

Solution of Two-Dimensional Airfoil Flutter Equations Using Chebyshev Expansion Method

Yunhai Wang¹, Yu Ji², Qun Cai¹, Xianming Zhang¹

¹College of Mechanical Engineering, Guizhou Institute of Technology, Guiyang Guizhou

²Institute of Vibration Engineering Research, State Key Lab of Mechanics and Control for Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

Email: yantaicity@163.com

Received: Jun. 29th, 2016; accepted: Jul. 24th, 2016; published: Jul. 27th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The classical two-dimensional airfoil flutter equations can be established by using sinusoidal structure motion hypothesis and some kinds of aerodynamic theory. In fact, when flutter occurs, structure movement is likely to be more complex. Sinusoidal structure hypothesis is proposed merely because it is simple and easy to use. For this case, harmonic balance method cannot appropriate for all the higher order terms are ignored, which might lead to larger error. This paper presents a new way to establish the flutter equations: Chebyshev expansion method. This method which is suitable for quantitative questions has higher accuracy than harmonic balance, moreover, it is applicable to the analysis of those qualitative of nonlinear problems as well. Finally, an example is used to illustrate how to establish the flutter equations of two-dimension airfoil by using Chebyshev expansion method and how to find the flutter solution based on V-g method.

Keywords

Chebyshev Expansion, Flutter, Unsteady Aerodynamics

求解二元机翼颤振方程的切比雪夫展式方法

王云海¹, 季雨², 蔡群¹, 张宪明¹

¹贵州理工学院机械学院, 贵州 贵阳

²南京航空航天大学, 机械结构与控制国家重点实验室, 振动工程研究所, 江苏 南京
Email: yantaicity@163.com

收稿日期: 2016年6月29日; 录用日期: 2016年7月24日; 发布日期: 2016年7月27日

摘 要

经典二元机翼颤振方程的建立基于结构正弦运动假设以及各种气动力理论。提出结构正弦运动假设是对真实运动的一种近似处理方法, 事实上, 颤振发生时结构运动形式完全可能更为复杂, 结构的正弦运动假设的提出仅仅出于应用过程中的简单和容易。基于这样的假设, 传统的谐波平衡法未必合适。常见的谐波平衡法由于忽略超过预估的高频项, 可能会引发较大的误差。本文提出一种建立二元机翼颤振方程的新途径: 切比雪夫多项式展式法。该方法适用于定量问题的分析和研究, 精度优于标准的谐波平衡法, 而且该方法也适用于处理非线性问题, 更方便于对系统做定性分析。最后, 通过一个算例说明如何利用切比雪夫多项式展式方法建立二元翼段的颤振方程, 并结合V-g法获得了翼型的颤振速度。

关键词

切比雪夫展式, 颤振, 非定常气动力

1. 引言

众所周知, 飞行器弹性结构体在均匀气流中受到空气动力、弹性力和惯性力的耦合作用容易诱发等幅或发散振动形态, 这种现象被称之为“颤振”, 它是气动弹性力学中最重要的问题之一。

最近几年, 随着计算机软硬件技术的发展, 基于计算流体力学(CFD)和结构动力学(CSD)的颤振耦合计算的研究开始盛行, 却存在着存储空间过多耗费、冗长的数据难以处理分析以及高昂的计算时间成本等缺憾[1]。因此, 为便于飞行器颤振机理的研究, 使用经典的气动力理论代替 CFD 方法进行颤振分析还是非常必要的。

基于二元翼段的颤振计算和研究, 在机理上与研究三维机翼颤振问题颇为相似, 可分为定性和定量两大类, 前者的研究对象是系统的稳定性, 后者则着眼于颤振的振幅、频率和相位等要素[2]。经典教科书中, 常以二元机翼做正弦运动为例, 引入西奥道生非定常气动力理论用于颤振分析, 颤振计算的结果可以用于早期的工程实践中[3]。

机翼结构运动规律采用正弦假设, 可以看作是真实运动的一种简化(一阶近似解), 其缺点是: 定量计算的精度不可能很高[4]。对于定量分析而言, 预测颤振发生时的振幅就属于系统辨识问题, 例如常见的谐波平衡法。标准的谐波平衡法忽略超过预估的高频, 容易引发较大的误差[5]。

