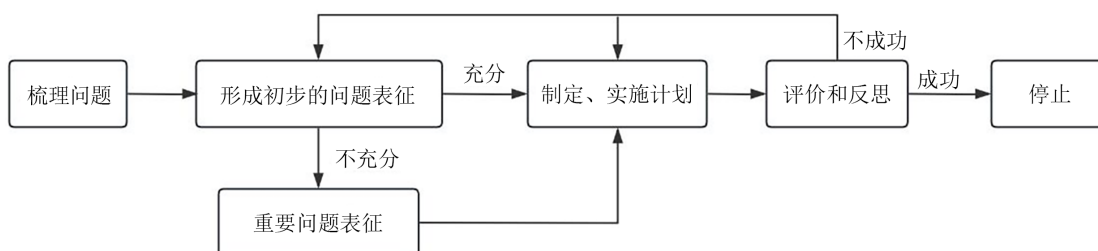


Open Access

1. 引言

“问题解决”自提出以来就成为了各国数学教育的热点问题，随着研究的不断深入，不少国家都将问题解决作为其数学课程的核心内容。数学问题解决的学习不仅有利于提高学生数学知识的掌握水平，还能培养学生的探索精神和创新能力，是培养新时代创新型人才的有效方式。但在实际的数学教学中，由于受传统教育模式的影响，很多学生对于数学知识的学习没有太大问题，数学问题解决的效果却不太理想，归根结底还是数学问题解决的能力过于薄弱。长期以往，不利于学生数学学科的学习和未来的发展。因此，找出影响学生数学问题解决能力的因素，是提高学生数学问题解决能力的关键。本文从学生的角度出发，通过对一些学生解题情况的分析，对影响数学问题解决能力的因素进行了总结并提出了对应的教学建议。

2. 数学问题解决的基本过程



数学问题解决的基本过程

Figure 1. Basic process of mathematical problem solving

图 1. 数学问题解决的基本过程

问题解决的理论经历了“试误说→顿悟说→信息加工说→现代认知模式→建构主义”的发展轨迹[1]。对于数学问题解决的研究，波利亚给出了一个4步骤的解题程序：弄清问题→拟定计划→实现计划→回顾[2]。曹一鸣等人将波利亚的解决问题四阶段模型看成是解决抽象数学问题的基本过程，并提出了具有现实背景的数学问题解决基本过程：1) 分析问题背景，寻找数学联系；2) 建立数学模型；3) 求解数学问题；4) 检验与推广[3]。还有些学者从心理学的角度对数学问题解决的基本过程进行总结，如何小亚根据解决数学问题的心理过程，将数学问题解决分为四个阶段：1) 意识到问题的存在；2) 表征问题；3) 确定解决问题的策略并尝试某种问题解决的方法；4) 评价与反思[4]。庞维国依据现代认知心理学从问题解决模式中分析出五个数学问题解决的子过程：1) 发现问题；2) 界定和表征问题；3) 确定问题解决方案；4) 执行解题方案；5) 评价问题解决的结果[5]。

通过对相关文献的整理及分析,现将数学问题解决的基本过程总结如下:

第一步,表征问题。对数学问题进行合理地表征是解决数学问题的第一步,它涉及准确地理解、分析和描述问题。特别是对于结构不良的数学问题,由于其给定问题的结构不确定,同一个问题可能存在多种不同的表征形式,所以,对问题进行合理的表征是解决数学问题至关重要的一步。因此,解决者在对其进行重构时要充分理解问题信息并对相关信息进行收集整理和选择。如果初始的问题表征对于问题的解决没有帮助,则解决者需要重新选择信息并进行问题表征的重构。

第二步,制定并实施方案。在对数学问题进行表征之后,解决者根据自身的知识储备和相关经验,对问题进行转化,生成一些解决策略,并对这些策略进行选择,选择有效的解决对策来解决问题。

第三步,评价与反思。评价与反思在数学问题的解决过程中起着至关重要的作用。由于数学问题解决过程的特殊性,其每个环节都会对问题的解决产生影响,因此在解决过程中解决者要不断地进行评价和反思,以获取更深的理解和提高解决数学问题的能力。例如,相关信息的选择是否正确、数学问题的表征是否合理、解决问题的方案是否有效等都需要进行评价和反思。数学问题解决的基本过程如图1所示。

