

A New Method for C^1 Hermite Interpolation of Quartic PH Curve*

Hui Gao¹, Huahao Shou¹, Yongwei Miao², Liping Wang³

¹College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou

²College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou

³College of Business and Administration, Zhejiang University of Technology, Hangzhou
Email: shh@zjut.edu.cn

Received: Sep. 24th, 2013; revised: Oct. 19th, 2013; accepted: Oct. 29th, 2013

Copyright © 2013 Hui Gao et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: By means of complex representation of parametric curve, a new theorem for C^1 Hermite interpolation of quartic PH curve is proposed, and an intrinsic relationship between five control points of a quartic PH curve is established. The advantage of this representation is that the form is very simple and it can be used to calculate the quartic PH curve directly. Therefore, the calculation is greatly simplified, which makes the quartic PH curve more easily be applied to industrial product design and manufacture.

Keywords: Bézier Curve; PH Curve; Hermite Interpolation

四次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值的一种新方法*

高 晖¹, 寿华好¹, 缪永伟², 王丽萍³

¹浙江工业大学理学院, 杭州

²浙江工业大学计算机科学与技术学院, 杭州

³浙江工业大学经贸管理学院, 杭州

Email: shh@zjut.edu.cn

收稿日期: 2013 年 9 月 24 日; 修回日期: 2013 年 10 月 19 日; 录用日期: 2013 年 10 月 29 日

摘 要: 通过使用参数曲线的复数表示形式给出了求解四次 PH 曲线插值的一个新定理, 找到了五个控制顶点的内在关系式, 优点是形式上非常简洁且可直接求得参数曲线, 从而简化了计算, 使得四次 PH 曲线更加方便应用于各工业产品设计及加工领域。

关键词: Bézier 曲线; PH 曲线; Hermite 插值

1. 引言

多项式曲线由其简洁的表达形式和丰富的造型能力以及计算的方便性, 在 CAD、计算机图形学等领域得到了广泛的应用(如公路与铁路、机械零件以及机器人运动轨迹生成的设计)。但一般情况下, 多项式曲线的弧长和等距线不具有有理形式。为此, Farouki 等首次提出了 PH 曲线的概念, 即平面参数曲线的等

*基金项目: 国家自然科学基金(No. 61272309, 61070135)。

距线中所涉及的法向量中的分母, 如果它是一个完全平方, 我们把具有这样性质的曲线称为 PH 曲线, 它是一类具有优良性质的多项式曲线, 可用于解决曲线弧长和等距线的有理表示问题。

对于奇数次的 PH 曲线已经涌现了大量的研究成果, 比如 Meek 等^[1]给出了平面分段三次 PH 曲线的 G^1 插值算法; Farouki 等^[2]给出了 C^1 连续的 Hermite 条件下五次 PH 曲线的构造方法; Yong 等^[3]给出了五

次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法, 并讨论了最优解的选取标准; Jüttler^[4]讨论了七次 PH 曲线的 Hermite 插值方法等。但很少涉及到偶次 PH 曲线的 Hermite 插值问题。为此, 近年来桂校生等^[5]提出了四次抛物-PH 曲线的 Hermite 插值; 张威等^[6]提出了四次 PH 曲线的渐开线及其几何 Hermite 螺线插值。

针对四次 PH 曲线的 C¹Hermite 插值问题, 桂校生等^[5]通过导矢和积分的方法来求解满足插值条件的曲线, 缺点是需求解多个中间参数。本文找到了五个控制顶点的内在关系式, 即对任意给定的四个控制顶点可直接求得另一个控制顶点, 避免了过多参数的求解。由此得到了一种求解满足 C¹Hermite 插值条件的四次 PH 曲线的新方法, 更加方便地应用于各个领域。

2. 四次 PH 曲线

定义 2.1^[7]: 对一条多项式参数曲线

$$\begin{cases} p_1 - p_0 = -\frac{\xi}{4}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \\ p_2 - p_1 = \frac{(1-\xi)}{12}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) - \frac{\xi}{6}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) \\ p_3 - p_2 = \frac{(1-\xi)}{6}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) - \frac{\xi}{12}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) \\ p_4 - p_3 = \frac{(1-\xi)}{4}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) \end{cases} \quad (1)$$