对于飞行器气动弹性耦合问题的研究, 为了提高颤振预测的精确性, 各种气动力理论和计算方法的研究仍处于发展和研究中[6]-[11]。对于气动弹性稳定性分析而言, 采用西奥道生非定常气动力理论建立的颤振方程, 气动力和结构运动之间存在相互耦合的关系, 因此, 结构运动假设的不合理将会直接导致颤振计算结果的精度不足。

本文提出一种建立二元机翼颤振方程的新途径: 切比雪夫多项式展式方法。该方法对结构运动形式没有限制, 易于推广到非线性气动弹性耦合系统分析。在定量分析中, 该方法在精度上高于标准谐波平衡方法[5]。作为一个例子, 本文仍以正弦形式的结构运动作为颤振发生时的条件, 提出一种坐标变换的新方法, 即通过引入切比雪夫正交基函数族的方法, 建立颤振方程并通过 V-g 法获得颤振速度解。

2. 第一类切比雪夫多项式性质

切比雪夫多项式自诞生之日起,就在各个学术领域生根发芽,例如从事系统分析、参数辨识、最优控制和模型降阶等工作[12]-[15]。在航空航天领域,例如模型辨识问题上,选择切比雪夫正交基函数的良好性质,能够有效提升辨识的精度和效率[16][17]。

第一类切比雪夫多项式 $T_n(t)$ 在作用域 $[0,1]$ 上关于权函数 $w(t)=[t(1-t)]^{-1/2}$ 满足正交关系:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, T_1(t) = 2t - 1 \\ T_n(t) &= 2(2t - 1)T_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_0^1 w(t) \cdot T_m \cdot T_n dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这里, m, n 是非负整数。

切比雪夫多项式函数簇的全体在闭区间 $[0,1]$ 上构成了一簇完整的正交基,因此,时域内的连续函数都可以通过切比雪夫多项式进行任意逼近:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(t) \quad (3)$$

这里,系数 a_i 由下式决定

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 w(t) f(t) T_0 dt \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 w(t) f(t) T_n dt, n > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

3. 二元机翼运动方程的建立

假设二元机翼做等副正弦运动时恰好发生了机翼颤振现象,此时借助于西奥道生非定常气动力理论参与运动方程的建模是合理的[3]。作为一种近似,颤振发生时二元机翼结构运动(沉浮 h 和俯仰 α) 规律如下给出,

$$\begin{aligned} h &= h_0 e^{j\omega t} \\ \alpha &= \alpha_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

这里,振幅 h_0, α_0 允许是复数形式(表示颤振发生时,两种结构运动形式之间允许存在相位差), ω 是结构运动振动频率。

西奥道生非定常气动力的计算公式由下式决定[12],

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho b^2 (V \alpha' + h'' - ab \alpha'') + 2\pi \rho V b C(k) [V \alpha + h' + (0.5 - a) b \alpha'] \\ M &= \pi \rho b^2 [ab(V \alpha' + h'' - ab \alpha'') - 0.5 V b \alpha' - 0.125 b^2 \alpha''] \\ &\quad + 2\pi \rho V b^2 (0.5 + a) \cdot C(k) [V \alpha + h' + (0.5 - a) b \alpha'] \end{aligned} \quad (6)$$

这里, V 是自由来流速度, b 是半弦长, $a \cdot b$ 代表弦长中点到弹性轴的距离, k 是减缩频率(量纲为 1, $k = b\omega/V$), $C(k) = F(k) + iG(k)$ 被称作西奥道生函数,它的近似公式是

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.045i}{k}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.30i}{k}}, k \leq 0.5 \quad (7)$$

或

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.04li}{k}} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.32i}{k}}, k > 0.5 \quad (8)$$

二元机翼模型(图 1)通常具有俯仰和沉浮两个自由度。借助于拉格朗日方程或虚功原理,模型系统运动方程的表达形式如下所示:

$$\begin{aligned} mh'' + S_\alpha \alpha'' + c_h h' + K_h h &= -L \\ S_\alpha h'' + I_\alpha \alpha'' + c_\alpha \alpha' + K_\alpha \alpha &= M \end{aligned} \quad (9)$$