3. 影响学生数学问题解决能力的主要因素

由于研究者对数学问题解决能力研究角度的不同,其对影响因素的探索也不尽相同。如,舍费尔德在对12名大学1~2年级学生的实证研究中,总结出数学问题解决思维能力的四个要素:认知资源、启发法则、调控、信念系统[6]。喻平教授在其博士论文中认为功能固着、问题表征、反应定势、知识背景、智慧水平、动机强度、认知风格及气质性格等因素会对问题解决产生影响[2]。

本文主要从学生自身的角度出发,通过对一些学生解题情况的整理与分析,找出影响数学问题解决能力的因素。

3.1. 案例整理与分析

中考作为一种终结性评价方式,其成绩是学生能否进入高中的重要依据。《义务教育数学课程标准(2022年版)》指出:“全面理解和体现课程标准要求,依据课程标准所规定的课程目标、内容要求、学业要求和学业质量命题,各领域考查内容所占比例与其在课程标准中所占比例大体一致,难易程度大体均衡,保证命题的科学性”[7]。因此,本文选取黄冈市2023年中考数学试题作为学生题目来源,具有一定的科学性、权威性。下面选取其中的17、18、21题作简要分析,题目见图2、图3、图4。

18. 创建文明城市,构建美好家园.为提高垃圾分类意识,幸福社区决定采购A,B两种型号的新型垃圾桶.若购买3个A型垃圾桶和4个B型垃圾桶共需要580元,购买6个A型垃圾桶和5个B型垃圾桶共需要860元.

(1) 求两种型号垃圾桶的单价;

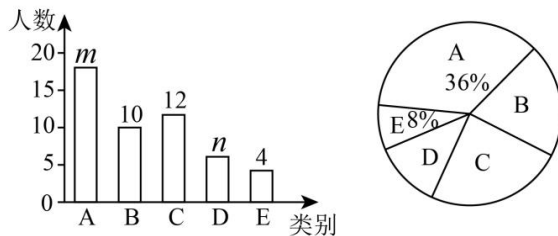
(2) 若需购买A,B两种型号的垃圾桶共200个,总费用不超过15000元,至少需购买A型垃圾桶多少个?

Figure 2. Question 18 of the mathematics paper of the 2023 junior high school academic level examination in Huanggang City

图2. 黄冈市2023年初中业水平考试数学试卷第18题

第18题主要考察的是二元一次方程组的应用及不等式的解法,通过整理学生的解答过程,发现其解答情况分为以下四种:全部错误或空白;部分正确,能根据题目中所给的条件,列出正确的二元一次方程组,但计算错误;部分正确,能正确求出两种型号垃圾桶的单价并根据相关条件列出正确的不等式,但计算错误;全部正确,能按照题目要求列出正确的二元一次方程组和不等式,且计算结果无误。

19. 打造书香文化, 培养阅读习惯, 崇德中学计划在各班建图书角, 开展“我最喜欢阅读的书籍”为主题的调查活动, 学生根据自己的爱好选择一类书籍 (A: 科技类, B: 文学类, C: 政史类, D: 艺术类, E: 其他类). 张老师组织数学兴趣小组对学校部分学生进行了问卷调查, 根据收集到的数据, 绘制了两幅不完整的统计图 (如图所示).



根据图中信息, 请回答下列问题:

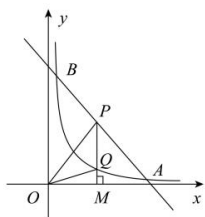
- (1) 条形图中的 $m =$ _____, $n =$ _____, 文学类书籍对应扇形圆心角等于 _____ 度;
- (2) 若该校有 2000 名学生, 请你估计最喜欢阅读政史类书籍的学生人数;
- (3) 甲同学从 A, B, C 三类书籍中随机选择一种, 乙同学从 B, C, D 三类书籍中随机选择一种, 请用画树状图或者列表法求甲乙两位同学选择相同类别书籍的概率.

