

# 三维静电场球坐标系曲面边界元法仿真精度分析

王泽忠, 王 迪

华北电力大学 电气与电子工程学院, 北京  
Email: 369097575@qq.com

收稿日期: 2021年2月20日; 录用日期: 2021年3月15日; 发布日期: 2021年3月24日

---

## 摘 要

三维电场的仿真数值计算精度与模型网格的选择和密度有密切关系, 相关研究较少, 已公开发表的研究成果中数值计算的网格划分大多靠经验, 缺少网格剖分规范。基于球坐标系的曲面边界元法以曲面单元离散求解的模型表面, 可以减少平面单元的拟合误差。对球面划分不同区域分别进行三角形网格和四边形网格剖分, 对不同网格剖分面积和密度进行控制, 讨论不同区域网格对仿真计算精度的影响, 给出球面模型兼顾计算内存及计算时间下的最佳剖分方法。讨论了不同极点位置对球面积分的影响, 结论可以广泛应用于工程实际。

## 关键词

静电场, 曲面边界元法, 精度分析

---

# Simulation Accuracy Analysis of Surface Boundary Element Method in 3D Electrostatic Field Spherical Coordinate System

Zezhong Wang, Di Wang

School of Electrical and Electronic Engineering, North China Electric Power University, Beijing  
Email: 369097575@qq.com

Received: Feb. 20<sup>th</sup>, 2021; accepted: Mar. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Mar. 24<sup>th</sup>, 2021

文章引用: 王泽忠, 王迪. 三维静电场球坐标系曲面边界元法仿真精度分析[J]. 计算机科学与应用, 2021, 11(3): 618-627. DOI: 10.12677/csa.2021.113063

## Abstract

The numerical calculation accuracy of the 3D electric field simulation is closely related to the selection and density of the model grid elements. There are few related researches, and most numerical calculations meshes in published research results rely on experience, and there is a lack of mesh selection specifications. The surface boundary element method based on the spherical coordinate system uses the surface elements to discretely solve the model surface, which can reduce the fitting errors of the plane elements. Triangular meshing and quadrilateral meshing are divided into different areas of the spherical surface, and the area and density of different meshes are controlled. The influence of different meshes on the simulation calculation accuracy is discussed. The spherical model is given to take into account the calculation memory and calculation time. The best subdivision method is established. Discussed the influence of different positions of the poles on the area of the ball, the conclusion can be widely used in engineering calculation.

## Keywords

Electrostatic Field, Surface Boundary Element Method, Error Analysis

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在工程实际中, 由于设备仪器及环境的复杂性, 分析问题常常需要通过计算机建立仿真模型, 利用数值计算的方式对模型进行仿真计算, 从而衡量设备仪器是否符合工程标准及故障状态的判断等。

边界元法是工程中求解问题时常用到的数值分析方法之一, 区别于需要对全空间进行剖分计算的有限元法, 边界元法只需要对模型表面进行剖分计算, 大大降低了仿真计算的求解维度和积分点数量, 更符合工程实际问题对计算效率和计算内存的要求[1]。

和有限元法相同, 边界元法求解的精度十分依赖于模型网格的剖分情况。边界元法发展早期采用线性插值函数, 将模型表面剖分为平面三角形或平面四边形, 利用多个平面拟合曲面, 在离散的平面单元上进行积分计算[2]-[12]。由于平面单元与曲面具有一定误差, 边界元法积分精度受剖分网格的密度影响, 网格越多则平面单元与曲面越接近, 误差越小, 如图 1 所示, 显然增大网格密度可以更好地拟合曲面减小模型误差。但网格数量增多会增加求解的节点数和单元数, 导致计算量和计算内存成倍增加。通过坐标变换, 可以实现对模型进行曲面单元剖分, 良好地解决平面单元拟合曲面带来的误差[2] [7] [8]。

