Computer Science and Application 计算机科学与应用, **2022, 12(5), 1413-1424**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/csa
https://doi.org/10.12677/csa.2022.125141

Hans汉斯

六元语言真值模态命题逻辑及其归结自动推理研究

王诗慧[1]，**王艳芳**[2]，**崔晓松**[3*]

[1]辽宁师范大学，数学学院，辽宁 大连
[2]辽阳职业技术学院，计算机科学系，辽宁 辽阳
[3]辽宁师范大学，计算机与信息技术学院，辽宁 大连

收稿日期：2022年4月26日；录用日期：2022年5月24日；发布日期：2022年5月31日

摘 要

在日常生活中，人们通常使用自然语言进行推理和判断。为了将格值模态命题逻辑更好地应用于实际中，本文提出了以六元语言真值格蕴涵代数为真值域的六元语言真值模态命题逻辑系统，定义一个将公式集和可能世界集映射到六元语言真值格蕴涵代数上的赋值映射，讨论其运算及性质，并探讨该系统基于滤子的归结原理。提出计算归结式的规则以及基于滤子的归结方法，并通过一个例子说明该方法的合理性。该系统不仅可以处理全序性信息，也可以处理非全序性信息。

关键词

六元语言真值格蕴涵代数，模态命题逻辑，归结原理

6-Element Linguistic Truth-Valued Modal Proposition Logic and Resolution Automated Reasoning

Shihui Wang[1], **Yanfang Wang**[2], **Xiaosong Cui**[3*]

[1]School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
[2]Department of Computer Science, Liaoyang Vocational College of Technology, Liaoyang Liaoning
[3]School of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 26th, 2022; accepted: May 24th, 2022; published: May 31st, 2022

*通讯作者。

文章引用：王诗慧，王艳芳，崔晓松．六元语言真值模态命题逻辑及其归结自动推理研究[J]．计算机科学与应用，2022, 12(5): 1413-1424. DOI: 10.12677/csa.2022.125141

Abstract

In daily life, people usually use natural language to reason and judge. In order to better apply lattice-valued modal propositional logic in practice, a 6-element linguistic truth-valued modal propositional logic system with the 6-element linguistic truth-valued lattice implication algebra as the true value domain is proposed. An evaluation map that maps the set of formulas and the set of possible worlds to 6-element linguistic truth-valued lattice implication algebra is defined, and its operations and properties are analyzed. The resolution principle based on filter is discussed. The rules for calculating the resolution formulas and the resolution method based on filter are proposed, and an example is used to illustrate the rationality of the method. The system can process not only comparable information, but also incomparable information.

Keywords

6-Element Linguistic Truth-Valued Lattice Implication Algebra, Modal Proposition Logic, Resolution Principle

1. 引言

我们生活中的很多现象都可以用格来刻画。徐扬[1] [2] [3]在 1993 年建立了格蕴涵代数，并构建了基于格蕴涵代数的格值命题逻辑系统 $LP(X)$ 和格值一阶逻辑系统 $LF(X)$。由于现实生活中人类思维的模糊性以及事物的复杂性，人们在表达时常常会使用自然语言。比如：“有点好”、“不太差”、“十分差”等。基于自然语言具有模糊性、可比和不可比性等特点，徐扬等人提出了语言真值格蕴涵代数，并对其性质及其子结构进行分析。邹丽[4]定义了语气算子间的两种运算，构建了六元语言真值命题逻辑系统 6*LTVP*，直接利用语言真值进行自动推理。刘新等[5]提出了一个个人金融决策模型，通过语言值相似度处理不确定性语言值信息。罗思元等[6]通过聚合语言值评价矩阵，提出一种基于语言值格蕴涵代数的决策方法。高蕴慧[7]讨论了命题的否定的语言真值集，并研究了其运算和性质。

人工智能是一门交叉学科，涉及到计算机科学、哲学、数学、经济学等等，人工智能技术的发展与逻辑学息息相关。如今，逻辑学具有庞大且复杂的体系。由于事物的不断变化，时间、空间等都会影响人们的思维规律，因此，学者们对模态逻辑进行了深入的研究，建立了各种形式的非经典模态逻辑理论，并将其应用于其它的领域[8] [9]。李文江[10]在 $LP(X)$ 系统和 $LF(X)$ 系统的基础上，构建格值模态命题逻辑系统 $LMP(X)$ 和格值模态一阶逻辑系统 $LMF(X)$。Kannan [11]利用认知模态逻辑，对大型复杂工程系统进行知识的形式化表示和推理。Wen [12]提出了一种定义模态逻辑和谓词逻辑系统演绎后承的新方法，该方法可以统一模态和谓词逻辑中的六种后承概念。Ray 等[13]提出了格值布尔系统，分析了格值逻辑代数的对偶性，并研究了格值模态逻辑代数的对偶性。

自动推理是人工智能领域的一个重要研究内容，1965 年，J. A. Robinson [14]提出了归结原理，但是子句数量较多时，归结步骤也会过多，因此，许多学者投身于归结原理的改进工作中，既提高归结效率，又将其应用于专家系统等领域。徐扬等[15] [16]提出了 $LP(X)$ 系统和 $LF(X)$ 系统的 α-归结原理。张家

锋[17]等研究了 $LF(X)$ 系统中带有删除策略的 α-语义归结方法。贾海瑞[18]讨论了 $LP(X)$ 和 $LF(X)$ 系统中的 α-多元极小归结原理，并给出了 $LP(X)$ 和 $LF(X)$ 系统中的归结方法。

本文基于六元语言真值格蕴涵代数和 $LMP(X)$ 系统，提出六元语言真值模态命题逻辑系统的语义表示，定义一个将公式集和可能世界集映射到六元语言真值格蕴涵代数上的赋值映射，并讨论其运算及性质。在此基础上，分析该系统的归结原理以及计算归结式的方法。