或写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} m & mx_\alpha b \\ mx_\alpha b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix} \quad (10)$$

这里, h, α 代表二元平板在不可压流中做频率 ω 的简谐运动; L, M 是西奥道生非定常气动力和力矩; $S_\alpha = mx_\alpha b$ 单位展长机翼对弹性轴的质量静矩; $I_\alpha = mr_\alpha^2 b^2$ 单位展长机翼对转轴的质量惯量; r_α 针对弹性轴的回转半径,量纲是 1。

4. 基于切比雪夫展式的颤振分析方法

不妨假设系统的阻尼系数为零, $c_h = 0, c_\alpha = 0$, 并将(9)式改写成

$$\begin{aligned} [I_\alpha m - (S_\alpha)^2] h'' + I_\alpha K_h h - S_\alpha K_\alpha \alpha &= -LI_\alpha - MS_\alpha \\ [(S_\alpha)^2 - mI_\alpha] \alpha'' + S_\alpha K_h h - mK_\alpha \alpha &= -LS_\alpha - Mm \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\Delta = I_\alpha m - (S_\alpha)^2$, (11)式又可写成:

$$\begin{aligned} h'' &= -\frac{I_\alpha K_h}{\Delta} h + \frac{S_\alpha K_\alpha}{\Delta} \alpha - \frac{LI_\alpha + MS_\alpha}{\Delta} \\ \alpha'' &= \frac{S_\alpha K_h}{\Delta} h - \frac{mK_\alpha}{\Delta} \alpha + \frac{LS_\alpha + Mm}{\Delta} \end{aligned} \quad (12)$$

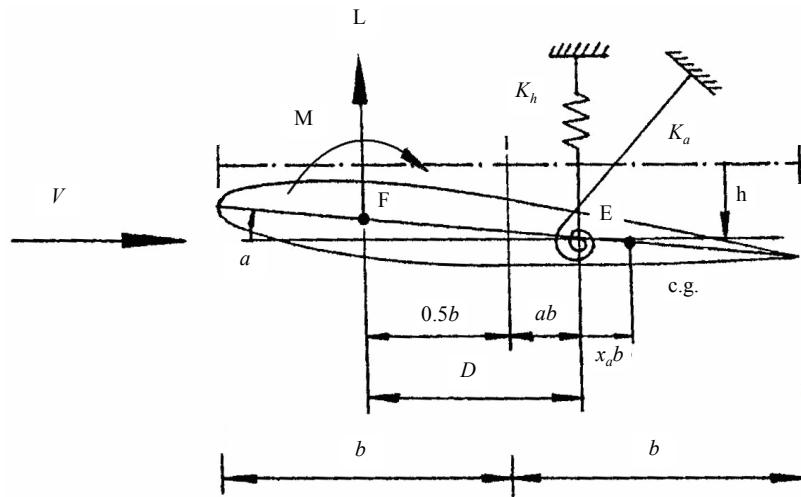


Figure 1. Two-dimension airfoil model schematic diagram

图 1. 二元机翼模型示意图

令 $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (h \ \alpha \ h' \ \alpha')^T$ ，则对应于(12)式的状态空间方程为

$$\frac{dX}{dt} = BX + F \quad (13)$$

或

$$\begin{pmatrix} h \\ \alpha \\ h' \\ \alpha' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{I_\alpha K_h}{\Delta} & \frac{S_\alpha K_\alpha}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{S_\alpha K_h}{\Delta} & -\frac{mK_\alpha}{\Delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \alpha \\ h' \\ \alpha' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{LI_\alpha + MS_\alpha}{\Delta} \\ \frac{LS_\alpha + Mm}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (14)$$

注意到 $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ ，基于第一类切比雪夫函数簇进行逼近，有

$$\begin{cases} \cos \omega t = \cos 2\pi s = \sum_{i=0}^{m-1} c_{1,i} T_i(s) \\ \sin \omega t = \sin 2\pi s = \sum_{i=0}^{m-1} c_{2,i} T_i(s) \end{cases}, t \in [0, T], s = \frac{\omega t}{2\pi} \in [0, 1] \quad (15)$$