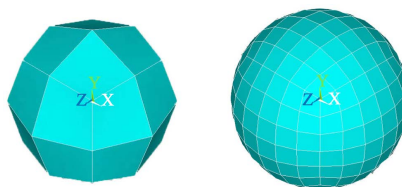


Figure 1. Mesh fitting with different densities

图 1. 不同网格密度拟合情况示意图

在已公开的研究成果中, 关于静电场的大量数值仿真计算对模型的网格剖分程度仅依靠“经验”,

未有详细的网格剖分规范可以参照, 显然会无意识地造成计算成本和计算误差的增大。基于球坐标系的曲面边界元法网格剖分对仿真计算精度的研究在目前已公开发表的文献中未有详细体现, 由于球模型表面剖分受极点处网格剖分及极轴相对位置的影响, 给出球坐标系下曲面边界元法网格剖分的规则对边界元法仿真数值计算的发展和應用有重要指导意义。

## 2. 球坐标系曲面边界元法积分原理

### 2.1. 间接边界法

间接边界元法是基于点电荷的基本解和叠加原理的边界元方法[2] [3] [4] [5] [7] [8] [9] [10]。区域内任意点的电位受边界电荷影响, 面电荷密度  $\sigma'(r')$  作为源, 任意场点的电位  $\varphi(r)$  可以表示为:

$$\varphi(r) = \iint_S \frac{\sigma'(r')}{4\pi\epsilon_0 R} dS \tag{1}$$

式(1)中  $R$  是场点与源点的距离,  $\epsilon_0$  为真空介电常数。

利用伽辽金加权余量法可以将积分方程离散为代数方程组从而进行数值计算求解, 边界积分方程的伽辽金离散形式如式(2)所示。

$$\begin{aligned} & 4\pi \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} \left( \iint_{S_e} M_{m_e,i} M_{n_e,j} dS_e \right) \varphi_n \\ & = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{e'=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_p} \left( \iint_{S_e} M_{m_e,i} \iint_{S_{e'}} \frac{1}{R} M_{n_{e'},j} dS_{e'} dS_e \right) \lambda_n \end{aligned} \tag{2}$$

(m = 1, 2, 3, \dots, n\_n)

将  $\varphi_n$  和  $\lambda_n$  写成向量, 将上式整理成矩阵相乘的形式为:

$$A \{\lambda\} = B \{\varphi\} \tag{3}$$

其中  $\varphi$  是导体表面的节点电位构成的列向量,  $\lambda$  是  $\sigma'/\epsilon_0$  构成的列向量。

矩阵  $A$ 、 $B$  仅与边界的几何性质有关, 单元矩阵可表示为[7] [8] [9] [10]:

$$\begin{aligned} A_{e,i,e',j} &= \iint_{S_e} N_i \iint_{S_{e'}} \frac{1}{R} N_j dS_{e'} dS_e \\ B_{e,i,e,j} &= \iint_{S_e} N_i N_j dS_e \end{aligned} \tag{4}$$

式中  $N_i$ ,  $N_j$  为插值函数, 根据上述理论, 若已知边界即可求解表面电场的代数方程组。

### 2.2. 基于球坐标变换的曲面边界元法

直角坐标系下的球面曲面单元可以映射为二维  $\psi$ - $\theta$  球坐标系下的平面单元, 如图 2 所示。则边界元法对曲面单元的积分计算可以转化为二维平面单元积分计算。

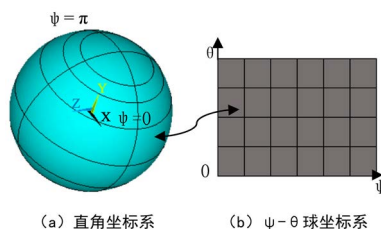


Figure 2. Cartesian coordinate system and spherical coordinate system  
图 2. 直角坐标系与球坐标系转换关系

直角坐标下点的坐标与  $\psi$ - $\theta$  球坐标系下坐标转换关系如下:

$$y = r_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad x = r_0 \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r_0 \cos \theta \quad (5)$$

式中  $\theta$  为场点 - 坐标原点间连线与  $z$  坐标轴间夹角,  $\theta \in [0, \pi]$ ;  $\psi$  为方位角, 即场点 - 坐标原点间连线与  $x$  坐标轴间夹角,  $\psi \in [0, 2\pi]$ 。

