Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2019, 8(4), 248-262
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
https://doi.org/10.12677/dsc.2019.84027

Stability Analysis of a Class of Neutral Markov Jump Systems

Juan Li, Changchun Shen

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: lj_33zthxlyy@163.com, sccyjs2008@163.com

Received: Aug. 29th, 2019; accepted: Sep. 8th, 2019; published: Sep. 24th, 2019

Abstract

This paper addresses the problem of the delay-dependent stability for neutral Markovian jump systems with partial information on transition probability. The time delays discussed in this paper are time-varying delays. Firstly, to obtain the stability condition of the system with time-varying delays, the newly constructed Lyapunov function is combined with Jensen's inequality and Wirtinger-based inequality by using the analysis technique of matrix inequalities and the corresponding free weight matrix. Secondly, the obtained results are formulated in terms of LMIs, which can be easily checked in practice by Matlab LMI control toolbox. Finally, three numerical examples are given to show the validity and potential of the developed criteria.

Keywords

Neutral System, Markovian Jump Systems, Jensen's Inequality, Wirtinger-Based Inequality

一类中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性分析

李　娟，沈长春

贵州民族大学，数据科学与信息工程学院，贵州　贵阳
Email: lj_33zthxlyy@163.com, sccyjs2008@163.com

收稿日期：2019年8月29日；录用日期：2019年9月8日；发布日期：2019年9月24日

摘　要

本文研究了具有部分转移概率信息的中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性问题，讨论的是具有时变时滞的跳跃系统。首先，构造新的李雅谱诺夫泛函，利用Jensen's不等式和Wirtinger-based不等式等矩阵不等式分析技巧，并引入相应的自由权矩阵，得到具有时变时滞系统的稳定性条件。其次，利用Matlab中的LMI控制工具箱对所得线性矩阵不等式进行验证。最后，给出三个数值算例，证明所得结果的有效性。

文章引用: 李娟, 沈长春. 一类中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性分析[J]. 动力系统与控制, 2019, 8(4): 248-262.
DOI: 10.12677/dsc.2019.84027

关键词

中立型系统，马尔科夫跳跃系统，Jensen's不等式，Wirtinger-Based不等式

1. 引言

时滞是自然界中广泛存在的一种物理现象，在实际生活里许多系统中都含有时滞，如生物系统、经济系统、网络控制系统、电气系统、冶金系统、化工系统和机械系统等。近几十年来，如何抑制对象的固有时滞造成系统的性能下降，引起了国内外许多专家的高度重视。中立型时滞系统是一种特殊的时滞系统，由于考虑了中立项的存在，使得对这类系统的研究比一般时滞系统更加复杂和困难。早在三十多年前，中立型系统已经被广泛研究，并取得了丰硕的成果[1]-[6]。

马尔科夫跳跃系统是一类特殊的系统，是同时包含相互作用的离散事件和连续变量的多模态随机混杂系统。近年来，马尔科夫跳跃系统受到了国内外众多专家学者的关注，并且取得了一定的成果[7]-[12]。文献[7]通过利用连续时间内马尔科夫跳跃线性系统转移矩阵行和为零的性质，给出了带有部分未知转移概率的马尔科夫跳跃线性系统稳定的条件与镇定的条件。文献[11]提出了分段 Lyapunov 泛函和多重 Lyapunov 泛函的新分类，并在此基础上引入了两种新的交换规则来稳定中立系统。一种交换规则是根据 Lvapunov-Metzler 线性矩阵不等式的解设计的，另一种方法是基于一类新的线性矩阵不等式计算出平均停留时间来确定，这为中立型马尔科夫跳跃系统的证明提供了新的方法。文献[12]针对部分转移概率未知或完全转移概率未知的马尔科夫跳跃系统，提出了一种不太保守的稳定性判据——自由连接加权矩阵法，利用线性矩阵不等式，给出了状态反馈控制器设计的一个充分条件。但目前对于中立型马尔科夫跳跃系统的研究还处于初步阶段，且得到的成果相对较少[13] [14] [15]。文献[13]研究了混合时滞中立马尔科夫跳跃系统的状态估计问题，通过结合一个松弛的 L-K 泛函和积分不等式，导出了系统渐近稳定的充分条件，并设计了标称和不确定中立型马尔科夫跳跃系统的状态估计器，特别地，这里的 L-K 泛函并不要求所有涉及的对称矩阵都是正定的。文献[14]基于 Lyapunov 泛函，引入自由权矩阵和利用一些新的矩阵不等式分析技巧，给出了中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性条件，并且在转移概率矩阵完全未知的情况下，构造了通用的 Lyapunov 泛函对其进行了稳定性分析，最后提出了不确定中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性结果。文献[15]通过构造的 Lvapunov 泛函，结合时滞分解技术和自由矩阵，再利用 Jensen's 不等式，首次得到了两类中立型动力系统的时滞依赖稳定性条件。