若令 $Q_0 = u_0 + I \cdot v_0$, $Q_1 = u_1 + I \cdot v_1$, 则四次 PH 曲线的复数表示形式为:

$$\begin{cases} \Delta p_0 = \frac{(-\xi)}{4}Q_0^2 \\ \Delta p_1 = \frac{(1-\xi)}{12}Q_0^2 + \frac{(-\xi)}{6}Q_0Q_1 \\ \Delta p_2 = \frac{(1-\xi)}{6}Q_0Q_1 + \frac{(-\xi)}{12}Q_1^2 \\ \Delta p_3 = \frac{(1-\xi)}{4}Q_1^2 \end{cases} \quad (2)$$

由四次 PH 曲线控制顶点的关系式(1)得各边长如下:

$$\begin{aligned} |\Delta p_0| &= \frac{|-\xi|}{4}(u_0^2 + v_0^2) \\ |\Delta p_1| &= \sqrt{\frac{(1-\xi)^2}{144}(u_0^2 + v_0^2)^2 + \frac{(-\xi)(1-\xi)}{36}(u_0^2 + v_0^2)(u_0u_1 + v_0v_1) + \frac{(-\xi)^2}{36}(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} \\ |\Delta p_2| &= \sqrt{\frac{(-\xi)^2}{144}(u_1^2 + v_1^2)^2 + \frac{(-\xi)(1-\xi)}{36}(u_1^2 + v_1^2)(u_0u_1 + v_0v_1) + \frac{(1-\xi)^2}{36}(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} \\ |\Delta p_3| &= \frac{|1-\xi|}{4}(u_1^2 + v_1^2) \end{aligned} \quad (3)$$

$P(t) = (x(t), y(t))$, 如果存在一个多项式 $\sigma(t)$ 使得 $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$, 则称曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ 为 Pythagorean-Hodograph 曲线(简称 PH 曲线)。

引理 2.1^[7]: 设 $u(t)$, $v(t)$ 和 $w(t)$ 为非零实系数多项式(不都为常数), 且 $u(t)$ 与 $v(t)$ 互素, $w(t)$ 是首项系数为 1 的多项式, 则具有下列形式:

$x'(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t))$; $y'(t) = 2w(t)u(t)v(t)$ 的平面参数曲线 $(x(t), y(t))$ 满足 Pythagorean 条件, 从而这种形式的曲线为平面 Pythagorean 速端曲线(PH 曲线)。

当给出 $w(t) = t - \xi$, $u(t) = u_0(1-t) + u_1t$, $v(t) = v_0(1-t) + v_1t$, 其中 ξ, u_0, v_0, u_1, v_1 为实数, 由此可构造四次 PH 曲线, 利用 Bézier 曲线的求导公式:

$P'(t) = 4 \sum_{i=0}^3 \Delta p_i B_i^3(t)$, 其中 $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$, 可得四次 PH 曲线的控制顶点满足如下关系式:

根据上述关系式，我们进一步整理得：

$$\frac{|\Delta p_1|^2}{|\Delta p_0|} \cdot |\xi| - \frac{|\Delta p_2|^2}{|\Delta p_3|} \cdot |1-\xi| = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{|\xi|^2}{|1-\xi|} \cdot |\Delta p_3| - \frac{|1-\xi|^2}{|\xi|} \cdot |\Delta p_0| \right] \quad (4)$$

此式表明了边长与 ξ 之间的关系，进一步说明了 $w(t)$ 可起到形状因子的作用，为了避免曲线产生尖点，通常取 $\xi > 1$ 或 $\xi < 0$ 。

3. 四次 PH 曲线的 C¹Hermite 插值

对于四次 PH 曲线的 C¹Hermite 插值问题实质上是给定外控制顶点 p_0, p_1, p_3, p_4 来确定它的内控制顶点 p_2 ，控制顶点 p_i 的坐标分量： (x_i, y_i) ， $i=0,1,2,3,4$ 。

算法一：桂校生等的算法是通过令

$P'(t) = [a(1-t) + bt][(1-t) + ct]^2$ ，求出 $a = T_0$ ， $b = T_1/c^2$ ，其中 $T_0 = P'(0)$ ， $T_1 = P'(1)$ ，再根据导矢和积分推导得：

$$\begin{cases} p_1 - p_0 = T_0/4 \\ p_2 - p_1 = T_1/(12c^2) + (T_0c)/6 \\ p_3 - p_2 = (T_0c^2)/12 + T_1/(6c) \\ p_4 - p_3 = T_1/4 \end{cases}$$

整理得满足约束条件为：

$T_1 + 2T_1c + 3(4p_0 - 4p_4 + T_0 + T_1)c^3 + 2T_0c^3 + T_0c^4 = 0$ 的四次方程并解出 c 的四个复根，进而求得 p_2 ，画出四条满足插值条件的 PH 曲线。