这里， $c_{1,i}, c_{2,i}$ 分别是余弦和正弦三角函数在切比雪夫展式中的待定系数； m 是切比雪夫展式的截断阶数； $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 是结构运动的最小正周期， ω 是颤振发生时的待求频率。

将(5)式及其一、二阶导数形式表达式中 $e^{j\omega t}$ 项，通过(15)式进行代换，得到(14)式的另一种表达形式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h \\ \alpha \\ h' \\ \alpha' \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} j\omega h_0 \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \\ j\omega \alpha_0 \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \\ -\omega^2 h_0 \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \\ -\omega^2 \alpha_0 \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega h_0 \\ j\omega \alpha_0 \\ -\omega^2 h_0 \\ -\omega^2 \alpha_0 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{I_\alpha K_h}{\Delta} & \frac{S_\alpha K_\alpha}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{S_\alpha K_h}{\Delta} & -\frac{mK_\alpha}{\Delta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ \alpha_0 \\ j\omega h_0 \\ j\omega \alpha_0 \end{pmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{LI_\alpha + MS_\alpha}{\Delta} \\ \frac{LS_\alpha + Mm}{\Delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

其中，气动力和气动力矩 L, M 见(6)式。

下面，将非定常气动力和力矩进行化简，具体过程如下

$$\begin{aligned} L &= \pi \rho b^2 (V\alpha' + h'' - ab\alpha'') + 2\pi \rho V b C(k) [V\alpha + h' + (0.5 - a) b\alpha'] \\ &= \left\{ \pi \rho b^2 \left[\frac{\omega b}{k} j\omega \alpha_0 - \omega^2 h_0 + ab\omega^2 \alpha_0 \right] + 2\pi \rho \frac{\omega b}{k} b C(k) \left[\frac{\omega b}{k} \alpha_0 + j\omega h_0 + (0.5 - a) b j\omega \alpha_0 \right] \right\} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \quad (17) \\ &= \pi \rho b^2 \omega^2 \left\{ \left(2 \frac{j}{k} C(k) - 1 \right) h_0 + \left[\frac{bj}{k} + ab + 2C(k) \frac{b}{k^2} + \frac{bj}{k} C(k) (1 - 2a) \right] \alpha_0 \right\} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i}) T_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \pi\rho b^2 \left[ab(V\alpha' + h'' - ab\alpha'') - 0.5Vb\alpha' - 0.125b^2\alpha'' \right] + 2\pi\rho Vb^2(0.5+a)C(k) \left[V\alpha + h' + (0.5-a)b\alpha' \right] \\
&= \left\{ \pi\rho b^2 \left[ab \left(\frac{\omega b}{k} j\omega\alpha_0 - \omega^2 h_0 + ab\omega^2\alpha_0 \right) - 0.5\frac{\omega b}{k} bj\omega\alpha_0 + 0.125b^2\omega^2\alpha_0 \right] \right. \\
&\quad \left. + 2\pi\rho \frac{\omega b}{k} b^2(0.5+a)C(k) \left[\frac{\omega b}{k}\alpha_0 + j\omega h_0 + (0.5-a)bj\omega\alpha_0 \right] \right\} \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i})T_i \\
&= \pi\rho b^2 \omega^2 \left\{ \left[a\frac{b^2 j}{k} - 0.5\frac{b^2 j}{k} + a^2 b^2 + 0.125b^2 + (1+2a)C(k)\frac{b^2}{k^2} + \frac{b^2 j}{k}(1+2a)C(k)(0.5-a) \right] \alpha_0 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{b}{k}(1+2a)C(k)j - ab \right] h_0 \right\} \sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i})T_i
\end{aligned} \tag{18}$$