本文将针对具有时滞依赖的部分未知状态转移概率的中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性展开研究。通过构造 Lyapunov 泛函，主要利用 Jensen's 不等式和 Wirtinger-based 不等式对其进行分析，给出满足系统稳定的条件，并用 Matlab 中的 LMI 工具箱[16]进行求解。最后给出数值算例证明其结果的有效性。

2. 系统描述及引理

首先，考虑以下含有部分未知状态转移概率的中立型马尔科夫跳跃系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)-C(r_t)\dot{x}(t-\tau(t))=A(r_t)x(t)+B(r_t)x(t-h(t)) \\ x(t_0+\theta)=\theta,\forall\theta\in[0,\rho] \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x(t)\in R^n$ 表示状态向量，$A(r_t),B(r_t),C(r_t)$ 是中立型马尔科夫跳跃系统中已知的矩阵函数，$h(t)$ 为时变时滞函数，$\tau(t)$ 是一个中立型时变时滞函数，且满足

$$0\le\tau(t)\le\tau,0<h_m\le h(t)\le h_M,\dot{\tau}(t)\le\mu_1,\dot{h}(t)\le\mu_2 \tag{2}$$

$\rho=\max(\tau,h)$，且 $\rho(\theta)$ 为初始条件函数，$\{r_t\},t\ge 0$ 为右连续马尔科夫过程在有限概率空间及有限状态空间 $\eta=\{1,2,\cdots,N\}$ 中的取值，并且转移概率矩阵 $\Lambda=(\lambda_{ij}),i,j\in\eta$，其元素描述如下

$$P\left(r_{(t+\Delta)}=j\middle|r_{(t)}=i\right)=\begin{cases}\lambda_{ij}\Delta+o(\Delta),i\ne j\\ 1+\lambda_{ii}\Delta+o(\Delta),i=j\end{cases} \tag{3}$$

这里，$\Delta>0$，$\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{o(\Delta)}{\Delta}=0$，$\lambda_{ij}\ge 0$，且当 $i\ne j$，其转移比率为 t 时刻的模态 i 切换到 $t+\Delta$ 时刻的模态 j，$\lambda_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\ne i}^{N}\lambda_{ij}$。

马尔科夫跳跃系统在连续时间内的转移概率取决于其转移比率，并且这个转移比率在一定程度上是可达到的，如下，定义一个具有 N 种模态的转移比率矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & ? & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1N}\\ ? & \lambda_{22} & ? & \cdots & ?\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{N1} & ? & ? & \cdots & ?\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中?为未知的状态转移比率。对于任意的 $i\in\eta$，集合 $U^i=U_k^i\cup U_{uk}^i$，其中

$$U_{uk}^i\triangleq\left\{j:\lambda_{ij}\text{未知},j\in\eta\right\}$$
$$U_k^i\triangleq\left\{j:\lambda_{ij}\text{已知},j\in\eta\right\}$$

因此，如果 $U_k^i\ne\phi$，可以进一步的表示为 $U_k^i=\left\{U_1^i,U_2^i,U_3^i,\cdots,U_n^i\right\}$，其中 $1\le m\le N$ 为非负整数，$U_j^i\in Z^+,1\le U_j^i\le N,j=1,2,\cdots,m$ 表示在状态转移概率矩阵 Λ 的第 i 行的 U_k^i 中的第 k 个已知的元素。

为了简便起见，用 $x(t)$ 来表示系统在初始条件下 $x(t,x_0,r_0)$ 的解，且 $\{x(t),t\}$ 满足初始条件 (x_0,r_0)，其弱无穷小发生器作用于函数 V，定义在[17]中

$$LV(x(t),t,i)=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon\left\{V\left(x(t+\Delta),t+\Delta,r_{t+\Delta}\right)\middle|x(t),r_t=i\right\}-V(x(t),t,i)\right] \tag{5}$$

定义 1 在初始条件下，如果存在 $\varphi\in R^n,r_0\in\eta$，使得下列不等式

$$\varepsilon\left\{\int_0^\infty\|x(t)\|^2\,\mathrm{d}t\mid\varphi,r_0\right\}<\infty \tag{6}$$

成立，则系统是随机稳定的。

引理 1 (Jensen's Inequality) [18] 对于任意正定矩阵 M，常数 $r>0$，向量函数 $\omega:[0,r]\to R^n$，有下列不等式成立

$$r\int_0^r\omega^{\mathrm{T}}(s)M\omega(s)\mathrm{d}s\ge\left[\int_0^r x(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}M\left[\int_0^r x(s)\mathrm{d}s\right] \tag{7}$$

引理 2 (Wirtinger-based Inequality) [19] 对于任意正定矩阵 $R\in R^{n\times n}$，标量 $b>a$，向量函数 $\omega:[a,b]\to R^n$，有下面的积分不等式成立

$$(b-a)\int_a^b \dot{\omega}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{\omega}(s)\mathrm{d}s \ge \left[\omega(b)-\omega(a)\right]^{\mathrm{T}} R\left[\omega(b)-\omega(a)\right]+3\Omega^{\mathrm{T}}R\Omega \tag{8}$$