算法二：本文根据以下定理找到了五个控制顶点之间的内在关系式：

定理 1: 设 $\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3$ 为以复数表示的 Bézier 四次曲线控制多边形的边向量，若该曲线为 PH 曲线，则边向量间存在如下关系：

$$\begin{aligned} & (\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_3)^2 \\ & = 4(\Delta p_2^2 - \Delta p_1 \cdot \Delta p_3)(\Delta p_1^2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & (\Delta x_1 \Delta x_2 - \Delta x_0 \Delta x_3 + \Delta y_0 \Delta y_3 - \Delta y_1 \Delta y_2)^2 - (\Delta x_1 \Delta y_2 + \Delta x_2 \Delta y_1 - \Delta x_0 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_0)^2 \\ & = 4 \left[(\Delta x_2^2 - \Delta x_1 \Delta x_3 - \Delta y_2^2 + \Delta y_1 \Delta y_3) (\Delta x_1^2 - \Delta x_0 \Delta x_2 - \Delta y_1^2 + \Delta y_0 \Delta y_2) \right. \\ & \quad \left. - (\Delta x_2 \Delta y_2 - \Delta x_1 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_1) (2\Delta x_1 \Delta y_1 - \Delta x_0 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_0) \right] \end{aligned}$$

虚部：

$\Delta p_i = \Delta x_i + I \cdot \Delta y_i$ ， $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ， $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ ， x_i, y_i 为实数， $i=0,1,2,3$ ， I 为虚数单位。

证明：假设 $p_0 \neq p_1, p_3 \neq p_4$ ，则 $Q_0 \neq 0, Q_1 \neq 0$ ，

由(2)中第 1、第 4 两式得： $(-\xi) = \frac{4\Delta p_0}{Q_0^2}$ 和

$(1-\xi) = \frac{4\Delta p_3}{Q_1^2}$ ，代入(2)中其余两式并整理得：

$$3\Delta p_1 \cdot Q_0 Q_1^2 = \Delta p_3 \cdot Q_0^3 + 2\Delta p_0 \cdot Q_1^3 \text{ 和}$$

$3\Delta p_2 \cdot Q_0^2 Q_1 = \Delta p_0 \cdot Q_1^3 + 2\Delta p_3 \cdot Q_0^3$ ，两式同除以 Q_0^3 并整理得：

$$\begin{aligned} \Delta p_0 \cdot \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 - 2\Delta p_1 \cdot \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right) + \Delta p_2 &= 0 \\ \Delta p_1 \cdot \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 - 2\Delta p_2 \cdot \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right) + \Delta p_3 &= 0 \end{aligned}$$

分别乘 $\Delta p_1, \Delta p_0$ 并相减约去平方项整理得：

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_3}{2(\Delta p_1^2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_2)}$$

得：

$$\begin{aligned} \Delta p_0 \cdot \frac{(\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_3)^2}{4(\Delta p_1^2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_2)^2} \\ - 2\Delta p_1 \cdot \frac{(\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_3)}{2(\Delta p_1^2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_2)} + \Delta p_2 &= 0 \end{aligned}$$

整理得：

$$\begin{aligned} & (\Delta p_1 \cdot \Delta p_2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_3)^2 \\ & = 4(\Delta p_2^2 - \Delta p_1 \cdot \Delta p_3)(\Delta p_1^2 - \Delta p_0 \cdot \Delta p_2) \end{aligned} \text{ 得证。}$$

根据上述关系式将 $\Delta p_i = \Delta x_i + I \cdot \Delta y_i, (i=0,1,2,3)$ 代入，按实部与虚部分别对应相等得点 $p_2(x_2, y_2)$ 的两个方程：

实部：

$$\begin{aligned}
 & (\Delta x_1 \Delta x_2 - \Delta x_0 \Delta x_3 + \Delta y_0 \Delta y_3 - \Delta y_1 \Delta y_2)(\Delta x_1 \Delta y_2 + \Delta x_2 \Delta y_1 - \Delta x_0 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_0) \\
 & = 2 \left[(\Delta x_2^2 - \Delta x_1 \Delta x_3 - \Delta y_2^2 + \Delta y_1 \Delta y_3)(2 \Delta x_1 \Delta y_1 - \Delta x_0 \Delta y_2 - \Delta x_2 \Delta y_0) \right. \\
 & \quad \left. + (\Delta x_1^2 - \Delta x_0 \Delta x_2 - \Delta y_1^2 + \Delta y_0 \Delta y_2)(2 \Delta x_2 \Delta y_2 - \Delta x_1 \Delta y_3 - \Delta x_3 \Delta y_1) \right]
 \end{aligned}$$

