Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2016, 5(3), 96-104
Published Online July 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2016.53011

Hans汉斯

A New Method Based on Groebner Bases for Solving the Beckmann Traffic Equilibrium Assignment Model

Xianpeng Wei[1], Qiuyan Zhan[2], Lu Chao[2]

[1]College of Transportation, Shanghai Maritime University, Shanghai
[2]College of Art and Science, Shanghai Maritime University, Shanghai
Email: wxpeng24@163.com, tmchaolu@shmtu.edu.cn

Received: Jun. 26th, 2016; accepted: Jul. 16th, 2016; published: Jul. 20th, 2016

Abstract

Beckmann traffic equilibrium assignment model is the basis of the study of traffic assignment problem. However, at present, the solution of Beckmann traffic equilibrium assignment model is still dependent on the F-W iterative algorithm and intelligent optimization methods, which can't obtain the exact solution. In order to find the exact solution of the Beckmann traffic equilibrium assignment model, this paper uses the advantage of Groebner bases theory in solving multidimensional polynomial equations, transforms the Beckmann model into a polynomial equation, then introduces the new variables and mapping to make the general polynomial into monomial, and then a method for solving the traffic equilibrium assignment model of Beckmann exactly is given. Finally, an example is given to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords

Traffic Engineering, Traffic Equilibrium Assignment, Beckmann, Groebner Bases

基于Groebner基的Beckmann交通平衡分配模型新解法

魏贤鹏[1]，战秋艳[2]，朝　鲁[2]

[1]上海海事大学交通运输学院，上海

文章引用: 魏贤鹏, 战秋艳, 朝鲁. 基于Groebner基的Beckmann交通平衡分配模型新解法[J]. 动力系统与控制, 2016, 5(3): 96-104. http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2016.53011

[2]上海海事大学文理学院，上海
Email: wxpeng24@163.com, tmchaolu@shmtu.edu.cn

收稿日期：2016年6月26日；录用日期：2016年7月16日；发布日期：2016年7月20日

摘　要

Beckmann交通平衡分配模型是研究交通分配问题的基础，然而目前该模型的求解主要依赖于F-W迭代算法和智能优化算法，无法求得精确解。为了寻找Beckmann交通平衡分配模型的精确解，本文借助Groebner基理论在求解多维多项式方程方面的优势，将Beckmann模型转化为多项式方程，通过引入新的变量和映射将一般多项式转化为单项式，给出了精确求解Beckmann交通平衡分配模型的方法。最后给出算例验证了该方法的有效性。

关键词

交通工程，交通平衡分配，Beckmann，Groebner基

1. 引言

交通流分配是交通需求四阶段预测的最后阶段，是实现交通规划设计的关键一步，其目的就是将预测得到的 OD 交通量，根据已知道路网的描述，按照一定的规则符合实际的分配到路网中的各条道路上去，进而求出路网中各路段的交通量、所产生的 OD 费用矩阵，并根据城市交通网络的使用状况作出分析和评价[1]。然而要实现交通量符合实际地分配到道路网络中并非易事，目前许多交通分配模型是建立在 Wardrop 第一原理概念上的，最具代表性的模型是 1956 年著名学者 Beckmann 提出的描述 Wardrop 第一原理的数学规划模型。Beckmann 模型涉及维数多，且是一个非线性规划模型，求解该模型成为一个难题，直到 1975 年 LeBlanc 等学者将 Frank-Wolfe 算法用于求解 Beckmann 模型，简称 F-W 解法，该方法是用线性规划逐步逼近非线性的方法，是一种迭代法。在每步迭代中，先找到目标函数最速下降方向，然后再找到一个最优步长，在最速下降方向上截取最优步长得到下一步迭代起点，重复迭代直到找到最优解为止[2]。为处理实际中的大规模网络问题，许多学者将智能进化方法应用到交通分配模型求解中，如神经网络算法[3]、遗传算法[4]-[6]、蚂蚁算法[7]、启发式算法[8] [9]、模拟退火算法[10]、免疫克隆退火算法[11]、粒子群算法[12]等。无论是 W-F 解法还是智能优化方法，都只能得到模型的近似解，因此寻求模型精确解是交通平衡分配的重要内容。