其中 $\Omega=\omega(b)+\omega(a)-\dfrac{2}{b-a}\int_a^b \omega(s)\mathrm{d}s$ 。

3. 主要结论

定理 1 考虑系统(1)，如果存在矩阵 $P_i>0,R_i>0,M_i>0,W_1>0,W_2>0,Q_1>0,Q_2>0$ ，任意矩阵 $P_i\in R^n,R_i\in R^{n\times n},T_i\in R^{n\times n}$ ，满足以下的线性矩阵不等式

$$\phi_i=\begin{bmatrix}
\varphi_{11} & \varphi_{12} & A_i^{\mathrm{T}}N_3 & \varphi_{14} & A_i^{\mathrm{T}}N_5 & A_i^{\mathrm{T}}N_6 & \varphi_{17} & \varphi_{18} & A_i^{\mathrm{T}}N_9 & \varphi_{1,10}\\
* & \varphi_{22} & -N_3 & -N_4 & -N_5 & -N_6 & \varphi_{27} & \varphi_{28} & -N_9 & -N_{10}\\
* & * & -R_{11i} & 0 & -R_{12i} & 0 & N_3^{\mathrm{T}}B_i & N_3^{\mathrm{T}}C_i & 0 & 0\\
* & * & * & \varphi_{44} & 0 & -M_{12i} & N_4^{\mathrm{T}}B_i & N_4^{\mathrm{T}}C_i & 0 & \dfrac{6}{h^2}Q_1\\
* & * & * & * & -R_{22i} & 0 & N_5^{\mathrm{T}}B_i & N_5^{\mathrm{T}}C_i & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -M_{22i} & N_6^{\mathrm{T}}B_i & N_6^{\mathrm{T}}C_i & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & * & \varphi_{77} & \varphi_{78} & B_i^{\mathrm{T}}N_9 & B_i^{\mathrm{T}}N_{10}\\
* & * & * & * & * & * & * & \varphi_{88} & C_i^{\mathrm{T}}N_9 & C_i^{\mathrm{T}}N_{10}\\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{\tau}W_1 & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{12}{h^3}Q_1
\end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

$$R_i=\begin{bmatrix} R_{11i} & R_{12i}\\ * & R_{22i}\end{bmatrix},M_i=\begin{bmatrix} M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}\left(R_j-S_i\right)<W_1 \tag{11}$$

$$\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}\left(M_j-T_i\right)<Q_1 \tag{12}$$

$$P_j-T_i\le 0, j\in U_{uk}^i, j\ne i \tag{13}$$

$$R_j-S_i\le 0, j\in U_{uk}^i, j\ne i \tag{14}$$

$$M_j-H_i\le 0, j\in U_{uk}^i, j\ne i \tag{15}$$

$$P_j-T_i\ge 0, j\in U_{uk}^i, j=i \tag{16}$$

$$R_j-S_i\ge 0, j\in U_{uk}^i, j=i \tag{17}$$

$$M_j-H_i\ge 0, j\in U_{uk}^i, j=i \tag{18}$$

其中

$$\varphi_{11}=P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+R_{11i}+M_{11i}+\tau W_1-\frac{4}{h}Q_1+Q_2+N_1^{\mathrm{T}}A_i+A_i^{\mathrm{T}}N_1+\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}\left(P_j-T_i\right),$$

$$\varphi_{12}=R_{12i}+M_{12i}+A_i^{\mathrm{T}}N_2-N_1^{\mathrm{T}},\varphi_{14}=-\frac{2}{h}Q_1+A_i^{\mathrm{T}}N_4,\varphi_{17}=P_iB_i+A_i^{\mathrm{T}}N_7+N_1^{\mathrm{T}}B_i,$$

$$\varphi_{18}=P_iC_i+A_i^{\mathrm{T}}N_8+N_1^{\mathrm{T}}C_i,\varphi_{1,10}=\frac{6}{h^2}Q_1+A_i^{\mathrm{T}}N_{10},\varphi_{22}=R_{22i}+M_{22i}+hQ_1+W_2-N_2^{\mathrm{T}}-N_2,$$

$$\varphi_{27}=-N_7+N_2^{\mathrm{T}}B_i,\varphi_{28}=-N_8+N_2^{\mathrm{T}}C_i,\varphi_{44}=-M_{11i}-\frac{4}{h}Q_1,\varphi_{77}=-(1-\mu_2)Q_2+N_7^{\mathrm{T}}B_i+B_i^{\mathrm{T}}N_7,$$

$$\varphi_{78}=B_i^{\mathrm{T}}N_8+N_7^{\mathrm{T}}C_i,\varphi_{88}=-(1-\mu_1)W_2+N_8^{\mathrm{T}}C_i+C_i^{\mathrm{T}}N_8,$$