2. 预备知识

定义 1 [1] 令 $\mathcal{L}=(L,\wedge,\vee,O,I)$ 是一带有逆序对合运算“$'$”的有界格，I 和 O 是 $\mathcal{L}$ 的最大元和最小元，若 $\forall x\in L, y\in L, z\in L$，有映射 $\rightarrow: L\times L\rightarrow L$，满足

1) $x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)$；
2) $x\rightarrow x=I$；
3) $x\rightarrow y=y'\rightarrow x'$；
4) 如果 $x\rightarrow y=y\rightarrow x=I$，则 $x=y$；
5) $(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$；
6) $(x\vee y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\wedge(y\rightarrow z)$；
7) $(x\wedge y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\vee(y\rightarrow z)$

则称 $\mathcal{L}=(L,\wedge,\vee,O,I)$ 为一个格蕴涵代数。

定义 2 [4] 称 $H=\{h_+,h_0,h_-\}$ 为三元语气算子集，其中 h_+ 为某一强化算子，h_0 为无影响算子，h_- 为某一弱化算子。根据语气算子增强真值的程度，H 具有一种自然的序结构，即：$h_-<h_0<h_+$。在 H 中引入两种运算：运算 $\oplus$ 和 $\odot$ 如表 1 和表 2 所示。

Table 1. Calculation $\oplus$ in H
表 1. H 中的 $\oplus$ 计算

$\oplus$	h_+	h_0	h_-
h_+	h_+	h_+	h_0
h_0	h_+	h_0	h_-
h_-	h_0	h_-	h_-

Table 2. Calculation $\odot$ in H
表 2. H 中的 $\odot$ 计算

$\odot$	h_+	h_0	h_-
h_+	h_+	h_0	h_-
h_0	h_0	h_0	h_0
h_-	h_-	h_0	h_+

定义 3 [4] 令 $L_6=\{(h_+,t),(h_0,t),(h_-,t),(h_+,f),(h_0,f),(h_-,f)\}$，$\mathcal{L}_6=(L_6,\vee,\wedge,',\rightarrow,(h_+,t),(h_+,f))$，其运算“$\vee$”和“$\wedge$”体现在 L_6 的 Hasse 图中，如图 1 所示，运算“$\rightarrow$”和“$'$”如表 3 和表 4 所示，其最大元为 (h_+,t)，最小元为 (h_+,f)，则 $\mathcal{L}_6$ 为一个六元语言真值格蕴涵代数。并限定对任意 $h\in H$ 和 $(h_i,c)\in L_6$，有 $h((h_i,c))=(h\oplus h_i,c)$。

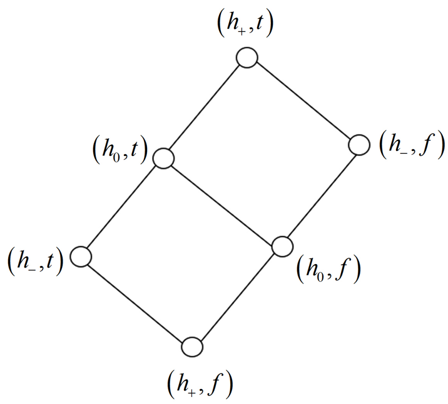

Figure 1. Hasse diagram of L_6
图 1. L_6 的 Hasse 图

Table 3. Implication operator in L_6
表 3. L_6 中的蕴涵算子

$\rightarrow$	(h_+,f)	(h_0,f)	(h_-,f)	(h_-,t)	(h_0,t)	(h_+,t)
(h_+,f)	(h_+,t)	(h_+,t)	(h_+,t)	(h_+,t)	(h_+,t)	(h_+,t)
(h_0,f)	(h_0,t)	(h_+,t)	(h_0,t)	(h_0,t)	(h_+,t)	(h_+,t)
(h_-,f)	(h_-,t)	(h_0,t)	(h_+,t)	(h_-,t)	(h_0,t)	(h_+,t)
(h_-,t)	(h_-,f)	(h_-,f)	(h_-,f)	(h_+,t)	(h_+,t)	(h_+,t)
(h_0,t)	(h_0,f)	(h_-,f)	(h_-,f)	(h_0,t)	(h_+,t)	(h_+,t)
(h_+,t)	(h_+,f)	(h_0,f)	(h_-,f)	(h_-,t)	(h_0,t)	(h_+,t)

Table 4. Negation operator in L_6
表 4. L_6 中的非算子

a	(h_+,f)	(h_0,f)	(h_-,f)	(h_-,t)	(h_0,t)	(h_+,t)
a'	(h_+,t)	(h_0,t)	(h_-,t)	(h_-,f)	(h_0,f)	(h_+,f)

定义 4 [19] 一个模态命题模型是一个三元组 $\mathrm{M}=\langle W,R,m\rangle$，其中 W 是非空集合，称为可能世界集；R 是 W 上的二元关系($R\subseteq W\times W$)；m 是一个函数，将每个命题变元 p 指派为 W 的一个子集 $m(p)$。

3. 六元语言真值模态命题逻辑系统的语义理论

为了将格值模态命题逻辑更好地应用于实际中，本节提出以六元语言真值格蕴涵代数为真值域的六元语言真值格值模态命题逻辑系统。

定义 5 六元语言真值模态命题逻辑 $6LTMP(X)$ 系统的语义可用四元组 $\mathrm{M}_{L_6}=\langle W,R,e_{L_6},L_6\rangle$ 表示，其中 W 是非空集合，称为可能世界集，用 x,y,z,x_1,x_2 等表示；L_6 为赋值格；$R:W\times W\rightarrow L_6$ 是 W 上的二元关系；映射 $e_{L_6}:H\Phi\times W\rightarrow L_6$ 称为赋值映射，其中 $H\Phi=\{hp|h\in H,p\in\Phi\}$ 为命题变量集。