可以根据坐标转换关系实现直角坐标系下的曲面四边形的精确积分计算, 但由于这种转换关系是基于对球面按照等  $\theta$  线、等  $\psi$  线均匀规则剖分的, 由于球表面存在上下两个极点, 极点附近无法分割成四边形, 因此基于球坐标系变换的曲面边界元法在网格划分时极点处必须划分为曲面三角形网格进行计算。则对球面区域进行分割, 划分三角形和四边形剖分范围, 讨论其对计算精度的影响对边界元数值仿真计算的发展和應用有重要意义。

### 3. 球坐标系曲面边界元法精度分析

距离地面无限远处建立半径为 1 m 的球模型, 对其加 10 V 电压, 易知球表面各点电场强度应为 10 V/m。对球进行规则三角形剖分, 剖分单元数分别为 336、1296、5168, 剖分 5168 单元网格图如图 3 所示, 计算结果如表 1 所示。

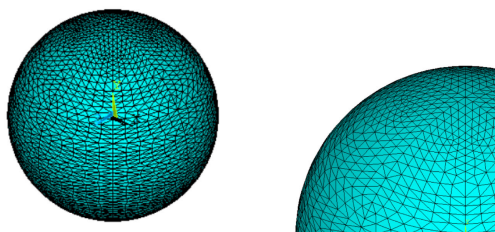


Figure 3. 5168-element triangular divided mesh  
图 3. 5168 单元三角形规则剖分网格图

Table 1. Calculation results of triangular mesh  
表 1. 规则三角形剖分边界元计算结果

三角形规则剖分网格数	最大电场强度 (V/m)	最小电场强度 (V/m)	计算时间 (s)
336 (平面)	19.288	4.832	5
336 (曲面)	16.369	6.639	5
1296 (平面)	11.202	9.220	40
1296 (曲面)	10.743	9.537	42
5168 (平面)	10.879	9.666	800
5168 (曲面)	10.738	9.718	930

由表 1 可知, 随着网格密度增大球体表面场强数值趋于稳定, 在同样网格剖分情况下, 曲面边界元法精度明显高于平面边界元法, 并且随着网格数递减这种高精度优势越明显, 因此利用少量的曲面单元替代平面单元, 可以达到少网格高精度的目的。

随着网格数量增加, 计算时间也明显增加, 场强与解析解 10 V/m 的相对误差逐渐减小, 在 5168 网格数情况下, 最大相对误差在百分之七以内, 针对单球体在实际工程仿真计算中剖分几千个网格是不现实的, 因此在满足精度要求下, 尽可能减少剖分网格的数量, 提高计算效率是研究仿真数值计算精度的重要目的。

对球体表面进行曲面四边形剖分, 由球坐标系转换算法原理可知, 球表面的上下极点处需剖分为曲面三角形单元, 其余球面规则剖分为曲面四边形单元, 三角形单元数为 192, 总单元数为 384, 剖分网格如图 4 所示。将单元和节点数据代入球坐标曲面边界元算法进行数值计算, 计算时间为 21 s, 最大场强数值为 10.581 V/m, 最小场强数值为 9.575 V/m, 显然计算结果的最大相对误差在百分之五以内, 场强分布云图如图 5 所示。