则称系统(1)是随机稳定系统。

证明：构造一个随机李雅普诺夫泛函

$$V(x_t,t,r_t)=\sum_{i=1}^{7}V_i(x_t,t,r_t)$$

其中

$$V_1(x_t,t,r_t)=x^{\mathrm{T}}(t)P(r_t)x(t),$$

$$V_2(x_t,t,r_t)=\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}R(r_t)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s,$$

$$V_3(x_t,t,r_t)=\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}M(r_t)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s,$$

$$V_4(x_t,t,r_t)=\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)W_1x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_5(x_t,t,r_t)=\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_6(x_t,t,r_t)=\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)W_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_7(x_t,t,r_t)=\int_{t-h(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_2x(s)\mathrm{d}s,$$

这儿的 $P_{r_t},R_{r_t},M_{r_t},W_1,Q_1,W_2,Q_2,r_t\in\eta$ 都是适当维数的正定矩阵。因此，当 $r_t=i\in\eta,P_{r_t}=P_i,R_{r_t}=R_i,M_{r_t}=M_i$ 时，利用弱无穷小算子 L 对 $V_k(x_t,t,i)(k=1,2,\cdots,7)$ 中的随机过程 $x(t)$ 进行计算，我们得到

$$\begin{aligned}LV_1(x_t,t,i)&=2x^{\mathrm{T}}(t)P_i\dot{x}(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_jx(t)\\&=2x^{\mathrm{T}}(t)P_i\left[A_ix(t)+B_ix(t-h(t))+C_i\dot{x}(t-\tau(t))\right]+x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_jx(t)\\&=x^{\mathrm{T}}(t)\left[P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i\right]x(t)+2x^{\mathrm{T}}(t)P_iB_ix(t-h(t))\\&\quad+2x^{\mathrm{T}}(t)P_iC_i\dot{x}(t-\tau(t))+x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}P_jx(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}LV_2(x_t,t,i)&=\lim_{\Delta\to0^+}\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon\left(\int_{t+\Delta-\tau}^{t+\Delta}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}R(r_t)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\right)|\left(x(t),r_t=i\right)-V_2(x_t,t,i)\right]\\&=\lim_{\Delta\to0^+}\frac{1}{\Delta}\left[\left(\int_{t+\Delta-\tau}^{t+\Delta}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{N}Pr(r_{t+\Delta}=j\,|\,r_t=i)R_j\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\right)|\left(x(t),r_t=i\right)-V_2(x_t,t,i)\right]\\&=\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R_{11i}&R_{12i}\\ *&R_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\\dot{x}(t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R_{11i}&R_{12i}\\ *&R_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\\dot{x}(t-\tau)\end{bmatrix}+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}R_j\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$LV_3(x_t,t,i)=\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x(t-h)\\\dot{x}(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-h)\\\dot{x}(t-h)\end{bmatrix}$$
$$+\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}R_j\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$

由于 $\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=0$，则对于任意矩阵 $T_i=T_i^{\mathrm T}\in R^{n},S_i=S_i^{\mathrm T}\in R^{n\times n},H_i=H_i^{\mathrm T}\in R^{n\times n}$，满足以下的零方程

$$-x^{\mathrm T}(t)\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}T_i\right)x(t)=0,\forall i\in\eta \tag{19}$$

$$-\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}S_i\right)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s=0,\forall i\in\eta \tag{20}$$

$$-\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}H_i\right)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s=0,\forall i\in\eta \tag{21}$$

其中

$$S_i=\begin{bmatrix}S_{11i} & S_{12i}\\ * & S_{22i}\end{bmatrix},H_i=\begin{bmatrix}H_{11i} & H_{12i}\\ * & H_{22i}\end{bmatrix} \tag{22}$$

则由(19)~(22)式，可以得到以下等式

$$\begin{aligned}LV_1(x_t,t,i)&=x^{\mathrm T}(t)\left[P_iA_i+A_i^{\mathrm T}P_i\right]x(t)+2x^{\mathrm T}(t)P_iB_ix(t-h(t))+2x^{\mathrm T}(t)P_iC_i\dot{x}(t-\tau(t))\\&\quad+x^{\mathrm T}(t)\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}(P_j-T_i)x(t)+x^{\mathrm T}(t)\sum_{j\in U_{uk}^i}\lambda_{ij}(P_j-T_i)x(t)\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}LV_2(x_t,t,i)&=\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}R_{11i} & R_{12i}\\ * & R_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\\dot{x}(t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}R_{11i} & R_{12i}\\ * & R_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-\tau)\\\dot{x}(t-\tau)\end{bmatrix}\\&\quad+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}(R_j-S_i)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\sum_{j\in U_{uk}^i}\lambda_{ij}(R_j-S_i)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}LV_3(x_t,t,i)&=\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\\dot{x}(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x(t-h)\\\dot{x}(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-h)\\\dot{x}(t-h)\end{bmatrix}\\&\quad+\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}(M_j-H_i)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T}\sum_{j\in U_{uk}^i}\lambda_{ij}(M_j-H_i)\begin{bmatrix}x(s)\\\dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}LV_4(x_t,t,i)&=\tau x^{\mathrm T}(t)W_1x(t)-x^{\mathrm T}(t)W_1x(t)+x^{\mathrm T}(t-\tau)W_1x(t-\tau)\\&=\tau x^{\mathrm T}(t)W_1x(t)-\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm T}(s)W_1x(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由引理 1 有

$$-\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm T}(s)W_1x(s)\mathrm{d}s\le-\frac{1}{\tau}\left[\int_{t-\tau}^{t}x(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm T}W_1\left[\int_{t-\tau}^{t}x(s)\mathrm{d}s\right]$$