Groebner 基理论的形成最早是在 1927 年，F. S. Nlacauly 在全体单项式组成的集合中引入全序的概念，研究其理想的不变量。直到 1965 年 B. Buchberger 利用除法算法系统地研究了域上多元多项式环的理想生成元问题，才可以解决与理想相关的问题。从此，Groebner 基的理论及其应用得到快速发展。2002 年中南大学陈小松教授成功将 Groebner 基理论应用到求解最短路径问题中[13]，到 2007 年陈小松教授指导其学生朱玉莲将 Groebner 基理论应用到机场停车位优化分配中[14]。国外学者 Serkan Hoten 给出了 Groebner 基理论求解整数规划问题的方法[15]。

本文考虑到 Beckmann 交通平衡分配模型是一个维数较大的凸规划问题或非线性规划问题。借助 Groebner 基理论在求解多维多项式方程方面的优势，首次将 Groebner 基理论应用到求解 Beckmann 交通平衡分配模型上。首先将 Beckmann 交通平衡分配模型转化为具体的多项式，通过引入新的变量和映射将一般多项式转化为单项式，然后由 Grobner 基方法求解。

2. 问题的转化及 Groebner 基方法

由于居民出行的单位是次，组成的交通流量是整数，所以本节介绍有关 Groebner 基和整数规划的理论。以整数规划问题的标准形式为例简述 Groebner 基理论。

标准形式： Minimize : $h(A_1, A_2, \cdots, A_n)$

满足约束条件

$$\begin{aligned}
&a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n = b_1 \\
&a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + \cdots + a_{2n}A_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}A_1 + a_{m2}A_2 + \cdots + a_{mn}A_n = b_m \\
&A_j \in Z^+,\quad j = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{1}$$

其中，Z^+ 是非负整数集，a_{ij} 是已知的常数，$h(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 表示与变量 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有关的函数。其简写形式为：

$$\begin{aligned}
&\min : h(A_1, A_2, \cdots, A_n) \\
&\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij}A_j = b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\
&A_j \in Z^+, j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned} \tag{2}$$

本文把以上问题转化为 n 元多项式的问题，从而用多元多项式理论和方法求解。先给出本文用到的关于多元多项式 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的基本结论。

定义 1 [14]设 K 表示一个域，对于任意的 $j = 1, 2, \cdots, n$，定义映射 $\varphi : K[\omega_1, \cdots, \omega_n] \to K[z_1, \cdots, z_m]$ 为

$$\varphi(\omega_j) = \prod_{i=1}^{m} z_i^{a_{ij}}$$

且对于一般的多项式 $g \in K[\omega_1, \cdots, \omega_n]$，定义 $\varphi(g(\omega_1, \cdots, \omega_n)) = g(\varphi(\omega_1), \cdots, \varphi(\omega_n))$。因为对可行域的整数点 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，及单项式 $g(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 有

$$\begin{aligned}
\varphi(g(\omega_1, \cdots, \omega_n)) &= g(\varphi(\omega_1), \cdots, \varphi(\omega_n)) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(\omega_j)^{A_j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} z_i^{a_{ij}} \right)^{A_j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} z_i^{a_{ij}A_j} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} z_i^{a_{ij}A_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_j} = \prod_{i=1}^{m} z_i^{b_i}
\end{aligned}$$

综上推倒定义 1 将 φ 的单项式 $\omega_1^{A_1}\omega_2^{A_2}\cdots\omega_n^{A_n}$ 映射到 $z_1^{b_1}z_2^{b_2}\cdots z_n^{b_n}$，从而映射 φ 建立了优化问题(2)的等式两边的关系。

定义 2 [14]假若给定 $f_1, \cdots, f_n \in K[z_1, \cdots, z_m]$，固定 $K[z_1, \cdots, z_m, \omega_1, \cdots \omega_n]$ 上单项式的顺序使具有如下性质：任一含有某个 z_i 的单项式大于任一含仅有 ω_j 的单项式。设 g 是下述理想的 Groebner 基：$I = \langle f_1 - \omega_1, \cdots, f_n - \omega_n \rangle \subset K[z_1, \cdots, z_m, \omega_1, \cdots, \omega_n]$。对于属于 $K[z_1, \cdots, z_m]$ 的任意 f，$\overline{f}^G$ 表示 f 被 G 约化的余式。则

a) 当且仅当 $g = \overline{f}^G \in K[\omega_1, \cdots, \omega_n]$ 时多项式 $f \in K[f_1, \cdots, f_n]$；