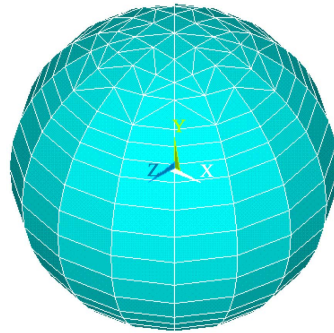


Figure 4. 384-element hybrid subdivision mesh  
图 4. 384 单元混合剖分网格图

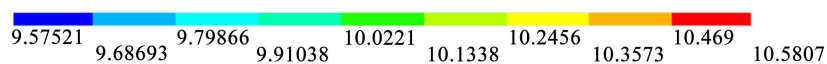
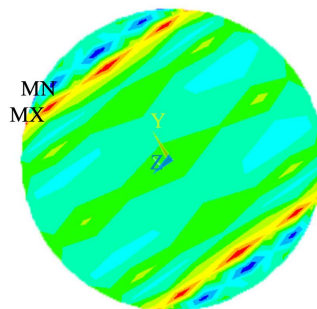
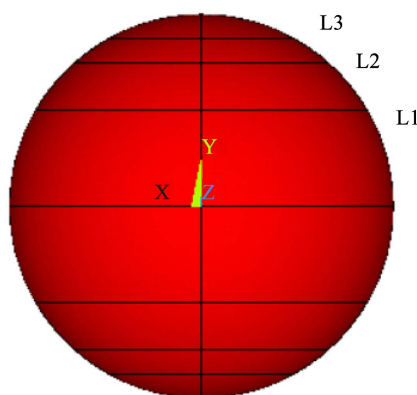


Figure 5. 384-element electric field intensity map  
图 5. 384 单元场强云图

曲面三角形与曲面四边形混合剖分情况下实现了仅 384 个网格单元就可以达到误差在百分之五以内的仿真计算精度, 大大简化了计算内存和计算时间。可以看出曲面四边形单元的积分精度是明显优于三角形单元的, 但对于球形模型的表面电场积分计算不可避免极点处三角形网格的剖分, 因此讨论极点处网格剖分情况以及多导体间极点位置即极轴的相对方向对仿真计算精度的影响意义重大。

### 3.1. 极点网格的选择

建立双球模型, 球半径为 1 m, 间距为 4 m, 电压分别为 +10 V、-10 V。以球半径为参照, 对球面进行上下对称的不同程度分割。分割线如图 6 所示, 以过球心水平圆周线为基准, 由下到上水平分割线分别标记为: L1、L2、L3。L1 为距离球心竖直高度 0.5 m 即半径 1/2 处圆周线; L2 为距离球心竖直高度 0.75 m 即半径 3/4 处圆周线; L3 为距离球心竖直高度 0.875 m 即半径 7/8 处圆周线。



**Figure 6.** Schematic diagram of dividing line L1-L3  
**图 6.** L1-L3 分割示意图

根据 3 条分割线划定不同的球面极点处三角形网格剖分范围, 将剖分单元及节点数据代入曲面边界元法进行计算。

以 L1 及其下方对称线为分割线, 对球面分割成三部分, 上下包含两极点的曲面用三角形网格剖分, 中间曲面用四边形网格剖分, 为研究网格密度对精度的影响, 在 L1 为分割线情况下建立 5 种不同网格密度模型, 各模型网格参数如表 2 所示, 各模型计算结果如表 3 所示。

**Table 2.** Model parameters in L1

**表 2.** L1 分割线下单球面不同密度网格剖分模型参数

模型编号	上下曲面三角形单元个数	中间曲面四边形单元个数	总单元个数
1	32	80	112
2	40	144	184
3	192	192	384
4	640	576	1216
5	1728	576	2304

**Table 3.** Calculation results in L1

**表 3.** L1 分割线下单球面曲面边界元计算结果

模型编号	最大电场强度 (V/m)	最小电场强度 (V/m)	表面电荷量 (pC)	计算时间 (s)
1	14.736	10.498	1347.648	3
2	13.627	10.917	1344.040	10.1
3	13.633	10.809	1341.756	30
4	13.449	10.884	1338.681	204
5	13.421	10.924	1338.547	900

选取规则曲面三角形网格剖分球面, 单球面网格数 5168 的双球模型计算结果作为基准解分析误差。基准解计算时间为 40 min, 表面总电荷量为 1336.497 pC, 最大场强值为 13.431 V/m, 最小场强值为 11.145 V/m, 单球场强云图如图 7 所示。