故

$$
\begin{aligned}
LV_4(x_t,t,i) &= \tau x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t) - \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)W_1x(s)\mathrm{d}s \\
&\le \tau x^{\mathrm{T}}(t)W_1x(t) - \frac{1}{\tau}\left[\int_{t-\tau}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}} W_1\left[\int_{t-\tau}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
LV_5(x_t,t,i) &= h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{x}(t) - \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{x}(t) + \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q_1x(t-h) \\
&= h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\dot{x}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

由引理 2 有

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t-h}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\
&\le -\frac{1}{h}\left[x(t)-x(t-h)\right]^{\mathrm{T}} Q_1\left[x(t)-x(t-h)\right] \\
&\quad -\frac{3}{h}\left[x(t)+x(t-h)-\frac{2}{h}\int_{t-h}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}} Q_1\left[x(t)+x(t-h)-\frac{2}{h}\int_{t-h}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
LV_5(x_t,t,i) &= h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_1\dot{x}(s)\mathrm{d}s \\
&\le h\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{x}(t) - \frac{1}{h}\left[x(t)-x(t-h)\right]^{\mathrm{T}} Q_1\left[x(t)-x(t-h)\right] \\
&\quad -\frac{3}{h}\left[x(t)+x(t-h)-\frac{2}{h}\int_{t-h}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}} Q_1\left[x(t)+x(t-h)-\frac{2}{h}\int_{t-h}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
LV_6(x_t,t,i) &= \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)W_2\dot{x}(t) - \left(1-\dot{\tau}(t)\right)\dot{x}^{\mathrm{T}}\left(t-\tau(t)\right)W_2\dot{x}\left(t-\tau(t)\right) \\
&\le \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)W_2\dot{x}(t) - \left(1-\mu_1\right)\dot{x}^{\mathrm{T}}\left(t-\tau(t)\right)W_2\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
LV_7(x_t,t,i) &= x^{\mathrm{T}}(t)Q_2x(t) - \left(1-\dot{h}(t)\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)Q_2x\left(t-h(t)\right) \\
&\le x^{\mathrm{T}}(t)Q_2x(t) - \left(1-\mu_2\right)x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right)Q_2x\left(t-h(t)\right)
\end{aligned} \tag{29}
$$

因此，存在适当维数的矩阵 $N_k\ (k=1,2,\cdots,10)$，满足下面的式子

$$
2\xi^{\mathrm{T}}(t)N^{\mathrm{T}}\left[-\dot{x}(t)+A_ix(t)+B_ix\left(t-h(t)\right)+C_i\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)\right]=0 \tag{30}
$$

其中

$$
N=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix} \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{\mathrm{T}}(t) = \Big[& x^{\mathrm{T}}(t) \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau) \quad x^{\mathrm{T}}(t-h) \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-h) \\
& x^{\mathrm{T}}\left(t-h(t)\right) \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}\left(t-\tau(t)\right) \quad \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \quad \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \Big]
\end{aligned} \tag{32}
$$

综上所述，由(11)，(12)和(23)~(32)，我们有

$$
\begin{aligned}
LV(x_t,t,i) &= \sum_{j=1}^{7} LV_j(x_t,t,i) \le \xi^{\mathrm{T}}(t)\phi_i\xi(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(P_j-T_i\right)x(t) \\
&\quad + \int_{t-\tau}^{t} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(R_j-S_i\right)\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t-h}^{t} \begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(M_j-H_i\right)\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{33}
$$

这儿的 $\xi^{\mathrm{T}}(t)$ 同(32)式相同，ϕ_i 见定理 1 中的定义。值得注意的是 $\lambda_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\lambda_{ij}$，且对于 $\forall i\neq j$ 都有 $\lambda_{ij}\geq 0$，所以对于 $\forall i\in\eta$ 有 $\lambda_{ii}<0$。因此，若 $i\in U_k^i$，则由(9)~(15)式可得其充分条件

$$LV(x_t,t,i)<0 \tag{34}$$

另一方面，若 $i\in U_{uk}^i$，则由(9)~(18)式也可得式(34)成立，即

$$\varepsilon\left\{\int_0^{\infty}\left\|x(t)\right\|^2\mathrm{d}t\,|\,\varphi,r_0\right\}<\infty \tag{35}$$

则由定义 1 可得系统(1)是随机稳定的。

其次，当 $\tau(t)=\tau,h(t)=h$ 时，系统可转变为如下的一个时不变的中立型马尔科夫跳跃系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-C(r_t)\dot{x}(t-\tau)=A(r_t)x(t)+B(r_t)x(t-h)\\ x(t_0+\theta)=0,\forall\theta\in[-\rho,0]\end{cases} \tag{36}$$