这里，使用了减缩频率的定义 $k = b\omega/V$ ，消去了自由来流速度项 V 。

上述表达式中的 $\sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i})T_i$ ，可进一步改写成

$$\sum_{i=0}^{m-1} (c_{1,i} + jc_{2,i})T_i = [c_{1,0} \quad c_{1,1} \quad \cdots \quad c_{1,m-1}] \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{m-1} \end{pmatrix} + j [c_{2,0} \quad c_{2,1} \quad \cdots \quad c_{2,m-1}] \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{m-1} \end{pmatrix} \tag{19}$$

从(14)~(19)式，可以看出引入切比雪夫多项式的过程，实际上是向系统引入了更多的待辨识参数变量 $c_{1,i}, c_{2,i}, i=0, \dots, m$ 的过程。运动方程中变量表达式 $h(t), \alpha(t)$ 原来由两项傅里叶级数构成，被转化成切比雪夫正交基多项式之后项数显著增加了。从系统辨识的角度观察，这种基函数簇的变换，并不导致结构运动方程形式上的复杂，却能够显著提升结构运动周期解的精度，即提高周期运动中振幅预测的精准度[5]。因此，无论是从定性或定量研究的角度看，切比雪夫正交基函数簇(变换)方法都是适宜的。

5. 算例：颤振方程的建立及求解

5.1. 颤振方程的建立

建立机翼颤振方程之前，通常需要无量纲处理。此时，需做如下规定

$$\omega_h = \sqrt{\frac{K_h}{m}}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{I_\alpha}} \tag{20}$$

这里， ω_h, ω_α 被称作二元翼段单纯弯曲(上下平移)振动和单纯扭转振动的固有频率。

再注意到(6)式的等价形式

$$\begin{aligned}
L &= -\pi\rho b^3 \omega^2 \left\{ L_h h/b + [L_\alpha - (0.5+a)L_h \alpha] \right\} \\
M &= \pi\rho b^4 \omega^2 \left\{ [M_h - (0.5+a)L_h] h/b + [M_\alpha - (0.5+a)(L_\alpha + M_h) + (0.5+a)^2 L_h] \alpha \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

这里，引入了新的参数变量 $L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$ ，它们既是减缩频率的函数，同时也是来流马赫数的函数，具体形式如下给出

$$\begin{aligned}
L_h &= 1 - \frac{2i}{k} [F(k) + iG(k)] \\
L_\alpha &= 0.5 - \frac{i}{k} \left\{ 1 + 2[F(k) + iG(k)] \right\} - \frac{2}{k^2} [F(k) + iG(k)] \\
M_h &= 0.5 \\
M_\alpha &= \frac{3}{8} - \frac{i}{k}
\end{aligned} \tag{22}$$

于是, 二元机翼的颤振方程式的最终形式如下所示

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m}{\pi\rho b^2} \left(1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + L_h \right] \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [L_\alpha - (0.5 + a)L_h] \right\} \alpha = 0 \\ & \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [M_h - (0.5 + a)L_h] \right\} \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} r_\alpha^2 \left(1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right) + [M_\alpha - (0.5 + a)(L_\alpha + M_h) + (0.5 + a)^2 L_h] \right\} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

5.2. 颤振方程的求解

为了计算(23)式所决定的颤振方程式中 ω 的数值, 有很多方法可以选择。本文采用引入结构阻尼的V-g法。结构阻尼的定义形式是: $-igK_h h$ 或 $-igK_\alpha \alpha$, 其颤振问题(也称之为复特征值问题)的一般形式如下所示

$$(A - zB)q = 0 \quad (24)$$

就本算例而言, (23)式将变成

$$\begin{aligned} & \left[\frac{m}{\pi\rho b^2} \left(1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2} - ig \frac{\omega_h^2}{\omega^2} \right) + L_h \right] \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [L_\alpha - (0.5 + a)L_h] \right\} \alpha = 0 \\ & \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [M_h - (0.5 + a)L_h] \right\} \frac{h}{b} + \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} r_\alpha^2 \left(1 - \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} - ig \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} \right) \right. \\ & \left. + [M_\alpha - (0.5 + a)(L_\alpha + M_h) + (0.5 + a)^2 L_h] \right\} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