b) 如果 $f \in K[f_1, \cdots, f_n]$ 并且 $g = \overline{f}^G \in K[\omega_1, \cdots, \omega_n]$，那么 $f = g(f_1, \cdots, f_n)$；

c) 如果每个 f_j 和 f 都是单项式而且 $f \in K[f_1, \cdots, f_n]$，那么 g 也是单项式。

定理 [16]在整数规划问题(2)中，$a_{ij}, b_i \geq 0$ 且记 $f_j = \prod_{i=1}^{m} z_i^{a_{ij}}$，设基由 $f_1 - \omega_1, \cdots, f_n - \omega_n$ 生成的理想记

为 $I=\langle f_1-\omega_1,\cdots,f_n-\omega_n\rangle\in K[z_1,\cdots,z_n,\omega_1,\cdots,\omega_n]$，并 G 为 I 的 Groebner 基(取合适的单项式序)则当 $f=z_1^{b_1}z_2^{b_2}\cdots z_n^{b_n}\in K[f_1,\cdots,f_n]$ 时，$\overline{f}^G=\omega_1^{A_1}\cdots\omega_n^{A_n}\in K[\omega_1,\cdots,\omega_n]$ 给出整数规划问题(2)的最优解。

综上，我们可以得到一个求解整数规划问题(2)的 Groebner 基算法。

输入：优化问题(2)中的 b 以及由目标函数 $h(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 定义的单项式序＞

输出：问题(2)的最优解。

Step1：$f_j:=\prod_{i=1}^{m}z_i^{a_{ij}},\ j=1,2,\cdots,n$；

Step2：$I:=\langle f_1-\omega_1,\cdots,f_n-\omega_n\rangle$；计算 $G:=I$ 关系序＞的 Groebner 基；

Step3：置 $f:=\prod_{i=1}^{m}z_i^{a_{ij}}$，计算余式 $g:=\overline{f}^G$；

Step4：若 $g\in K[\omega_1,\cdots,\omega_n]$ 那么输出 g 的指数向量，否则无解。

3. Beckmann 模型和求解过程

3.1. Beckmann 均衡分配模型[2]

Beckmann 均衡分配模型是 Wardrop 第一原理的数学描述，是研究交通分配问题的基础，具体的模型表达式见式(3)至式(5)。

$$\min:Z(X)=\sum_a\int_0^{x_a}t_a(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$s.t.\ \sum_k f_k^{rs}=q_{rs},\forall r,s \tag{4}$$

$$f_k^{rs}\ge 0,\ f_k^{rs}\in Z^+,\ \forall r,s \tag{5}$$

$$x_a=\sum_{r,a}\sum_k f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs}\quad \forall a$$

其中，$t_a(x)=t_a(0)\left[1+\alpha\left(x/e_a\right)^{\beta}\right]$。

x_a 表示路段 a 上的交通量，它组成的向量为 $x=(\cdots,x_a,\cdots)$；t_a 表示路段 a 的交通阻抗；$t_a(x_a)$ 表示路段 a 的以流量为自变量的阻抗函数；f_k^{rs} 表示点对 (r,s) 间的第 k 条路径的交通量，其向量为 $f=(\cdots,f_k^{rs},\cdots)$；$c_k^{rs}$ 表示点对 (r,s) 间的第 k 条路径的阻抗；$\delta_{a,k}^{rs}$ 是路段－径路相关变量，即 0-1 变量，如果路段 a 属于从出发地 r 目的地为 s 的 OD 间第 k 条径路，则 $\delta_{a,k}^{rs}=1$，否则 $\delta_{a,k}^{rs}=0$；W_{rs} 表示点对 (r,s) 之间的所有径路集合；q_{rs} 表示点对 (r,s) 之间的交通量；$t_a(0)$ 表示车辆平均自由行使时间；e_a 表示路段 a 的交通容量；α,β 为参数，$\alpha=0.15,\beta=4$。