推论 1 考虑系统(36)，如果存在矩阵 $P_i>0,R_i>0,M_i>0,W_1>0,Q_1>0$，任意矩阵 $P_i\in R^n,R_i\in R^{n\times n}$，$T_i\in R^{n\times n}$，满足以下的线性矩阵不等式

$$\psi_i=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & A_i^{\mathrm{T}}N_3 & \psi_{14} & \psi_{15} & A_i^{\mathrm{T}}N_6 & A_i^{\mathrm{T}}N_9 & \psi_{18}\\ * & \psi_{22} & -N_3 & \psi_{24} & \psi_{25} & -N_6 & -N_9 & -N_{10}\\ * & * & -R_{11i} & N_3^{\mathrm{T}}B_i & \varphi_{35} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \psi_{44} & \psi_{45} & \psi_{46} & B_i^{\mathrm{T}}N_9 & \psi_{48}\\ * & * & * & * & \psi_{55} & C_i^{\mathrm{T}}N_6 & C_i^{\mathrm{T}}N_9 & C_i^{\mathrm{T}}N_{10}\\ * & * & * & * & * & -M_{22i} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{\tau}W_1 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{12}{h^3}Q_1\end{bmatrix}<0 \tag{37}$$

$$R_i=\begin{bmatrix}R_{11i} & R_{12i}\\ * & R_{22i}\end{bmatrix},M_i=\begin{bmatrix}M_{11i} & M_{12i}\\ * & M_{22i}\end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}(R_j-S_i)<W_1 \tag{39}$$

$$\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}(M_j-T_i)<Q_1 \tag{40}$$

$$P_j-T_i\leq 0,j\in U_{uk}^i,j\neq i \tag{41}$$

$$R_j-S_i\leq 0,j\in U_{uk}^i,j\neq i \tag{42}$$

$$M_j-H_i\leq 0,j\in U_{uk}^i,j\neq i \tag{43}$$

$$P_j-T_i\geq 0,j\in U_{uk}^i,j=i \tag{44}$$

$$R_j-S_i\geq 0,j\in U_{uk}^i,j=i \tag{45}$$

$$M_j-H_i\geq 0,j\in U_{uk}^i,j=i \tag{46}$$

其中

$$\psi_{11}=P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i+R_{11i}+M_{11i}+\tau W_1-\frac{4}{h}Q_1+N_1^{\mathrm{T}}A_i+A_i^{\mathrm{T}}N_1+\sum_{j\in U_k^i}\lambda_{ij}\left(P_j-T_i\right),$$

$$\psi_{12}=R_{12i}+M_{12i}+A_i^{\mathrm{T}}N_2-N_1^{\mathrm{T}},\psi_{14}=-\frac{2}{h}Q_1+P_iB_i+A_i^{\mathrm{T}}N_4+N_1^{\mathrm{T}}B_i,$$

$$\psi_{15}=P_iC_i+A_i^{\mathrm{T}}N_5+N_1^{\mathrm{T}}C_i,\psi_{18}=\frac{6}{h^2}Q_1+A_i^{\mathrm{T}}N_{10},\psi_{22}=R_{22i}+M_{22i}+hQ_1-N_2^{\mathrm{T}}-N_2,$$

$$\psi_{24}=-N_4+N_2^{\mathrm{T}}B_i,\psi_{25}=-N_5+N_2^{\mathrm{T}}C_i,\psi_{35}=-R_{12i}+N_3^{\mathrm{T}}C_i,\psi_{44}=-M_{11i}-\frac{4}{h}Q_1+N_4^{\mathrm{T}}B_i+B_i^{\mathrm{T}}N_4,$$

$$\psi_{45}=B_i^{\mathrm{T}}N_5+N_4^{\mathrm{T}}C_i,\psi_{46}=-M_{12i}+B_i^{\mathrm{T}}N_6,\psi_{48}=\frac{6}{h^2}Q_1+A_i^{\mathrm{T}}N_{10},\psi_{55}=-M_{22i}+N_5^{\mathrm{T}}C_i+C_i^{\mathrm{T}}N_5,$$

则称系统(36)是随机稳定系统。

证明：构造一个随机的李雅普诺夫泛函

$$V\left(x_t,t,r_t\right)=x^{\mathrm{T}}\left(t\right)P\left(r_t\right)x\left(t\right)+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}R_{r_t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}M_{r_t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s$$
$$+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}x^{\mathrm{T}}\left(s\right)W_1x\left(s\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}\left(s\right)Q_1\dot{x}\left(s\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

这儿的 $P_{r_t},R_{r_t},M_{r_t},W_1,Q_1,r_t\in\eta$ 都是适当维数的正定矩阵，它的证明过程与定理(1)的证明类似，因此此处省略。