注意到 $\frac{\omega_h^2}{\omega^2} = \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2}$, $(1 + ig) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} = z = z_R + i \cdot z_I$, 整理(25)式之后, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\pi\rho b^2 \omega_\alpha^2}{m\omega_h^2} \left[\frac{m}{\pi\rho b^2} + L_h \right] \frac{h}{b} + \frac{\pi\rho b^2 \omega_\alpha^2}{m\omega_h^2} \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [L_\alpha - (0.5 + a)L_h] \right\} \alpha = z \frac{h}{b} \\ & \frac{\pi\rho b^2}{mr_\alpha^2} \left\{ \frac{m}{\pi\rho b^2} x_\alpha + [M_h - (0.5 + a)L_h] \right\} \frac{h}{b} + \left\{ 1 + \frac{\pi\rho b^2}{mr_\alpha^2} [M_\alpha - (0.5 + a)(L_\alpha + M_h) + (0.5 + a)^2 L_h] \right\} \alpha = z\alpha \end{aligned} \quad (26)$$

以及颤振方程式

$$\begin{vmatrix} 4 + 0.8L_h - z & 1.25 + L_\alpha - 0.4L_h \\ 0.5 + 0.4M_h - 0.16L_h & 0.25 + M_\alpha - 0.4L_\alpha - 0.4M_h + 0.16L_h - z \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

当 $k = 0.8$ 时, 根据 $(1 + ig) \frac{\omega_\alpha^2}{\omega^2} = z = z_R + i \cdot z_I$ 的假设, 求得特征值

$$z = \begin{cases} 4.68682 - 1.71059i \\ 1.23924 - 0.05535i \end{cases}, z_R = \frac{\omega_\alpha}{\omega}, g = \frac{z_I}{z_R} = \begin{cases} -0.36498 \\ -0.04466 \end{cases} \quad (28)$$

当 $k = 0.6$ 时, 求得特征值

$$z = \begin{cases} 4.52114 - 2.01411i \\ 1.52401 + 0.14117i \end{cases}, z_R = \frac{\omega_\alpha}{\omega}, g = \frac{z_I}{z_R} = \begin{cases} -0.44549 \\ +0.09263 \end{cases} \quad (29)$$

本算例在使用V-g法求解颤振方程式(27)的过程中, 需借助于表1~3中的数据[3], 采用直线插值的方法, 获得颤振发生时频率的近似值, 并由此获得颤振速度的近似解。

Table 1. Structural parameters of the airfoil in this case

表 1. 算例中的翼型结构参数

名称	表达式	数值
频率比	$\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$	0.5
回转半径	$r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{mb^2}$	0.5
质量比	$\frac{m}{\pi\rho b^2}$	5
系数 1	a	-0.01
系数 2	$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{mb}$	0.25

Table 2. Parameters of unsteady dynamics, $k = 0.8$ 表 2. 非定常气动力参数, $k = 0.8$

名称	表达式	数值
升力 1	L_h	0.709-1.886i
升力 2	L_α	-1.523-2.271i
力矩 1	M_h	0.5
力矩 2	M_α	0.375-1.25i

Table 3. Parameters of unsteady dynamics, $k = 0.6$ 表 3. 非定常气动力参数, $k = 0.6$

名称	表达式	数值
升力 1	L_h	0.541-1.920i
升力 2	L_α	-3.175-2.831i
力矩 1	M_h	0.5
力矩 2	M_α	-0.375-1.667i

$$\frac{k_F - 0.8}{0.6 - 0.8} = \frac{0 - z_{I,k=0.8}}{z_{I,k=0.6} - z_{I,k=0.8}} \quad (30)$$

$$\frac{z_{RF} - z_{R,k=0.8}}{z_{R,k=0.6} - z_{R,k=0.8}} = \frac{0 - z_{I,k=0.8}}{z_{I,k=0.6} - z_{I,k=0.8}} \quad (31)$$

解得 $k_F = 0.736$, $z_{RF} = 1.319$ 。注意到 $k_F = \frac{b\omega}{V_F}$, 最终的颤振折算速度为

$$\frac{V_F}{b\omega_\alpha} = \frac{V_F}{b\omega} \frac{\omega}{\omega_\alpha} = \frac{1}{k_F \sqrt{z_{RF}}} = \frac{1}{0.736 \sqrt{1.319}} = 1.183 \quad (32)$$