说明：上述方程虽展开后形式上复杂，实际上是两个方程两个未知数 x_2, y_2 ，其它都为常数，通过

Mathematica 可求得四组实数解 $p_2(x_2, y_2)$ 。进而由下列公式(5)：

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cdot B_{0,4}(t) + x_1 \cdot B_{1,4}(t) + x_2 \cdot B_{2,4}(t) + x_3 \cdot B_{3,4}(t) + x_4 \cdot B_{4,4}(t) \\ y(t) = y_0 \cdot B_{0,4}(t) + y_1 \cdot B_{1,4}(t) + y_2 \cdot B_{2,4}(t) + y_3 \cdot B_{3,4}(t) + y_4 \cdot B_{4,4}(t) \end{cases}$$

求得参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ ，其中 $B_{i,4}(t)$ 为 Bernstein 基函数。

下面通过具体例子说明本文算法的优越性。

例 1 若给定 $T_0 = 1+i, T_1 = 1-i, p_0 = 0, p_4 = 1$ 。

4. 算例

方法一(桂校生等)：先容易求得： $p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot i$,

由 $p_1 - p_0 = T_0/4$ 和 $p_4 - p_3 = T_1/4$ 知，给定 p_0, p_1, p_3, p_4 与 p_0, T_0, T_1, p_4 其实是一样的。

$p_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot i, a = 1+i$ 。再根据算法一得 c 的四个复根为：

$$\{c = -3.18016 + 0.804825i, c = 0.475687 - 0.879615i, c = 1, c = -0.295522 + 0.747896i\}$$

由 $b = T_1/c^2$ 得

$$\{b = 0.125943 - 0.0375357i, b = 0.289397 + 1.38429i, b = 1-i, b = 14.5847 - 4.34675i\}$$

进而求得

$$\{p_2 = -0.40367 - 0.149018i, p_2 = 0.5 + 0.298036i, p_2 = 0.5 + 0.333333i, p_2 = 1.40367 - 0.149018i\}$$

画出参数曲线。

方法二(本文)：先容易求得： $p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot i$,

$p_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot i$ ，根据定理 1 可直接求得四组实数解：

$$\begin{aligned}
 & \{x_2 = -0.4036697472, y_2 = -0.1490179095\}, \\
 & \{x_2 = 0.5, y_2 = 0.2980358190\}, \{x_2 = 0.5, y_2 = 1/3\}, \text{四次} \\
 & \{x_2 = 1.4036697472, y_2 = -0.1490179095\}
 \end{aligned}$$

PH 曲线的 C¹Hermite 插值示意图(图 1~图 4)：

图 1 的参数曲线：

$$\begin{cases} x(t) \approx t - 5.42202t^2 + 10.844t^3 - 5.42202t^4 \\ y(t) \approx t - 3.89411t^2 + 5.78821t^3 - 2.89411t^4 \end{cases}$$

图 2 的参数曲线：

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) \approx t - 1.21179t^2 + 0.42357t^3 - 0.211785t^4 \end{cases}$$

图 3 的参数曲线：

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t - t^2 \end{cases}$$

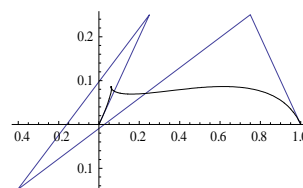


Figure 1. $P_2(-0.40367, -0.14902)$
图 1. $P_2(-0.40367, -0.14902)$

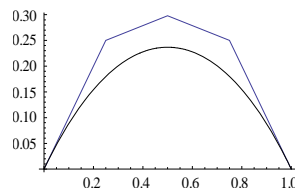


Figure 2. $P_2(0.5, 0.29804)$
图 2. $P_2(0.5, 0.29804)$

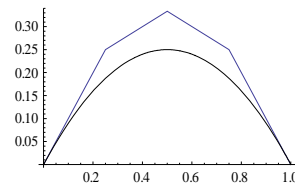


Figure 3. $P_2(0.5, 0.33333)$
图 3. $P_2(0.5, 0.33333)$

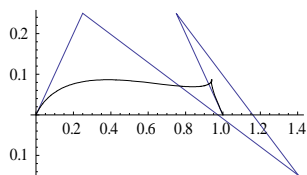


Figure 4. $P_2(1.40367, -0.14902)$
图 4. $P_2(1.40367, -0.14902)$

图 4 的参数曲线:

$$\begin{cases} x(t) \approx t + 5.42202t^2 - 10.844t^3 + 5.42202t^4 \\ y(t) \approx t - 3.89411t^2 + 5.78821t^3 - 2.89411t^4 \end{cases}$$