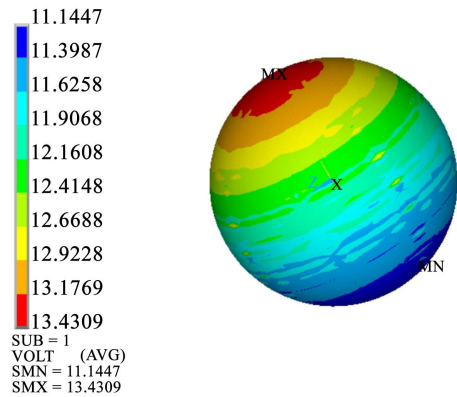


Figure 7. Reference solution electric field cloud map  
图 7. 基准解电场云图

根据最大场强、最小场强、电荷量计算模型相对误差, 结果如图 8 所示。

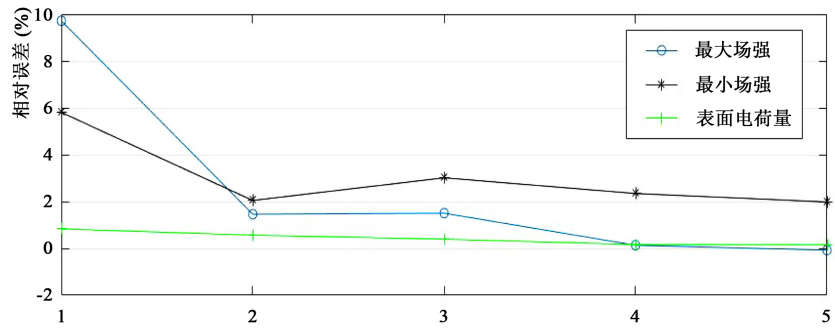


Figure 8. Relative error graph  
图 8. 模型相对误差图

由图 8 可知, 模型 1、2 三角形网格密度情况相似, 四边形网格密度差距近一倍, 计算最大相对误差减小近百分之八; 模型 4、5 为四边形剖分情况相同而三角形剖分密度差距近 3 倍, 计算精度差距不大, 最大误差均控制在百分之二以内。可得结论, 在三角形剖分区域相同的情况下, 三角形网格密度对仿真计算结果影响不大, 四边形网格密度对计算精度的影响较大。

模型 2 在三个衡量数值结果中较有优越性, 图 9 为模型 2、模型 3 场强云图。

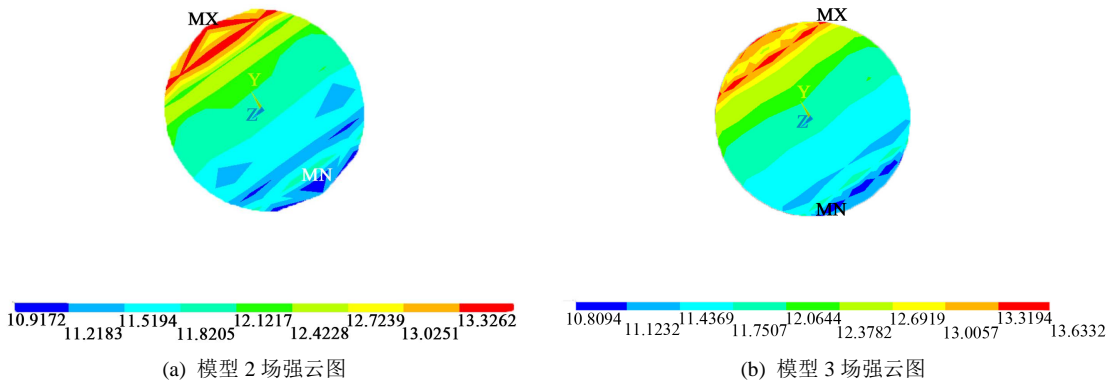


Figure 9. Electric field intensity cloud map  
图 9. 模型 2、模型 3 场强云图

显然模型 3 场强分布优于模型 2, 且与基准解场强云图差别较小, 模型 3 的三个最大误差在百分之四以内, 保证了误差较小情况下网格数量尽可能减少。

进一步缩小球面三角形单元剖分区域, 以 L2 为分割线, 分割方法同 L1, 将球面分成上中下三个部分, 建立不同网格密度模型 3 个, 参数如表 4 所示, 曲面边界元计算结果如表 5 所示。