例 1 令 L_6 中的语气词 h_+ 表示“非常”，h_0 表示“一般”，h_- 表示“稍微”。现有一个命题 p：天气热，可能世界 x：在中午的时候，可能世界 y：在晚上的时候。

则 $e_{L_6}\left(h_+ p,x\right)=\left(h_+,t\right)$ 表示在中午的时候天气非常热是非常真的；

则 $e_{L_6}\left(h_+ p,y\right)=\left(h_0,f\right)$ 表示在晚上的时候天气非常热是一般假的；

则 $e_{L_6}\left(h_0 p,y\right)=\left(h_-,f\right)$ 表示在晚上的时候天气一般热是稍微假的。

定义 6 称 $6LTMP(X)$ 系统的公式集为 $F(H\Phi)$，递归定义如下：

1) $H\Phi$ 中的元素都属于 $F(H\Phi)$；

2) 对任意 $h\in H$ 及 $A\in F(H\Phi)$，有 $hA\in F(H\Phi)$；

3) 如果 $A\in F(H\Phi)$ 且 $B\in F(H\Phi)$，则 $\neg A$， $A\wedge B$， $A\vee B$， $A\to B$， $\Box A$， $\Diamond A\in F(H\Phi)$；

4) 所有公式都是有限次使用(1)至(3)和括号得到的有意义的符号串。

定义 7 设六元语言真值模态命题逻辑系统 $\mathrm{M}_{L_6}=\left\langle W,R,e_{L_6},L_6\right\rangle$，映射 e_{L_6} 可以唯一的扩张成 $v_{L_6}:F(H\Phi)\times W\to L_6$，即 v_{L_6} 为 $6LTMP(X)$ 系统中对 $F(H\Phi)\times W$ 的赋值映射，且有 $v_{L_6}(hp,x)=e_{L_6}(hp,x)$。为了便于表述，将 $v_{L_6}(p,x)$ 简记为 $p(x)$， $v_{L_6}(A,x)$ 简记为 $A(x)$。

定义 8 对任意 $h\in H$ 及原子命题 $hp\in H\Phi$，有 $(hp)(x)=hp(x)$。对任意公式 $hA\in F(H\Phi)$，有 $(hA)(x)=hA(x)$。且有

$$(\neg A)(x)=\left(A(x)\right)'\text{；}$$

$$(A\wedge B)(x)=A(x)\wedge B(x)\text{；}$$

$$(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x)\text{；}$$

$$(A\to B)(x)=A(x)\to B(x)\text{；}$$

$$(\Box A)(x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}A(y)\text{；}$$

$$(\Diamond A)(x)=\bigvee_{y\in\Delta_x}A(y)\text{，}$$

其中 $\Delta_x=\left\{y\,\middle|\,R(x,y)>(h_+,f)\right\}$。

命题 1 在 $6LTMP(X)$ 系统中，对任意 $x\in W$， $h\in H$， $A,B\in F(H\Phi)$，若 $A(x)\ge B(x)$ 或 $A(x)\le B(x)$，则以下性质成立：

1) $\left(h(A\vee B)\right)(x)\equiv(hA)(x)\vee(hB)(x)$；

2) $\left(h(A\wedge B)\right)(x)\equiv(hA)(x)\wedge(hB)(x)$；

3) $\left(h(A\to B)\right)(x)=(hA)(x)\to(hB)(x)$；

4) $\neg(hA)(x)\equiv h(\neg A)(x)$。

证明：1) 令 $A(x)=(h_1,c_1)$， $B(x)=(h_2,c_2)$，其中 (h_1,c_1)， $(h_2,c_2)\in L_6$。

a) 若 $c_1=c_2=t$，则 $\left(h(A\vee B)\right)(x)=h(A\vee B)(x)=h\left((h_1,c_1)\vee(h_2,c_2)\right)=h\left(\max(h_1,h_2),t\right)=\left(h\oplus\max(h_1,h_2),t\right)=\left(\max(h\oplus h_1,h\oplus h_2),t\right)=\max\left((h\oplus h_1,t),(h\oplus h_2,t)\right)=hA(x)\vee hB(x)$。

b) 若 $c_1=c_2=f$，则 $\left(h(A\vee B)\right)(x)=h(A\vee B)(x)=h\left((h_1,c_1)\vee(h_2,c_2)\right)=h\left(\min(h_1,h_2),f\right)=\left(h\oplus\min(h_1,h_2),f\right)=\left(\min(h\oplus h_1,h\oplus h_2),f\right)=\max\left((h\oplus h_1,f),(h\oplus h_2,f)\right)=hA(x)\vee hB(x)$。

c) 若 $c_1\ne c_2$，不妨设 $c_1=t$， $c_2=f$，则 $\left(h(A\vee B)\right)(x)=h(A\vee B)(x)=h\left((h_1,t)\vee(h_2,f)\right)$。