5. 结论

本文给出了求解四次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值的一种新方法。传统上通过导矢和积分来求解满足插值条件的曲线，本文找到了五个控制顶点的内在关系式，在此基础上可容易求得四条满足插值条件的曲线，且形式上更加简洁，与传统的几何造型方法相比

具有明显的优势。

参考文献 (References)

- [1] Meek, D.S. and Walton, D.J. (1997) Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **81**, 299-309.
- [2] Farouki, R.T. and Neff, C.A. (1995) Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Mathematics of Computation*, **64**, 1589-1609.
- [3] Yong, J. and Zheng, W. (2005) Geometric method for Hermite interpolation by a class of PH quintics. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, **17**, 990-995.
- [4] Jüttler, B. (2001) Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Mathematics of Computation*, **70**, 1089-1111.
- [5] 桂校生, 黄有度 (2010) 四次抛物-PH 曲线的 Hermite 插值. *佳木斯大学学报*, **2**, 281-284.
- [6] 张威, 王国瑾 (2011) 四次 PH 曲线的渐开线及其几何 Hermite 螺线插值. *计算机辅助几何设计与图形学学报*, **2**, 216-222.
- [7] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民 (2001) 计算机辅助几何设计. 高等教育出版社, 北京, 278-318.

附录 1

关系式(1)的证明:

由 Bézier 曲线的求导公式知:

$$P'(t) = 4(p_1 - p_0) \cdot (1-t)^3 + 12(p_2 - p_1) \cdot (1-t)^2 t + 12(p_3 - p_2) \cdot (1-t)t^2 + 4(p_4 - p_3) \cdot t^3$$

由引理 2.1 知:

$$\begin{cases} x'(t) = (-\xi)(u_0^2 - v_0^2)(1-t)^3 + [2(-\xi)(u_0 u_1 - v_0 v_1) + (1-\xi)(u_0^2 - v_0^2)] \cdot (1-t)^2 t \\ \quad + [(-\xi)(u_1^2 - v_1^2) + 2(1-\xi)(u_0 u_1 - v_0 v_1)] \cdot (1-t)t^3 + (1-\xi)(u_1^2 - v_1^2) \cdot t^3 \\ y'(t) = 2(-\xi)u_0 v_0 (1-t)^3 + 2[(-\xi)(u_0 v_1 + u_1 v_0) + (1-\xi)u_0 v_0] (1-t)^2 t \\ \quad + 2[(-\xi)u_1 v_1 + (1-\xi)(u_0 v_1 + u_1 v_0)] (1-t)t^2 + 2(1-\xi)u_1 v_1 t^3 \end{cases}$$

又因为 $P'(t) = (x'(t), y'(t))$, 对应系数相等, 整理得关系式(1), 得证。

附录 2

关系式(4)的证明:

由式(3)知 $\frac{|\Delta p_0|}{u_0^2 + v_0^2} = \frac{|\xi|}{4}$ 和 $\frac{|\Delta p_3|}{u_1^2 + v_1^2} = \frac{|1-\xi|}{4}$, 又由(3)中间两式知:

$$\frac{|\Delta p_1|^2}{u_0^2 + v_0^2} = \frac{(1-\xi)^2}{144}(u_0^2 + v_0^2) + \frac{(-\xi)(1-\xi)}{36}(u_0 u_1 + v_0 v_1) + \frac{(-\xi)^2}{36}(u_1^2 + v_1^2)$$

和

$$\frac{|\Delta p_2|^2}{u_1^2 + v_1^2} = \frac{(-\xi)^2}{144}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{(-\xi)(1-\xi)}{36}(u_0 u_1 + v_0 v_1) + \frac{(1-\xi)^2}{36}(u_0^2 + v_0^2)$$

相减得:

$$\frac{|\Delta p_1|^2}{u_0^2 + v_0^2} - \frac{|\Delta p_2|^2}{u_1^2 + v_1^2} = \frac{3(-\xi)^2}{144}(u_1^2 + v_1^2) - \frac{3(1-\xi)^2}{144}(u_0^2 + v_0^2)$$

将 $u_0^2 + v_0^2$ 与 $u_1^2 + v_1^2$ 整体带入并整理得关系式(4), 得证。