最后，考虑以下不确定中立型马尔科夫跳跃系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-\left(C(r_t)+\Delta C(r_t)\right)\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)=\left(A(r_t)+\Delta A(r_t)\right)x(t)+\left(B(r_t)+\Delta B(r_t)\right)x\left(t-h(t)\right)\\ x\left(t_0+\theta\right)=\theta,\forall\theta\in\left[-\rho,0\right]\end{cases}\tag{47}$$

其中 $\Delta A(r_t),\Delta B(r_t),\Delta C(r_t)$ 为不确定的参数矩阵，且可以表示为

$$\begin{bmatrix}\Delta A(r_t) & \Delta B(r_t) & \Delta C(r_t)\end{bmatrix}=L_{r_t}K_{r_t}\left(t\right)\begin{bmatrix}F_1(r_t) & F_2(r_t) & F_3(r_t)\end{bmatrix}\tag{48}$$

$L_{r_t},\Delta A(r_t),\Delta B(r_t),\Delta C(r_t)$ 是已知的适当维数的模态相关矩阵， $K_{r_t}\left(t\right)$ 是具有勒贝格可测元的时滞未知矩阵函数，且满足 $K_{r_t}^{\mathrm{T}}(t)K_{r_t}(t)\le I$ 。

通过变换，系统(47)可转化为如下形式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-C(r_t)\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)=A(r_t)x(t)+B(r_t)x\left(t-h(t)\right)+L_iu_i\\ z_i=F_1(r_t)x(t)+F_2(r_t)x\left(t+h(t)\right)+F_3(r_t)\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)\end{cases}\tag{49}$$

这儿的 $u_i=K_{r_t}\left(t\right)z_i$ ，而且有下面的不等式成立，即

$$\begin{aligned}u_i^{\mathrm{T}}u_i\le&\left[F_1(r_t)x(t)+F_2(r_t)x\left(t+h(t)\right)+F_3(r_t)\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)\right]^{\mathrm{T}}\\ &\cdot\left[F_1(r_t)x(t)+F_2(r_t)x\left(t+h(t)\right)+F_3(r_t)\dot{x}\left(t-\tau(t)\right)\right]\end{aligned}\tag{50}$$

使用与定理 1 类似的证明方法，我们可以得到定理 2。

定理 2 考虑系统(50)，如果存在矩阵 $P_i>0,R_i>0,M_i>0,W_1>0,W_2>0,Q_1>0,Q_2>0$ ，任意矩阵 $P_i\in R^n,R_i\in R^{n\times n},T_i\in R^{n\times n}$ ，满足以下的线性矩阵不等式

$$\tilde{\phi}_i = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & A_i^{\mathrm{T}} N_3 & \varphi_{14} & A_i^{\mathrm{T}} N_5 & A_i^{\mathrm{T}} N_6 & \varphi_{17} & \varphi_{18} & A_i^{\mathrm{T}} N_9 & \varphi_{1,10} & P_i L_i & \varepsilon F_{1i} \\ * & \varphi_{22} & -N_3 & -N_4 & -N_5 & -N_6 & \varphi_{27} & \varphi_{28} & -N_9 & -N_{10} & 0 & 0 \\ * & * & -R_{11i} & 0 & -R_{12i} & 0 & N_3^{\mathrm{T}} B_i & N_3^{\mathrm{T}} C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 & -M_{12i} & N_4^{\mathrm{T}} B_i & N_4^{\mathrm{T}} C_i & 0 & \frac{6}{h^2} Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R_{22i} & 0 & N_5^{\mathrm{T}} B_i & N_5^{\mathrm{T}} C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -M_{22i} & N_6^{\mathrm{T}} B_i & N_6^{\mathrm{T}} C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \varphi_{77} & \varphi_{78} & B_i^{\mathrm{T}} N_9 & B_i^{\mathrm{T}} N_{10} & 0 & \varepsilon F_{2i} \\ * & * & * & * & * & * & * & \varphi_{88} & C_i^{\mathrm{T}} N_9 & C_i^{\mathrm{T}} N_{10} & 0 & \varepsilon F_{3i} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{\tau} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{12}{h^3} Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \tag{51}$$

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{11i} & R_{12i} \\ * & R_{22i} \end{bmatrix}, M_i = \begin{bmatrix} M_{11i} & M_{12i} \\ * & M_{22i} \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$\sum_{j \in U_k^i} \lambda_{ij} \left(R_j - S_i \right) < W_1 \tag{53}$$