3.2. 应用 Groebner 基理论求解过程

3.2.1. 求解思路

Beckmann 模型中路段阻抗与路段中交通量有关，所以组成的路径也是不唯一的，然而 Groebner 基理论处理的是确定多项式的求解。所以假设每一个 OD 对之间的所有路径都有可能有交通量产生，当达到平衡时，所有被利用的路径具有相等而最小的阻抗，而未被利用的路径与其具有相等或更大的阻抗。若 $f_k^{rs}>0$，必有 $\sum_a t_a(x_a)\delta_{a,k}^{rs}=c_k^{rs}$，说明如果从 r 到 s 有两条及以上的径路被选中，那么他们行驶时间相等；若 $f_k^{rs}=0$，必有 $\sum_a t_a(x_a)\delta_{a,k}^{rs}\ge c_k^{rs}$，说明如果从 r 到 s 的径路流量等于零，那么该径路的行驶时间一定超过被选中的径路行驶时间。最终约束条件都转换为确定的线性等式，目标函数为多维的非线性函数，应用 Groebner 基理论求解。

3.2.2. 求解过程

由 3.2.1 节的分析可将 Beckmann 模型变为如下形式：

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}: Z(X) = h\left(f_k^{rs}\right) \\ &s.t.\ \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r, s \\ &f_k^{rs} \ge 0,\ f_k^{rs} \in Z^+,\ \forall r, s \end{aligned} \tag{6}$$

该式中 $h\left(f_k^{rs}\right)$ 表示目标函数只与变量 f_k^{rs} 有关的函数。假设从起点 r 到终点 s 的所有径路的个数为 n。对式(6)中每一个等式引入一个不确定的变量 z_l，并且给以乘幂得到式(7)：

$$z_l^{f_1^{ij}+f_2^{ij}+\cdots+f_n^{ij}} = z_l^{q_{ij}} \tag{7}$$

对于任意的 $i=1,\cdots,r$，$j=1,\cdots,s$，$l=1,\cdots,r\times s$。把等式的左边和右边分别相乘并且重新排列指数，得到等式(8)。

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{r\times s} z_l\right)^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f_k^{rs}} = \prod_{l=1}^{r\times s} z_l^{q_{ij}} \tag{8}$$

由命题 1 可以得到映射 $\varphi: K\left[\omega_1,\cdots,\omega_{n\times r\times s}\right] \to K\left[z_1,\cdots,z_{r\times s}\right]$，即

$$\begin{gathered} \omega_1 \to z_1, \omega_2 \to z_1,\ \cdots, \omega_n \to z_1 \\ \vdots \\ \omega_{n+1} \to z_2,\ \omega_{n+2} \to z_2,\ \cdots, \omega_{2n} \to z_2 \\ \vdots \\ \omega_{n(r\times s-1)+1} \to z_{r\times s},\ \omega_{n(r\times s-1)+2} \to z_{r\times s}, \cdots, \omega_{r\times s\times n} \to z_{r\times s} \end{gathered}$$

这一问题的可行域内的整数点

$\left(f_1^{11},\cdots,f_n^{11},\cdots,f_1^{1s},\cdots,f_n^{1s},f_1^{21},\cdots,f_n^{21},\cdots,f_1^{2s},\cdots,f_n^{2s},\cdots,f_1^{r1},\cdots,f_n^{r1},\cdots,f_1^{rs},\cdots,f_n^{rs}\right)$ 是满足如下条件的点：

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\omega_1^{f_1^{11}}\cdots\omega_n^{f_n^{11}}\cdots\omega_{(s-1)\times n+1}^{f_1^{1s}}\cdots\omega_{ns}^{f_n^{1s}}\cdots\omega_{ns\times(r-1)+1}^{f_1^{r1}}\cdots\omega_{ns\times(r-1)+n}^{f_n^{r1}}\cdots\omega_{n(r\times s-1)+1}^{f_1^{rs}}\cdots\omega_{nrs}^{f_n^{rs}}\right) \\ &= z_1^{q_{11}}\cdots z_s^{q_{1s}} z_{s+1}^{q_{21}}\cdots z_{2s}^{q_{2s}}\cdots z_{s(r-1)+1}^{q_{r1}}\cdots z_{rs}^{q_{rs}} \end{aligned}$$

并且在这种情况下，每个 $K\left[z_1,\cdots,z_{r\times s}\right]$ 中的单项式是 $K\left[\omega_1,\cdots,\omega_{r\times s\times n}\right]$ 中某单项式的像。