**Table 4.** Model parameters in L2

**表 4.** L2 分割线下单球面不同密度网格剖分模型参数

模型编号	上下曲面三角形单元个数	中间曲面四边形单元个数	总单元个数
1	32	144	176
2	112	288	400
3	192	288	480

**Table 5.** Calculation results in L2

**表 5.** L2 分割线下单球面曲面边界元计算结果

模型编号	最大电场强度 (V/m)	最小电场强度 (V/m)	表面电荷量 (pC)	计算时间 (s)
1	15.242	10.302	1348.327	8
2	14.114	10.689	1342.072	27.5
3	13.973	10.683	1342.007	37.4

由表 5 与表 3 对比可知, 在三角形及四边形网格密度均情况近似的情况下, 以 L2 为分割线划分三角形剖分区域的网格计算结果比以 L1 为分割线计算结果误差大, 且差距明显, 尽管缩小了计算时间, 但计算误差并未随四边形网格划分区域增大而减小。

进一步缩小球面三角形单元剖分区域, 以 L3 为分割线, 分割方法同 L1、L2, 建立不同网格密度模型 2 个, 参数如表 6 所示, 曲面边界元计算结果如表 7 所示。

**Table 6.** Model parameters in L3

**表 6.** L3 分割线下单球面不同密度网格剖分模型参数

模型编号	上下曲面三角形单元个数	中间曲面四边形单元个数	总单元个数
1	32	128	160
2	112	256	368

**Table 7.** Calculation results in L3

**表 7.** L3 分割线下单球面曲面边界元计算结果

模型编号	最大电场强度 (V/m)	最小电场强度 (V/m)	表面电荷量 (pC)	计算时间 (s)
1	14.736	10.498	1348.379	9
2	14.039	10.574	1342.360	28

对比 L3 分割下模型 2 与 L1 分割下模型 3 计算结果, 在网格密度近似的情况下, L3 分割情况下计算时间减少了 2 s, 但计算误差较 L1 情况下模型 3 更大。

因此可以进一步得出结论, 球形曲面边界元仿真计算精度受四边形网格影响更大, 在四边形剖分区



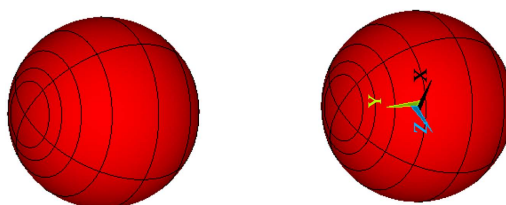
域固定的情况下, 网格密度越大计算精度越好; 对于整体球面剖分, 并非四边形剖分区域越大计算精度越好, 取极点到球心方向 1/2 处圆周为分割线, 将球面对称为上中下三个曲面, 上下曲面三角形剖分, 中间曲面四边形剖分, 计算精度最好。

对于工程实际应用, 给出 L1 分割线下模型 3 作为球形电极仿真计算网格剖分参考规范, 可以保证误差控制在百分之四以内的精度下, 计算时间仅 30 s 左右, 相比于边界元和有限元仿真计算节省了 10 min 以上计算时间及几千的网格数目。

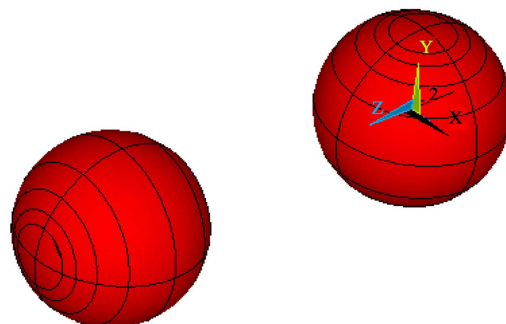
### 3.2. 极点位置的选择

多个球导体进行电场计算时涉及到每个球表面的网格剖分, 则球之间的极点位置选择即极轴间夹角度数对边界元仿真计算是否有影响, 在目前已公开的研究中未有涉及。进一步推动边界元算法在工程实际中的应用, 需要给出球间极轴夹角对边界元计算的影响。