Figure 3. Question 19 of the mathematics paper of the 2023 junior high school academic level examination in Huanggang City

图 3. 黄冈市 2023 年初中学业水平考试数学试卷第 19 题

第 19 题主要考察的是条形图与扇形图对应数据间的联系以及树状图、列表法的运用, 通过整理学生的解答过程, 发现其解答情况分为以下四种: 全部错误或空白; 部分正确, 能发现条形图与扇形图对应数据间的关系, 列出算式, 但计算结果错误; 部分正确, 能进行正确的计算, 补全缺失的数据, 但不会用树状图或列表法求概率; 全部正确, 能补全缺失的数据, 进行相对应的计算, 会运用树状图或列表法求概率。

21. 如图, 一次函数 $y_1 = kx + b (k \neq 0)$ 与函数为 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于 $A(4, 1), B(\frac{1}{2}, a)$ 两点.



- (1) 求这两个函数的解析式;
- (2) 根据图象, 直接写出满足 $y_1 - y_2 > 0$ 时 x 的取值范围;
- (3) 点 P 在线段 AB 上, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M , 交函数 y_2 的图象于点 Q , 若 $\triangle POQ$ 面积为 3, 求点 P 的坐标.

Figure 4. Question 21 of the mathematics paper of the 2023 junior high school academic level examination in Huanggang City

图 4. 黄冈市 2023 年初中学业水平考试数学试卷第 21 题

第 21 题主要考察的是一次函数、反比例函数、一元二次方程的相关知识点, 通过整理学生的解答过

程,发现其解答情况分为以下五种:全部错误或空白;部分正确,仅能求出两个函数的解析式;部分正确,能求出两个函数的解析式并结合函数图像,找出符合要求的 x 的取值范围;部分正确,能根据函数解析式,设出 P 、 Q 两点的坐标,用含未知数的式子来表示 PQ 的长度,并根据题目条件构造出合理的一元二次方程,但计算结果错误;全部正确,能求出两个函数的解析式,能找出符合要求的 x 的取值范围、 P 点的坐标。

通过对上述三道题目学生解答情况的整理,学生的解答情况主要分为全部错误或空白、部分正确、全部正确这三种情况。下面对这三种情况进行简要分析:

对于第一种情况,这类学生对于题目的理解不够深刻,不知道题目考察的知识点是什么,即无法找到所学知识和问题间的联系,因此无法对题目中的已知条件进行分析,导致问题表征受阻,问题无法得到解决。对于没有进行作答的学生,通过课后与他们进行交谈,其空白原因分为以下三种:1) 对此问题完全不会,不知道该怎么作答;2) 对问题有一定的思考,但怀疑自己的能力,缺乏解决问题的信心,导致没有作答;3) 缺乏解题的兴趣和动机,不想作答。

对于第二种情况,这类学生具有一定的知识基础,能理解题目的意图,对题目中的条件能进行简单运用,但由于其认知结构不完善,对问题中的某一概念缺乏深层次的理解或对问题中考察的相关知识点掌握不牢固、运用不灵活,缺乏解决问题的相关经验,导致无法对问题进行进一步的表征,使得问题得不到完全解决。还有一部分学生,能根据问题的条件进行合理的表征,并选择出合适的方法来解决问题,但在计算过程中不够细心,缺乏对结果的检验,导致最终结果错误。

对于第三种情况,这类学生对于题目的意图把握准确,能合理地运用所学知识来解决问题并且解题过程清晰,说明这类学生对问题的认知更为完整,能依据已知条件对问题进行合理的表征,最终选用正确的方案来解决问题。通过调查,在全部正确的这类学生中,有一部分学生一开始选择的方案也并非合理,但其最后通过验证自己的结论发现了问题所在,及时做出了调整,最终得到了正确答案,说明元认知能力在学生问题解决的过程中发挥着重要作用。

综上所述,兴趣与动机、认知结构、问题表征和元认知能力在学生数学问题解决的过程中起着重要作用,对学生数学问题解决能力具有重要影响。

3.2. 影响因素

3.2.1. 兴趣与动机

兴趣是最好的老师,强烈的学习兴趣是学生有效进行问题解决的前提。通过调查我们发现,有些学生喜欢数学,他们把解决问题当作一种挑战并且有信心完成挑战,能积极主动地寻找多种方法来解决,在问题得到解决时能获得较好的成就感。有些学生则对数学存在抵触逃避的心理,他们对解决问题的兴趣和动机相对较低,面对待解决的数学问题,通常放弃作答或胡乱作答,存在应付交差的现象。