由命题 2 考虑理想

$$I = \left\langle \begin{matrix} z_1-\omega_1, z_1-\omega_2,\cdots,z_1-\omega_n, z_2-\omega_{n+1}, z_2-\omega_{n+2},\cdots,z_2-\omega_{2n},\cdots,z_{r\times s}-\omega_{n(r\times s-1)+1}, \\ z_{r\times s}-\omega_{n(r\times s-1)+2},\cdots,z_{r\times s}-\omega_{r\times s\times n} \end{matrix} \right\rangle$$

，并采用下列词典序：$z_1 \succ z_2 \succ \cdots \succ z_{rs} \succ \omega_{rsn} \succ \omega_{rsn-1} \succ \cdots \succ \omega_1$，就可以得到一个关于理想 I 的 Groebner 基记为 G。取 $f = \prod_{l=1}^{r\times s} z_l^{ij}, i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,s$，求 f 关于 G 的约化多项式 $\overline{f}^G$，记为 g，如果 $g \in K\left[\omega_1,\cdots,\omega_{r\times s\times n}\right]$，那么 g 的指数向量就是所要求的模型解，否则问题无解。

4. 案例分析

4.1. 算例描述

本文以文献[9]中西安湘子庙历史街区慢行网络为例说明该算法的有效性。网络的拓扑结构见图 1。

各个路段属性数据见表 1。

4.2. 求解过程

算例中有四个 OD 对，每个 OD 对的流量分别为 $q_{15}=8000$；$q_{25}=32000$；$q_{35}=16000$；$q_{45}=24000$；其中 OD 对 1-5 有四条路径，其他 OD 对只有一条路径，所有路径对应的路段见表 2。

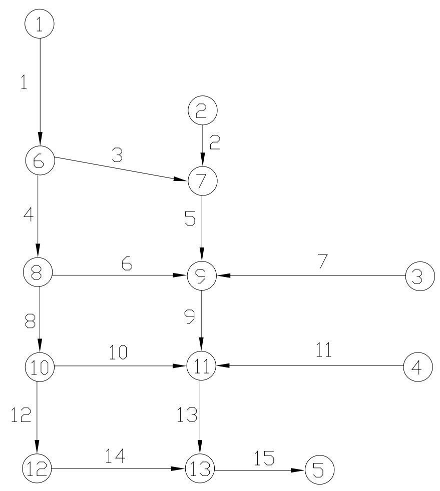

Figure 1. Schematic diagram of road network
图 1. 路网示意图

Table 1. Link attribute table
表 1. 路段属性表

路段编号	自由流行走时间/s	现有路段通行能力(pcu/h)	路段费用函数/s
1	12	16,320	$t_1(x)=12\left[1+0.15(x/16320)^4\right]$
2	10	34,272	$t_2(x)=10\left[1+0.15(x/34272)^4\right]$
3	9	19,040	$t_3(x)=9\left[1+0.15(x/19040)^4\right]$
4	21	12,240	$t_4(x)=21\left[1+0.15(x/12240)^4\right]$
5	11	26,572	$t_5(x)=11\left[1+0.15(x/26572)^4\right]$
6	6	28,832	$t_6(x)=6\left[1+0.15(x/28832)^4\right]$
7	21	19,040	$t_7(x)=21\left[1+0.15(x/19040)^4\right]$
8	6	12,240	$t_8(x)=6\left[1+0.15(x/12240)^4\right]$
9	6	26,572	$t_9(x)=6\left[1+0.15(x/26572)^4\right]$
10	6	28,832	$t_{10}(x)=6\left[1+0.15(x/28832)^4\right]$
11	20	28,832	$t_{11}(x)=20\left[1+0.15(x/28832)^4\right]$
12	22	16,320	$t_{12}(x)=22\left[1+0.15(x/16320)^4\right]$
13	22	14,688	$t_{13}(x)=22\left[1+0.15(x/14688)^4\right]$
14	17	35,360	$t_{14}(x)=17\left[1+0.15(x/35360)^4\right]$
15	13	35,360	$t_{15}(x)=13\left[1+0.15(x/35360)^4\right]$

Table 2. Correspondence relation of path-link

表 2. 路径-路段对应关系

路径编号	符号表示	经过的路段
1	f_1^{15}	1-3-5-9-13-15
2	f_2^{15}	1-4-6-9-13-15
3	f_3^{15}	1-4-8-10-13-15
4	f_4^{15}	1-4-8-12-14-15
5	f_1^{25}	2-5-9-13-15
6	f_1^{35}	7-9-13-15
7	f_1^{45}	11-13-15