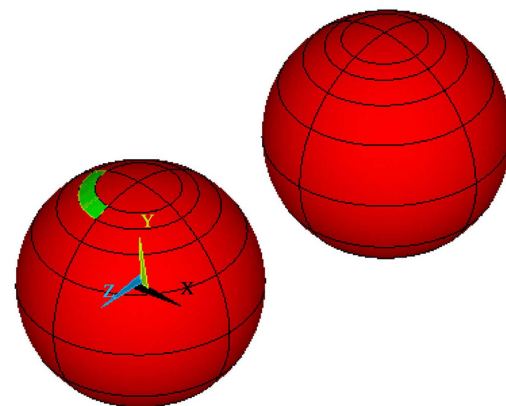
按照不同极轴夹角及球心与极轴夹角建立三个双球模型如图 10 所示。



(a) 模型 1 极轴夹角 0 度



(b) 模型 2 极轴夹角 90 度



(c) 模型 2 球心连线与极轴夹角 45 度

**Figure 10.** Model diagrams with different angles  
**图 10.** 改变角度模型图

由于球体间电容数值与球的相对摆放位置无关, 仅与球间距有关, 可以利用电容数值作为基准值计算仿真结果的误差。建立图 9 三个双球模型, 假设与地面相距无限远情况下, 双球间距 4 m, 球半径 1 m, 电压+10 V、-10 V。按照 3.1 节中给出的网格剖分模型简化计算结果如表 8 所示。

**Table 8.** Calculation results of models  
**表 8.** 不同模型曲面边界元计算结果

模型编号	最大电场强度 (V/m)	最小电场强度 (V/m)	单球表面电荷量 (pC)	电容数值 (pF)
1	18.1681	-18.1682	1499.494	149.95
2	18.3379	-18.1766	1499.648	149.96
3	18.033	-18.033	1499.747	149.97

由表 8 可知, 双球系统在三种不同极轴角度下计算结果差距不大, 误差在百分之一以内, 可以得出结论: 静电场球坐标系下曲面边界元数值计算中, 对球形电极的网格剖分只与网格的选择和密度有关, 与球间极轴相对角度无关, 剖分时可以不考虑极点位置选择的影响。

#### 4. 结束语

本文基于网格的选择和密度, 对球坐标系下曲面边界元仿真算法精度进行分析, 得出球形电极最佳剖分网格模型, 在保证计算精度的情况下大大缩减了计算时间和内存占用。讨论了不同极轴角度对计算精度的影响, 得出的仿真计算结论对工程上边界元算法的实际应用具有重要指导意义。

#### 参考文献

- [1] Silvester, P. (1969) A General High-Order Finite-Element Analysis Program Waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory & Techniques*, **17**, 204-210. <https://doi.org/10.1109/TMTT.1969.1126932>
- [2] 王泽忠, 李亚莎, 邓春华. 基于球坐标的三维静电场曲边四边形边界元方法[J]. 电工技术学报, 2007, 22(4): 32-36.
- [3] 王泽忠. 简明电磁场数值计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [4] 刘士利. 改进的边界元法及其在电场计算中的应用[D]: [博士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2011.
- [5] 刘姜玲, 王泽忠. 三维静电场边界元法的积分精度问题[J]. 高电压技术, 2005, 31(9): 21-24.
- [6] 帅春江, 郑勤红, 姚斌, 刘玲丽, 张学庆. 用线性边界元分析二维静电场问题[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2006, 26(5): 37-41.
- [7] 李亚莎, 王泽忠, 李咸善, 王斌. 球形电极三维静电场的球面三角形边界元算法[J]. 电工技术学报, 2009, 24(3): 8-13.
- [8] 王泽忠, 李亚莎. 基于球坐标的三维静电场曲边三角形边界元法[J]. 电工技术学报, 2006, 21(9): 122-126.
- [9] 邓春华. 三维静电场高精度边界元方法的研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2007.
- [10] 王泽忠, 石雨鑫. 三维电场多极子曲面边界元方法研究[J]. 电工技术学报, 2018, 33(24): 5797-5804.
- [11] 郑勤红, 解福瑶, 钱双平, 李景天. 用边界元法计算含有电位悬浮导体的静电场问题[J]. 电工电能新技术, 1998(2): 12-15.
- [12] 解福瑶, 郑勤红, 钱双平. 三维静电场分析的边界元场强计算问题[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1997(2): 21-26.