① 若 $h_1=h_+$，则对任意的 $h_2\in H$， $h\left((h_1,t)\vee(h_2,f)\right)=h\left((h_+,t)\vee(h_2,f)\right)=h(h_+,t)=(h\oplus h_+,t)$。另一方面，$hA(x)\vee hB(x)=(h\oplus h_+,t)\vee(h\oplus h_2,f)$。根据表 1，若 $h=h_+$，则 $(h\oplus h_+,t)=(h_+,t)$，$(h\oplus h_+,t)\vee(h\oplus h_2,f)=(h_+,t)\vee(h_+\oplus h_2,f)=(h_+,t)$；若 $h=h_0$，则 $(h\oplus h_+,t)=(h_+,t)$，$(h\oplus h_+,t)\vee(h\oplus h_2,f)=(h_+,t)\vee(h_0\oplus h_2,f)=(h_+,t)$；若 $h=h_-$，则 $(h\oplus h_+,t)=(h_0,t)$，$(h\oplus h_+,t)\vee(h\oplus h_2,f)=(h_0,t)\vee(h_-\oplus h_2,f)=(h_0,t)\vee(h_0,f)=(h_0,f)$；因此，$\left(h(A\vee B)\right)(x)=(hA)(x)\vee(hB)(x)$；

② 若 $h_1 = h_0$ 且 $h_2 \in \{h_0, h_+\}$，则 $h((h_1,t)\vee(h_2,f)) = h((h_0,t)\vee(h_2,f)) = h(h_0,t) = (h\oplus h_0,t)$。另一方面，$hA(x)\vee hB(x) = (h\oplus h_0,t)\vee(h\oplus h_2,f)$，根据表 1，对 $h_2 \in \{h_0,h_+\}$，总有 $(h\oplus h_0,t) > (h\oplus h_2,f)$，因此，$hA(x)\vee hB(x) = (h\oplus h_0,t) = (h(A\vee B))(x)$；

③ 若 $h_1 = h_-$ 且 $h_2 \in h_+$，则 $h((h_1,t)\vee(h_2,f)) = h((h_-,t)\vee(h_+,f)) = h(h_-,t) = (h\oplus h_-,t)$。另一方面，$hA(x)\vee hB(x) = (h\oplus h_-,t)\vee(h\oplus h_+,f)$，根据表 1，对任意的 $h\in H$，总有 $(h\oplus h_-,t) > (h\oplus h_+,f)$，因此，$hA(x)\vee hB(x) = (h\oplus h_-,t) = (h(A\vee B))(x)$。

2) 同理可证。

3) 同理可证。

4) 由于 $\neg(hA)(x) = ((hA)(x))' = (hA(x))' = (h(h_1,c_1))' = (h\oplus h_1,c_1)' = (h\oplus h_1,c_1')$，其中，若 $c_1 = t$，则 $c_1' = f$；若 $c_1 = f$，则 $c_1' = t$。另一方面，$h(\neg A)(x) = h(A(x))' = h(h_1,c_1') = (h\oplus h_1,c_1')$，因此，$(\neg(hA))(x) \equiv h(\neg A)(x)$。

例 2 令 L_6 中的语气词 h_+ 表示“非常”，h_0 表示“一般”，h_- 表示“稍微”。现有一个命题 *p*：天气热，可能世界 *x*：在中午的时候。设 $p(x) = (h_0,t)$ 表示在中午的时候天气热是一般真的。

则 $h_+p(x) = (h_+\oplus h_0,t) = (h_+,t)$ 表示在中午的时候天气非常热是非常真的；

$(\neg(h_+p))(x) = (h_+,f)$ 表示在中午的时候天气非常凉是非常假的；

$\neg p(x) = (h_0,f)$ 表示在中午的时候天气凉是一般假的；

$h_+(\neg p)(x) = (h_+,f)$ 表示在中午的时候天气非常凉是非常假的，

即 $(\neg(h_+p))(x) = h_+(\neg p)(x)$。

命题 2 在 $6LTMP(X)$ 系统中，对任意 $x\in W$，$h\in H$，$A\in F(H\Phi)$，若对于 $y_i\in\Delta_x$，$i=1,2,\cdots,n$，$A(y_1),A(y_2),\cdots,A(y_n)$ 都是可比的，则以下性质成立：

1) $(\Box(hA))(x) = h(\Box A)(x)$；

2) $(\Diamond(hA))(x) = h(\Diamond A)(x)$。

证明：1) 令 $A(y_1) = (h_1,c_1), A(y_2) = (h_2,c_2),\cdots,A(y_n) = (h_n,c_n)$，其中 $(h_i,c_i)\in L_6$，$i=1,2,\cdots,n$。由 $(\Box A)(x) = \underset{y\in\Delta_x}{\wedge} A(y)$，$(\Box(hA))(x) = \underset{y_i\in\Delta_x}{\wedge}(hA)(y_i) = hA(y_1)\wedge hA(y_2)\wedge\cdots\wedge hA(y_n) = (h\oplus h_1,c_1)\wedge(h\oplus h_2,c_2)\wedge\cdots\wedge(h\oplus h_n,c_n)$，另一方面，$h(\Box A)(x) = h\left(\underset{y_i\in\Delta_x}{\wedge}A(y_i)\right) = h((h_1,c_1)\wedge(h_2,c_2)\wedge\cdots(h_n,c_n))$，与命题 1 证明过程类似，则 $\underset{y_i\in\Delta_x}{\wedge}(hA)(y_i) = h\left(\underset{y_i\in\Delta_x}{\wedge}A(y_i)\right)$，因此 $(\Box(hA))(x) = h(\Box A)(x)$。

2) 同理可证。

定义 9 设 J 是 $6LTMP(X)$ 系统中的一个滤子，hp 是一个公式，若对于给定的 $x\in W$，存在一个赋值 v_{L_6}，使得 $(hp)(x)\in J$，则称公式 hp 为 (J,x)-可满足的；若对任意的 $x\in W$，公式 hp 都是 (J,x)-可满足的，则称公式 hp 是 *J*-可满足的，否则公式 hp 是 *J*-不可满足的；若对于给定的 $x\in W$，对任意的赋值 v_{L_6}，使得 $(hp)(x)\in J$，则称公式 hp 是 (J,x)-真的；若对任意的 $x\in W$，公式 hp 都是 (J,x)-真的，则称公式 hp 是 *J*-真的；若对于给定的 $x\in W$，对任意的赋值 v_{L_6}，使得 $(hp)(x)\notin J$，则称公式 hp 是 (J,x)-假的；若对任意的 $x\in W$，公式 hp 都是 (J,x)-假的，则称公式 hp 是 *J*-假的。