兴趣作为学生内在的推动力,它能够激发个体去主动探索,愿意花更多的时间和精力来解决问题。当学生对数学充满兴趣时,他会更愿意去克服难题,同时也更容易保持专注,更容易投入精力去理解数学概念。此外,积极的动机可以提高学生的目标导向性,使其更主动地寻求帮助探索解决问题的方法,有助于问题的解决。由此可见,兴趣和动机在数学问题解决的过程中有着重要的意义。

3.2.2. 认知结构

认知结构是指学生在大脑中组织和存储信息的方式,包括知识、概念、记忆和思维模式等。它是学生对外界信息进行处理和理解的框架,决定了学生如何感知、记忆、思考和解决问题。数学问题解决的基本思想是转化与化归思想,当学生具备一定的知识储备和数学问题解决经验,就能将非常规问题转化为常规问题。如果学生的知识储备不足,缺乏相对应的问题解决经验,那么问题转化就会存在困难,影

响问题的解决。因此，在解决数学问题时，学生首先需要调用其认知结构中的数学知识和概念，以理解问题的要求和条件，然后再利用其认知结构中的思维模式和策略来分析和解决问题。

在实际观察中，认知结构影响学生数学问题无法解决的情况主要分为三种：一是有些学生知识储备不足，无法对问题中的信息进行提取与分析；二是有些学生已经具备了一定的基础知识，但是对于数学问题的情境无法理解，导致知识无法运用；三是有些学生尽管能正确理解数学问题情境并对相关信息进行处理，但缺乏相关的数学问题解决经验，在问题中提取到的信息无法与相关知识建立联系或者即使建立了联系但存在漏洞，无法进行积极的评价与反思，导致问题无法解决。

由此可见，认知结构与数学问题解决过程中的各个环节都有着紧密的联系。并且认知结构的质量和合理性直接关系到数学问题解决的效率和准确性，学生的认知结构越完整，其问题解决能力相对就越好，相反，如果学生认知结构缺失或是杂乱无章的，那么对数学问题的解决是极其困难的[8]。

3.2.3. 问题表征

问题表征是指在解决问题时，对问题相关信息进行编码和记录的方式，包括对问题的描述、提取相关信息、明确问题的性质、已知条件和目标条件。一个清晰准确的问题表征有助于学生更好地掌握问题的本质，从而更有效地解决数学问题，相反，如果学生对问题的表征不准确或者表征错误，显然会增加问题解决的难度。

在调查过程中，我们发现，认知结构较好的学生对于问题的分析和理解相对准确，问题的解决过程也相对顺利，而认知结构较差的学生对于问题的分析和理解相对模糊，问题难以得到解决。因此，问题表征是数学问题解决中的关键部分，它为问题的解决提供了起点和框架，当学生能够将问题进行合理的表征时，就为接下来的问题解决打下了一个良好的基础，相反，如果学生无法对问题进行合理的表征，那么问题的解决将会陷入困境。由此可见，问题表征的合理与否影响着数学问题的顺利解决。

3.2.4. 元认知

元认知是指人对自己的认知过程和思维策略的认知和调控。它不仅影响了学生如何理解和选择解决策略，还有助于他们更有效地规划、监控和评估问题解决的过程。在调查过程中我们发现，有些学生在遇到一种策略无法对问题进行解决时，会及时调整方向，寻找其他的策略或重构问题表征以寻求新的方法来解决问题，而有些学生则会钻牛角尖，无法对问题进行重新表征，对问题束手无策。由此可见，学生的元认知对问题解决的每一个阶段都会产生影响，是影响数学问题解决的一个重要因素。

综上所述，学生的学习兴趣 and 动机在主观意义上影响着数学问题解决活动的进行，认知结构是数学问题解决的基础，问题表征是数学问题解决的关键，元认知能力在数学问题解决的各环节中起着反思和调控的作用。

4. 提高学生数学问题解决能力的建议

4.1. 激发数学学习兴趣和动机

学生是数学问题解决的主体，学生对数学学习兴趣和动机的有无和动机的大小直接影响着数学问题解决是否顺利有效地开展，对问题能否成功解决有着重要影响。因此，教师在教学中要提高学生的数学学习兴趣，激发学生的学习动机，使更多的学生能够积极主动地去解决问题，从而达到提高学生数学问题解决能力的目的。