6. 结论

1) 本文认为颤振发生时二元机翼结构做正弦运动的假设并非合理, 近似程度有待提高。鉴于已有文献证明了切比雪夫多项式(变换)方法能够改善常见的谐波平衡法精度上的不足, 因此, 本文引入第一类切比雪夫多项式(变换)方法应用于气动弹性领域。即, 将简单的傅立叶级数形式的周期运动解转化成高阶切

比雪夫正交基的表达形式,将有助于提升颤振发生时刻结构运动幅值的预测精度。

2) 从定性分析的角度看,切比雪夫正交基变换方法能够处理更加一般性的结构运动所引发的颤振分析问题。该方法的优点,体现在将多自由度微分方程组问题处理成简单的代数矩阵问题,具有良好的使用性和通用性。

3) 考虑到西奥道生气动力理论应用的局限性,因此,本文并未涉及非线性颤振问题。

基金项目

贵州省科学技术联合基金项目,黔科合 LH 字[2014] (7366);贵州省博士科研启动基金项目(XJGC 20150408);贵州理工学院航空宇航科学与技术重点学科建设项目(黔学位合字 ZDXK[2015]45 号)。

参考文献 (References)

- [1] Silva, W.A. (1997) Discrete-Time Linear and Nonlinear Aerodynamic Impulse Responses for Efficient CFD Analyses. PhD thesis, The College of William and Mary, Virginia.
- [2] 陈衍茂, 刘济科, 孟光. 二元机翼非线性颤振系统的若干分析方法[J]. 振动与冲击, 2011, 30(3): 129-134.
- [3] 陈桂彬, 邹长青, 杨超. 气动弹性设计基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.
- [4] 凌复华. 非线性振动系统周期运动及其稳定性的数值研究[J]. 力学进展, 1986, 16(1): 14-27.
- [5] 周桐, 徐健学. 一种新的求解非线性系统周期解方法[J]. 力学季刊, 2006, 27(4): 661-667.
- [6] 李道春, 向锦武. 非线性二元机翼气动弹性近似解解析研究[J]. 航空学报, 2007, 28(5): 1080-1084.
- [7] 祝小平, 陈士槽. 飞行器完全非定常气动力的一种工程计算方法[J]. 空气动力学报, 1993, 11(3): 298-302.
- [8] 杨炳渊, 宋伟力. 应用当地流活塞理论的大攻角升力面颤振气动力表达式[C]//中国土木工程学会, 中国力学学会. 第五届全国流体力学学术会议论文集: 1996 年卷. 重庆: 全国流体弹性力学学术会议, 1996: 223-228.
- [9] 叶正寅, 王刚, 等. 利用 N-S 方程模拟机翼气动弹性的一种计算方法[J]. 计算物理, 2001, 18(5): 397-401.
- [10] Dowell, E.H. and Tang, D.M. (2002) Nonlinear Aeroelasticity and Unsteady Aerodynamics. AIAA Paper 2002-2003.
- [11] 安效民, 徐敏, 陈士槽. 多场耦合求解非线性气动弹性的研究综述[J]. 力学进展, 2009, 39(3): 284-298.
- [12] 威廉·罗登. 气动弹性力学理论与计算[M]. 北京: 航空工业出版社, 2014.
- [13] 顾乐民. 预测型切比雪夫多项式[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(7): 34-38.
- [14] 周薇, 韩景龙, 陈全龙. 一种求非线性振动系统周期解的切比雪夫级数方法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(24): 1-5.
- [15] 张雨浓, 李巍, 蔡炳煌, 等. 切比雪夫正交基神经网络的权值直接确定法[J]. 计算机仿真, 2009, 26(1): 157-161.
- [16] 周薇, 韩景龙, 陈全龙. 基于切比雪夫多项式的旋翼响应及稳定性[J]. 南京航空航天大学学报, 2013, 45(5): 628-632.
- [17] 王万金, 玄志武, 张志国. 切比雪夫多项式在动态载荷识别中的应用[J]. 强度与环境, 2013, 40(6): 39-44.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>