例 3 $J = \{(h_+,t),(h_0,t),(h_-,t)\}$ 是 $\mathcal{L}_6$ 中的滤子。

下面研究基于滤子 $J = \{(h_+,t),(h_0,t),(h_-,t)\}$ 的归结原理。

定理 1 在 $6LTMP(X)$ 系统中，$h_1p,h_2q\in H\Phi$，则以下性质成立：

1) $\square h_1 p=\left(\Diamond(h_1 p)'\right)'$；

2) $\square(h_1 p\to h_2 q)\le \square h_1 p\to \square h_2 q$；

3) $\Diamond h_1 p\to \Diamond h_2 q\le \Diamond(h_1 p\to h_2 q)$。

证明：1) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $\left(\Diamond(h_1 p)'\right)'(x)=\left(\Diamond(h_1 p)'(x)\right)'$ $=\left(\underset{y\in\Delta_x}{\vee}(h_1 p)'(y)\right)'=\left(\underset{y\in\Delta_x}{\vee}(h_1 p(y))'\right)'=\left(\left(\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}h_1 p(y)\right)'\right)'=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}h_1 p(y)=\square h_1 p(x)$。

2) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $\square(h_1 p\to h_2 q)(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p\to h_2 q)(y)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p(y)\to h_2 q(y))$，另一方面，$(\square h_1 p\to\square h_2 q)(x)=\square h_1 p(x)\to\square h_2 q(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p)(y)\to\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_2 q)(y)$，显然得证。

3) 同理可证。

定理 2 在 $6LTMP(X)$ 系统中，$h_1 p,h_2 q\in H\Phi$，则以下性质成立：

1) $\square(h_1 p\wedge h_2 q)=\square h_1 p\wedge\square h_2 q$；

2) $\square(h_1 p\vee h_2 q)\ge\square h_1 p\vee\square h_2 q$；

3) $\Diamond(h_1 p\wedge h_2 q)\le\Diamond h_1 p\wedge\Diamond h_2 q$；

4) $\Diamond(h_1 p\vee h_2 q)=\Diamond h_1 p\vee\Diamond h_2 q$。

证明：1) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $\square(h_1 p\wedge h_2 q)(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p\wedge h_2 q)(y)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}((h_1 p)(y)\wedge(h_2 q)(y))=\left(\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p)(y)\right)\wedge\left(\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_2 q)(y)\right)=(\square(h_1 p)(x))\wedge(\square(h_2 q)(x))$ $=(\square h_1 p\wedge\square h_2 q)(x)$。

2) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $\square(h_1 p\vee h_2 q)(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p\vee h_2 q)(y)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}((h_1 p)(y)\vee(h_2 q)(y))\ge\left(\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_1 p)(y)\right)\vee\left(\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(h_2 q)(y)\right)=(\square(h_1 p)(x))\vee(\square(h_2 q)(x))$ $=(\square h_1 p\vee\square h_2 q)(x)$。

3)~4) 同理可证。

定理 3 在 $6LTMP(X)$ 系统中，$hp\in H\Phi$，则以下性质成立：

1) $\square(\square hp)=\square hp$；

2) $\Diamond(\Diamond hp)=\Diamond hp$；

3) $\square(\Diamond hp)=\Diamond hp$；

4) $\Diamond(\square hp)=\square hp$。

证明：1) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $(\square(\square hp))(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(\square hp)(y)$ $=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}\underset{z\in\Delta_y}{\wedge}(hp)(z)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}\underset{z\in\Delta_x}{\wedge}(hp)(z)=\underset{z\in\Delta_x}{\wedge}(hp)(z)=\square hp(x)$。

2) 同理可证。

3) 对任意的 $x\in W$ 及 $6LTMP(X)$ 系统中的广义赋值 v_{L_6}，都有 $(\square(\Diamond hp))(x)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}(\Diamond hp)(y)$ $=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}\underset{z\in\Delta_y}{\vee}(hp)(z)=\underset{y\in\Delta_x}{\wedge}\underset{z\in\Delta_x}{\vee}(hp)(z)=\underset{z\in\Delta_x}{\vee}(hp)(z)=\Diamond hp(x)$。

4) 同理可证。

定理 4 在$6LTMP(X)$系统中，$h_1p,h_2q\in H\Phi$，则以下性质成立：

1) $\Box(h_1p\vee\Box h_2q)=\Box h_1p\vee\Box h_2q$；

2) $\Diamond(h_1p\wedge\Diamond h_2q)=\Diamond h_1p\wedge\Diamond h_2q$；

3) $\Box(\Box h_1p\vee\Box h_2q)=\Box h_1p\vee\Box h_2q$；

4) $\Diamond(\Diamond h_1p\wedge\Diamond h_2q)=\Diamond h_1p\wedge\Diamond h_2q$。

证明：1) 对任意的$x\in W$及$6LTMP(X)$系统中的广义赋值v_{L_6}，都有$\Box(h_1p\vee\Box h_2q)(x)=\bigwedge_{y\in\Delta_x}(h_1p\vee\Box h_2q)(y)=\left(\bigwedge_{y\in\Delta_x}h_1p(y)\right)\vee\left(\bigwedge_{y\in\Delta_x}\Box h_2q(y)\right)=(\Box h_1p(x))\vee\left(\bigwedge_{y\in\Delta_x}\bigwedge_{z\in\Delta_y}h_2q(z)\right)=(\Box h_1p(x))\vee\left(\bigwedge_{y\in\Delta_x}\bigwedge_{z\in\Delta_x}h_2q(z)\right)$
$=(\Box h_1p(x))\vee\left(\bigwedge_{z\in\Delta_x}h_2q(z)\right)=(\Box h_1p(x))\vee(\Box h_2q(x))$。