在课堂教学中，教师注重数学知识与实际生活的联系，通过真实的教学情境，让学生体会到数学在生活中是无处不在的。通过不断引入生活中的相关实例或进行一些数学游戏，使原本抽象的数学具体化，让学生感到学习数学趣味性与实用性，从而提高学生学习数学的兴趣和动机。对于一些已经对数学有些

消极态度的学生，教师也要耐心指导，根据他们的自身情况，安排他们做一些力所能及的任务，让他们在完成任务的过程中体会到自己的价值感，增强解决问题的自信，慢慢转变他们由被动接受到主动探索的心态。

4.2. 构建良好的认知结构

数学知识的学习是一个不断顺应的过程，学生通过利用自身已掌握的知识来解决遇到的新问题，更有利于新知识的掌握。因此，在教学中教师要注重新旧知识之间的联系，帮助学生构建良好的认知结构，为数学问题的成功解决打下坚实的基础。

在课堂教学中，数学知识是一个整体，切不可将它们割裂开。在学习新知识之前，教师可引导学生对旧知识和相关经验进行回顾和总结，找到新旧知识间的异同。当问题产生时，教师要引导学生多思考“旧知识对新问题的解决有什么用”、“如何运用旧知识来解决新问题”来分析问题，起初学生会尝试用现有知识来解决问题，当问题无法得到解决时，学生则会意识到现有的知识和经验对问题是无效的，因此，就会主动尝试将新知识与现有知识进行融合，重建认知结构，以此来达到解决问题的目的。此外，在学生出现错误的认知时，教师要引导学生正视错误认知的产生，并及时对错误认知产生的原因进行剖析，鼓励学生继续进行探索，培养学生不怕失败、勇于探索的优秀品质。

4.3. 引导学生合理表征

问题表征涉及准确地理解、分析、描述问题，是问题解决的关键。教师在教学中不能仅仅只关注学生问题表征的结果，还应对学生表征的过程进行分析。由于学生认知结构的差异，对于同一个问题，其问题表征的形式是多种多样的，有些学生对于问题的表征较为准确，那么其对于问题的解决过程就相对顺利，而有些学生无法对问题进行合理的表征，导致问题解决出现困难。因此，教师要充分了解学生问题表征的思维过程，对于表征不当或表征错误的学生，要及时引导学生找出表征错误的原因，例如其问题的描述是否清晰、信息的提取是否有效、问题的属性是否准确，并对错误原因进行分析，对问题重新进行表征。

4.4. 提高反思评价意识

诸多研究已经发现，问题解决过程都不是一个按照事先制定好的程序一成不变地加以实施的机械过程，而是一个需要不断对所发生的情况进行自我评价并随时可以进行调整的动态过程。“学而不思则罔”，只是一味地训练而并不进行反思，这样的学习是无效的。因此，教师在教学中应该加强学生元认知水平的培养，提高学生反思与评价的意识，学会对数学问题解决的过程进行评价。例如相关信息的选择是否正确、数学问题的表征是否合理、解决对策是否有效、是否存在更简单的解决对策，通过对这些问题的评价与反思，及时地对问题解决的各环节进行调控，从而使问题得到解决。这样不仅可以提升训练的效果，而且在一定程度上也减轻了学生的压力，促进学生的发展。

5. 结语

数学问题解决能力作为学生的一种关键能力，不仅在数学教育中具有重要性，对学生今后的发展同样具有深远的影响。本文尽管对影响学生数学问题解决能力的四种主要因素进行了总结并提出了对应的建议，但由于调查的学生样本不是很多且调查方法单一，因此还需继续完善，这也是今后提升的方向。

参考文献

- [1] 王艳玲. 小学生数学问题解决的表现及影响因素的研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 东北师范大学, 2017.

-
- [2] 喻平. 数学问题解决认知模式及教学理论研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2002.
 - [3] 曹一鸣, 黄秦安, 马波. 数学教学论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 246-247.
 - [4] 何小亚. 解决数学问题的心理过程分析[J]. 数学教育学报, 2004, 13(3): 34-36.
 - [5] 庞维国. 数学学习与教学设计(小学卷) [M]. 上海: 上海教育出版社, 2005: 189-191.
 - [6] Schoenfeld, A.H. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Cambridge, XII.
 - [7] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
 - [8] 王晰. 中学生数学问题解决能力影响因素研究[D]: [硕士学位论文]. 延边: 延边大学, 2017.