将各个路径的流量转换为路段流量，结合表 1 中路段费用函数代入 3.1 节中 Beckmann 模型，整理得到式(9)~(13)。

$$\min: Z(X) = \sum_{a=1}^{15}\int_0^{x_a} t_a(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$s.t.\ \ f_1^{15} + f_2^{15} + f_3^{15} + f_4^{15} = 8000 \tag{10}$$

$$f_1^{25} = 32000 \tag{11}$$

$$f_1^{35} = 16000 \tag{12}$$

$$f_1^{45} = 24000 \tag{13}$$

$$f_1^{15}, f_2^{15}, f_3^{15}, f_4^{15}, f_1^{25}, f_1^{35}, f_1^{45} \ge 0$$

其中，$x_1 = f_1^{15} + f_2^{15} + f_3^{15} + f_4^{15}$；$x_2 = f_1^{25}$；$x_3 = f_1^{15}$；$x_4 = f_2^{15} + f_3^{15} + f_4^{15}$；$x_5 = f_1^{15}$；$x_6 = f_2^{15}$；$x_7 = f_1^{35}$；$x_8 = f_3^{15} + f_4^{15}$；$x_9 = f_1^{15} + f_2^{15} + f_1^{25} + f_1^{35}$；$x_{10} = f_3^{15}$；$x_{11} = f_1^{45}$；$x_{12} = f_4^{15}$；$x_{13} = f_1^{15} + f_2^{15} + f_1^{35} + f_1^{45}$；$x_{14} = f_4^{15}$；$x_{15} = f_1^{15} + f_2^{15} + f_3^{15} + f_4^{15} + f_1^{25} + f_1^{35} + f_1^{45}$；

将式(10)~(13)中等式约束分别引入变量 z_1，z_2，z_3，z_4 并且两边乘幂得到 $z_1^{f_1^{15}+f_2^{15}+f_3^{15}+f_4^{15}} = z_1^{8000}$，$z_2^{f_1^{25}} = z_2^{32000}$，$z_3^{f_1^{35}} = z_3^{16000}$，$z_3^{f_1^{35}} = z_3^{16000}$ 再将三个等式左右两边分别相乘得 $z_1^{f_1^{15}+f_2^{15}+f_3^{15}+f_4^{15}} z_2^{f_1^{25}} z_3^{f_1^{35}} z_4^{f_1^{45}} = z_1^{8000} z_2^{32000} z_3^{16000} z_4^{24000}$。由命题 1 得到映射：

$$\varphi: K[\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7] \to K[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

$$\omega_1 \to z_1; \omega_2 \to z_1; \omega_3 \to z_2; \omega_4 \to z_2; \omega_5 \to z_3; \omega_6 \to z_3$$

由命题 2 得到理想 $I = \langle z_1-\omega_1, z_1-\omega_2, z_2-\omega_3, z_2-\omega_4, z_3-\omega_5, z_3-\omega_6 \rangle$，根据目标函数定义特定的序，使用 Mathematica 软件中 GroebnerBasis 命令得到一组 Groebner 基 G：

$$g_1 = z_1 - \omega_1$$

$$g_2 = z_2 - \omega_3$$

$$g_3 = z_3 - \omega_5$$

$$g_4 = z_4 - \omega_7$$

$$g_5 = \omega_7 - \omega_6$$

$$g_6 = \omega_5 - \omega_4$$

$$g_7 = \omega_3 - \omega_2$$

令 $f = z_1^{8000} z_2^{32000} z_3^{16000} z_4^{24000}$，由定理 2 中的算法求得 f 被 G 约化的余式 $\overline{f}^G = \omega_3^{8000} \omega_3^{32000} \omega_4^{16000} \omega_5^{24000}$。$\overline{f}^G$ 的指数向量对应目标函数的解，即 $f_1^{15} = 0$，$f_2^{15} = 0$，$f_3^{15} = 8000$，$f_4^{15} = 0$，$f_1^{25} = 32000$，$f_1^{35} = 16000$，$f_1^{45} = 24000$。所以平衡后各个路段的流量为：$x_1 = 8000$；$x_2 = 32000$；$x_3 = 0$；$x_4 = 8000$；$x_5 = 32000$；$x_6 = 0$；$x_7 = 16000$；$x_8 = 8000$；$x_9 = 48000$；$x_{10} = 8000$；$x_{11} = 24000$；$x_{12} = 0$；$x_{13} = 80000$；$x_{14} = 0$；$x_{15} = 80000$。由计算结果可知，每一个 OD 对的所有路径中，阻抗较小的路径都分配了流量且行驶时间相等，而阻抗大的路径流量为零，满足 Wardrop 第一原理，所以 Groebner 基理论可以用于求解 Beckmann 模型。与 W-F 迭代解法和智能优化解法相比，Groebner 基理论得到的解是模型的精确解，有更高的精度。然而该方法在面对大规模路网时，由于路径多，目标函数比较复杂，针对目标函数定义特定序的工作量比较大。而对于中小城市路网使用 Groebner 基理论的方法作交通流量分配更经济。