2)~4) 同理可证。

4. 六元语言真值模态命题逻辑系统的归结原理

基于以上对$6LTMP(X)$系统语义的研究，提出归结式的计算方法，讨论 J-归结原理，总结具体的归结方法。

形如$\Box(h_1p_1\vee\cdots\vee h_np_n)$的命题称为$\Box$-型文字，形如$\Diamond(h_1q_1\wedge\cdots\wedge h_mq_m)$命题称为$\Diamond$-型文字。

定义 10 $6LTMP(X)$系统中的六元语言真值模态命题逻辑公式hA称为一个广义文字，如果满足下列条件之一：

1) $hA=\alpha\in L_6$；

2) hA是一个文字；

3) hA是一个$\Box$-型文字；

4) hA是一个$\Diamond$-型文字。

定义 11 设六元语言真值模态命题逻辑的公式G_k被称为广义子句，如果G_k具有以下形式：

$$G_k=h_{k1}G_{k1}\vee h_{k2}G_{k2}\vee\cdots\vee h_{kn}G_{kn}$$

其中$h_{ki}G_{ki}\ (i=1,\cdots,n)$是广义文字。

称有限个广义子句的合取$S=G_1\wedge G_2\wedge\cdots\wedge G_n$为广义合取范式，称$K=\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$为广义子句集。

定义 12 令h_1A和$h_2(\neg A)$是$6LTMP(X)$系统中的两个公式，如果满足：

1) 当h_1A是 J-可满足的时，$h_2(\neg A)$是 J-不可满足的；

2) 当h_1A是 J-不可满足的时，$h_2(\neg A)$是 J-可满足的，

则称h_1A和$h_2(\neg A)$是 J-互补文字。

定义 13 令h_1A和$h_2(\neg A)$是 J-互补文字，具体有：

1) 若$h_1=h_2$，则称h_1A和$h_2(\neg A)$为强互补文字；

2) 若$h_1=h_0$，$h_2=h_+$或$h_1=h_0$，$h_2=h_-$，则称h_1A和$h_2(\neg A)$为互补文字；

3) 若$h_1=h_+$，$h_2=h_-$，则称h_1A和$h_2(\neg A)$为弱互补文字。

定义 14 令h_1A和h_2A是$6LTMP(X)$系统中的两个公式，如果满足：

1) 当h_1A是 J-可满足的时，h_2A是 J-可满足的；

2) 当h_1A是 J-不可满足的时，h_2A是 J-不可满足的，

则称h_1A和h_2A是 J-相似文字。

定义 15 设G_1和G_2是$6LTMP(X)$系统中无相似文字的两个广义子句，

$$G_1=h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1i}G_{1i}\vee\cdots\vee h_{1n}G_{1n}$$

$$G_2=h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2j}G_{2j}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}$$

若 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是 J-互补文字，则 $R=h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1(i-1)}G_{1(i-1)}\vee h_{1(i+1)}G_{1(i+1)}\vee\cdots\vee h_{1n}G_{1n}\vee h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2(j-1)}G_{2(j-1)}\vee h_{2(j+1)}G_{2(j+1)}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}$ 称为 G_1 和 G_2 的 J-直接归结式，记作 $R=R_J(G_1,G_2)$，具体有：

1) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是强互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的强归结式，记作 h_+R；

2) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的归结式，记作 h_0R；

3) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是弱互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的弱归结式，记作 h_-R。

定义 16 设 G_1 和 G_2 是 $6LTMP(X)$ 系统中无相似文字的两个广义子句

$$G_1=\Box\left(h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1i}G_{1i}\vee\cdots\vee h_{1n}G_{1n}\right)$$

$$G_2=\Box\left(h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2j}G_{2j}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}\right)$$

若 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是 J-互补文字，则 $R=\Box\left(h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1(i-1)}G_{1(i-1)}\vee h_{1(i+1)}G_{1(i+1)}\vee\cdots\vee h_{1n}G_{1n}\vee h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2(j-1)}G_{2(j-1)}\vee h_{2(j+1)}G_{2(j+1)}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}\right)$ 称为 G_1 和 G_2 的 $J_{(\Box\Box)}$-归结式，也记作 $R=R_J(G_1,G_2)$，具体有：

1) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是强互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的强归结式，记作 h_+R；

2) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的归结式，记作 h_0R；

3) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是弱互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的弱归结式，记作 h_-R。

定义 17 设 G_1 和 G_2 是 $6LTMP(X)$ 系统中无相似文字的两个广义子句

$$G_1=\Box\left(h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1i}G_{1i}\vee\cdots\vee h_{1n}G_{1n}\right)$$

$$G_2=\Diamond\left(\left(h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2j}G_{2j}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}\right)\wedge E\right)$$

若 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是 J-互补文字，则 $R=\Diamond\left(\left(h_{11}G_{11}\vee\cdots\vee h_{1(i-1)}G_{1(i-1)}\vee h_{1(i+1)}G_{1(i+1)}\vee\cdots\vee h_{2n}G_{2n}\vee h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2(j-1)}G_{2(j-1)}\vee h_{2(j+1)}G_{2(j+1)}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}\right)\wedge\left(h_{21}G_{21}\vee\cdots\vee h_{2m}G_{2m}\right)\wedge E\right)$ 称为 G_1 和 G_2 的 $J_{(\Box\Diamond)}$-归结式，也记作 $R=R_J(G_1,G_2)$，具体有：

1) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是强互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的强归结式，记作 h_+R；

2) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的归结式，记作 h_0R；

3) 如果 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是弱互补文字，则 R 是 G_1 和 G_2 的弱归结式，记作 h_-R。

定义 18 设 G_1 是 $6LTMP(X)$ 系统中的一个广义子句，若 $G_1=\Diamond\left(h_{11}G_{11}\wedge\cdots\wedge h_{1i}G_{1i}\wedge\cdots\wedge h_{1j}G_{1j}\wedge\cdots\wedge h_{1n}G_{1n}\right)$，且 $R_J\left(h_{1i}G_{1i},h_{1j}G_{1j}\right)=C$，则称 $\Gamma_J(G_1)=\Diamond\left(h_{11}G_{11}\wedge\cdots\wedge h_{1i}G_{1i}\wedge\cdots\wedge h_{1j}G_{1j}\wedge\cdots\wedge h_{1n}G_{1n}\wedge C\right)$ 为 G_1 的 J-自归结式。

定理 6 令 A 是 $6LTMP(X)$ 系统中的公式，A 是 J-假当且仅当存在一个从 A 可推出 J-空子句(记为 $J-\mathrm{O}$)的演绎。

证明：1) 充分性。若 A 是 J-假，即对任意赋值 v_{L_6}，有 $A(x)\notin J$，故 $A(x)\in\left\{(h_+,f),(h_0,f),(h_-,f)\right\}$，下面分三种情况讨论：

a) 当 $A(x)=(h_+,f)$ 时，有 $(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_+,f)\to(h_+,f)=(h_+,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_+,f)\to(h_0,f)=(h_+,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_+,f)\to(h_i,f)=(h_+,t)$；

b) 当 $A(x)=(h_0,f)$ 时，有 $(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_0,f)\to(h_+,f)=(h_0,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_0,f)\to(h_0,f)=(h_+,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_0,f)\to(h_-,f)=(h_0,t)$；

c) 当 $A(x)=(h_-,f)$ 时，有 $(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_-,f)\to(h_+,f)=(h_-,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_-,f)\to(h_0,f)=(h_0,t)$，$(A\to J-\mathrm{O})(x)=(h_-,f)\to(h_-,f)=(h_+,t)$；

因此，从公式 A 可以推出 J-空子句。

2) 必要性同理可证。

定理 7 如果广义子句 G_1, G_2 是 J-可满足的，那么 $R_J(G_1, G_2)$ 也是 J-可满足的。

证明：不妨设 $G_1 = \square(h_{11}G_{11} \vee \cdots \vee h_{1i}G_{1i} \vee \cdots \vee h_{1n}G_{1n})$，$G_2 = \square(h_{21}G_{21} \vee \cdots \vee h_{2j}G_{2j} \vee \cdots \vee h_{2m}G_{2m})$，$h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是 J-互补文字，分别从 G_1 和 G_2 中删除 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 后析取得到 $R_J(G_1, G_2)$。由于 G_1, G_2 是 J-可满足的，即对任意的 $x \in W$，存在一个赋值 v_{L_6}，使得 $(G_1)(x) \in J$，$(G_2)(x) \in J$。由于 $h_{1i}G_{1i}$ 和 $h_{2j}G_{2j}$ 是 J-互补文字，不妨设 $h_{1i}G_{1i}$ 是 J-可满足的，$h_{2j}G_{2j}$ 是 J-不可满足的，又因为 G_2 是 J-可满足的，那么 G_2 中一定存在 $h_{2k}G_{2k}$ 是 J-可满足的，故 $R_J(G_1, G_2)$ 是 J-可满足的。

定理 8 设 S 是 $6LTMP(X)$ 系统中的一个广义子句集，若存在从 S 到广义子句 C_m 的 J-归结演绎，且 S 是 J-可满足的，则 C_m 也是 J-可满足的。

证明：设 S 到广义子句 G 的 J-归结演绎为 $C_1, C_2, \cdots, C_m$。

1) 当 $m = 1$ 时，即 S 到 G 的 J-归结演绎为 C_1，则 C_1 是 S 的一个析取项，故 C_1 是 J-可满足的。

2) 当 $m > 1$ 时，利用数学归纳法，假设 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$ 是 J-可满足的。若 $C_m \in S$，则 C_m 是 J-可满足的；若 $C_m = R_J(G_1, G_2)$，根据定理 7 可知，C_m 是 J-可满足的。

定理 9 设 A, B, C, D_1, D_2, E 是 $6LTMP(X)$ 系统中的广义子句，下面给出计算归结式的规则：

1) 规则 1：$\dfrac{R_J(A, B) = C}{R_J(A \vee D_1, B \vee D_2) = C \vee D_1 \vee D_2}$

2) 规则 2：$\dfrac{R_J(A, B) = C}{R_J(\square A, \square B) = \square C}$

3) 规则 3：$\dfrac{R_J(A, B) = C}{R_J(\square A, \Diamond(B \wedge E)) = \Diamond(B \wedge C \wedge E)}$

4) 规则 4：$\dfrac{R_J(A, B) = C}{\Gamma_J(\Diamond(A \wedge B \wedge E)) = \Diamond(A \wedge B \wedge C \wedge E)}$

5) 规则 5：$\dfrac{\Gamma_J(A) = B}{\Gamma_J(\Diamond(A \wedge E)) = \Diamond(A \wedge B \wedge E)}$

6) 规则 6：$\dfrac{\Gamma_J(A) = B}{\Gamma_J(A \vee C) = B \vee C}$

7) 规则 7：$\dfrac{\Gamma_J(A) = B}{\Gamma_J(\square A) = \square B}$

基于以上对 J-归结原理的讨论，我们给出六元语言真值模态命题逻辑的归结算法：

Step 1：将公式转化为广义合取范式；

Step 2：若存在 J-假子句，停止；否则转到 Step 4；

Step 3：归结 J-互补文字，归结式的语言真值是前两个归结文字的语气词的定性运算 $\oplus$；

Step 4：若得到 J-空子句，停止；否则转到 Step 3。

例 4 对于任意的 $x \in W$，已知子句：$\square(\neg A \vee B \vee C)$，事实为 $h_+ A$，$h_-(\neg C)$，证明 $h_+ B$。我们可以得到以下子句：

1) $\square(h_+(\neg A) \vee h_+ B \vee h_- C)$

2) $h_+(\neg A) \vee h_+ B \vee h_- C$

3) $h_+ A$

4) $h_-(\neg C)$
5) $h_+(\neg B)$
6) $\square(h_+(\neg B))$
7) $\square(h_+ A)$
8) $\square(h_-(\neg C))$
9) $\square((h_+ \oplus h_+)B \vee (h_+ \oplus h_-)C) = \square((h_+ B) \vee (h_0 C))$ 1)和 7)归结
10) $\square((h_0 \oplus h_+)B) = \square(h_+ B)$ 8)和 9)归结
11) $\square(h_+ - \mathrm{O})$ 6)和 10)归结

5. 总结

自动推理是人工智能的重要研究方向，作为方式之一的归结自动推理已经应用于专家系统、医疗诊断等领域。基于逻辑系统可以更好地进行推理研究，研究语言真值上的不确定性推理可以有效地处理现实生活中的不确定性信息。因此，为了将格值模态命题逻辑更好地应用于实际中，通过定义一个将公式集和可能世界集映射到六元语言真值格蕴涵代数上的赋值映射，构建了以六元语言真值格蕴涵代数为真值域的六元语言真值模态命题逻辑系统，并研究其语义理论，在此基础上，分析了 *J*-归结原理并提出了 *J*-归结方法。在未来的工作中，我们可以研究六元语言真值模态命题逻辑系统的 α -归结原理，进一步探究该系统的 α -归结方法。

参考文献

[1] Xu, Y. and Qin, K. (1993) Lattice-Valued Propositional Logic (I). *Southwest Jiaotong University*, **1**, 123-128.

[2] Xu, Y., Qin, K. and Roh, E.H. (2001) A First Order Lattice Valued Logic System. II: Semantics. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **4**, 977-983.

[3] Xu, Y., Chen, S. and Ma, J. (2006) Linguistic Truth-Valued Lattice Implication Algebra and Its Properties. *The Proceedings of the Multiconference on* "*Computational Engineering in Systems Applications*", Beijing, 4-6 October 2006, 1413-1418. https://doi.org/10.1109/CESA.2006.4281859

[4] 邹丽. 基于语言真值格蕴涵代数的格值命题逻辑及其归结自动推理研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2010.

[5] Liu, X., Wang, Y., Li, X., *et al*. (2017) A Linguistic-Valued Approximate Reasoning Approach for Financial Decision Making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **10**, 312-319. https://doi.org/10.2991/ijcis.2017.10.1.21

[6] 邹丽, 罗思元, 史园园, 任永功. 基于语言值格蕴涵代数的偏好顺序结构评估决策方法[J]. 模式识别与人工智能, 2018, 31(4): 347-357.

[7] 高蕴慧. 基于广义语言真值格值逻辑的不确定性推理方法[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.

[8] Hájek, P. (2010) On Fuzzy Modal Logics. *Fuzzy Sets and Systems*, **161**, 2389-2396. https://doi.org/10.1016/j.fss.2009.11.011

[9] Bou, F., Esteva, F. and Godo, L. (2008) Exploring a Syntactic Notion of Modal Many-Valued Logics. *Mathware & Soft Computing*, **15**, 175-181.

[10] 李文江. 基于格蕴涵代数的广义格值模态逻辑及其归结自动推理的研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2002.

[11] Kannan, H. (2021) Formal Reasoning of Knowledge in Systems Engineering through Epistemic Modal Logic. *Systems Engineering*, **24**, 3-16. https://doi.org/10.1002/sys.21563

[12] Wen, X. (2020) A New Way of Defining Deductive Consequence for Modal and Predicate Logic. *Studies in Logic*, **13**, 1-24.

[13] Ray, K.S. and Das, L.K. (2021) Categorical Study for Algebras of Fitting's Lattice-Valued Logic and Lattice-Valued Modal Logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **89**, 409-429. https://doi.org/10.1007/s10472-020-09707-1

[14] Robinson, J.A. (1965) A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle. *Journal of the ACM*, **12**, 23-41. https://doi.org/10.1145/321250.321253

[15] Xu, Y., Xu, W., Zhong, X. and He, X. (2010) α-Generalized Resolution Principle Based on Lattice-Valued Propositional Logic LP(X). *Proceedings of the* 9*th International FLINS Conference*, Chengdu, 2-4 August 2010, 66-71. https://doi.org/10.1142/9789814324700_0008

[16] Xu, Y., Ruan, D., Kerre, E.E. and Liu, J. (2001) α-Resolution Principle Based on Lattice-Valued First Order Logic *LF*(*X*). *Information Sciences*, **132**, 221-239. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(01)00065-2

[17] 张家锋, 徐扬, 曹发生. 格值一阶逻辑中 α-语义归结方法的相容性[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2016, 35(11): 1335-1340.

[18] 贾海瑞. 基于格值逻辑的 α-多元线性归结自动推理研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 西南交通大学, 2017.

[19] 刘叙华. 基于归结方法的自动推理[M]. 北京: 科学出版社, 1994.