5. 结论与展望

Groebner 基方法在求解非线性多项式方程方面具有优势，可以从任一多项式理想的一组给定生成元有效计算出另一组良好的生成元(称为 Groebner 基)，且有 Hilbert 基定理保证得到约化的 Groebner 基是唯一的，所以求得的解准确可靠。是求解精确解的重要方法。本文结合 Groebner 基理论将 Beckmann 模型转化为多项式方程组，给出了精确求解 Beckmann 模型的新方法，并结合实例验证了该方法的有效性。

然而，该方法是假设每个 OD 对上的所有路径都有机会分配交通量，这就大大增加了计算机的内存需求，对于 OD 对较多的路网，路径非常多，需要高性能计算机处理。同时，依据目标函数定义特定的序也是一件庞大的工作。所以如何制定恰当的规则寻找有效路径，使得那些平衡后为零的路径在分配之前就剔除掉，保留下来的路径再用该方法寻找精确解是未来研究的方向。

基金项目

国家自然科学基金委员会资助项目(11571008)。

参考文献 (References)

[1] 邵春福. 交通规划原理[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2006: 172-180.

[2] 刘灿齐. 现代交通规划学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001: 206-244.

[3] 董敬欣, 吴建平. 基于神经网络的交通平衡求解算法[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(6): 1380-1383.

[4] Li, R.M. and Li, W. (2005) The Application of Genetic Algorithm to Dynamic Traffic Assignment. *IEEE. Proceedings of Intelligent Vehicles Symposium*, Las Vegas, 6-8 June 2005, 827-832.

[5] 陆化普, 孙煦, 吴娟. 公交专用道优化设计的双层规划模型[J]. 中国路学报, 2015, 28(2): 88-93.

[6] 刘强, 陆化普, 王庆云. 区域综合交通枢纽布局双层规划模型[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2010, 40(6): 1359-1362.

[7] 徐勋倩, 王亚萍. 用蚂蚁算法处理固定需求交通平衡分配问题[J]. 南通工学院学报: 自然科学版, 2004, 3(2): 24-27.

[8] Mahut, M. (2005) A Heuristic Algorithm for Simulation-Based Dynamic Traffic Assignment. *Proceedings of IEEE Intelligent Transportation Systems*, Vienna, 13-15 September 2005, 239-244.

[9] 王秋平, 刘星明, 魏华. 历史街区慢行交通连续网络设计鲁棒优化模型[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2015, 35(5): 112-116.

[10] 李宗平, 李冰. 城市交通连续平衡网络设计问题的模拟退火算法[J]. 系统工程, 2004, 22(2): 87-91.

[11] 孙杨, 宋瑞, 何世伟, 等. 混合交通网络设计及免疫克隆退火算法求解研究[J]. 交通运输系统工程与信息, 2009, 9(3): 103-108.

[12] 王素欣, 高利, 崔小光, 等. 交通分配的粒子群优化算法[J]. 交通运输工程学报, 2007, 7(5): 97-100.

[13] 陈小松，彭丰富. Groebner 基理论在最短路径问题中的应用[J]. 中南工业大学学报, 2002, 33(6): 648-650.

[14] 朱玉莲. Groebner 基理论及其在一些优化问题上的应用[D]: [硕士学位论文]. 长沙：中南大学, 2007: 15-18.

[15] Hoşten, S. and Sturmfels, B. (2005) Integer Programming and Combinatorial Optimization. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 267-270.

[16] 周梦. 计算机代数与应用[M]. 武汉：武汉大学出版社, 2002: 205-210.