$$\sum_{j \in U_k^i} \lambda_{ij} \left(M_j - T_i \right) < Q_1 \tag{54}$$

$$P_j - T_i \le 0, j \in U_{uk}^i, j \ne i \tag{55}$$

$$R_j - S_i \le 0, j \in U_{uk}^i, j \ne i \tag{56}$$

$$M_j - H_i \le 0, j \in U_{uk}^i, j \ne i \tag{57}$$

$$P_j - T_i \ge 0, j \in U_{uk}^i, j = i \tag{58}$$

$$R_j - S_i \ge 0, j \in U_{uk}^i, j = i \tag{59}$$

$$M_j - H_i \ge 0, j \in U_{uk}^i, j = i \tag{60}$$

其中 φ_{ij} 同定理 1 中所定义的相同，则称系统(47)是随机稳定系统。

证明：运用与定理 1 相似的证明方法，可得到不等式

$$\begin{aligned} LV\left(x_t,t,i\right) &= \sum_{j=1}^{7} LV_j\left(x_t,t,i\right) \\ &\le \gamma^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\psi}_i\gamma(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(P_j - T_i\right)x(t) \\ &\quad + \int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(R_j - S_i\right)\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}\left(M_j - H_i\right)\begin{bmatrix} x(s) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{61}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathrm{T}}(t)=\Big[&x^{\mathrm{T}}(t)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\quad x^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\\ &x^{\mathrm{T}}(t-h(t))\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\quad \int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad u_i^{\mathrm{T}}\Big]\end{aligned} \tag{62}$$

及

$$\tilde{\psi}_i=\begin{bmatrix}\varphi_{11} & \varphi_{12} & A_i^{\mathrm{T}}N_3 & \varphi_{14} & A_i^{\mathrm{T}}N_5 & A_i^{\mathrm{T}}N_6 & \varphi_{17} & \varphi_{18} & A_i^{\mathrm{T}}N_9 & \varphi_{1,10} & P_iL_i\\ * & \varphi_{22} & -N_3 & -N_4 & -N_5 & -N_6 & \varphi_{27} & \varphi_{28} & -N_9 & -N_{10} & 0\\ * & * & -R_{11i} & 0 & -R_{12i} & 0 & N_3^{\mathrm{T}}B_i & N_3^{\mathrm{T}}C_i & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \varphi_{44} & 0 & -M_{12i} & N_4^{\mathrm{T}}B_i & N_4^{\mathrm{T}}C_i & 0 & \dfrac{6}{h^2}Q_1 & 0\\ * & * & * & * & -R_{22i} & 0 & N_5^{\mathrm{T}}B_i & N_5^{\mathrm{T}}C_i & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -M_{22i} & N_6^{\mathrm{T}}B_i & N_6^{\mathrm{T}}C_i & & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & \varphi_{77} & \varphi_{78} & B_i^{\mathrm{T}}N_9 & B_i^{\mathrm{T}}N_{10} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & \varphi_{88} & C_i^{\mathrm{T}}N_9 & C_i^{\mathrm{T}}N_{10} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{1}{\tau}W_1 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\dfrac{12}{h^3}Q_1 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & 0\end{bmatrix}<0 \tag{63}$$

其中 φ_{ij} 同定理 1 中所定义的相同。由(50)式，应用 Suchr’s 补引理[5]，我们可以找到正实数 $\varepsilon>0$，使得下面不等式成立

$$\begin{aligned}LV(x_t,t,i)\le{}&\gamma^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\psi}_i\gamma(t)+x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}(P_j-T_i)x(t)\\ &+\int_{t-\tau}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}(R_j-S_i)\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\\ &+\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\sum_{j=U_{uk}^i}\lambda_{ij}(M_j-H_i)\begin{bmatrix}x(s)\\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\\ &+\varepsilon\Big\{\big[F_1(r_t)x(t)+F_2(r_t)x(t+h(t))+F_3(r_t)\dot{x}(t-\tau(t))\big]^{\mathrm{T}}\\ &\cdot\big[F_1(r_t)x(t)+F_2(r_t)x(t+h(t))+F_3(r_t)\dot{x}(t-\tau(t))\big]-u_i^{\mathrm{T}}u_i\Big\}\end{aligned} \tag{64}$$

这儿的 $\gamma^{\mathrm{T}}(t)$ 同(62)式相同，$\tilde{\psi}_i$ 同(63)式相同。值得注意的是，$\lambda_{ii}=-\sum_{j=1,j\ne i}^{N}\lambda_{ij}$，且对于 $\forall i\ne j$ 都有 $\lambda_{ij}\ge 0$，所以对于 $\forall i\in\eta$ 有 $\lambda_{ii}<0$。因此，若 $i\in U_k^i$，则由(51)~(57)式可得其充分条件

$$LV(x_t,t,i)<0 \tag{65}$$

另一方面，若 $i\in U_{uk}^i$，则由(51)~(60)式也可得式(65)成立，即

$$\varepsilon\left\{\int_0^{\infty}\|x(t)\|^2\,\mathrm{d}t\mid\varphi,r_0\right\}<\infty \tag{66}$$

则由定义 1 可得系统(47)是随机稳定的。

4. 数值实例

在这一部分，我们给出三个数值算例来验证理论结果的有效性。

例 1 考虑中立型马尔科夫跳跃系统 1，其状态矩阵如下

$$A_1=\begin{bmatrix}-1.15 & -0.75\\ 1.50 & -1.50\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}-2.15 & -0.49\\ 1.50 & -2.10\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}-1.30 & -0.15\\ 1.50 & -1.80\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}-1.90 & -0.34\\ 1.50 & -1.65\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}-1.20 & 0.12\\ 0.24 & -0.25\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}-1.45 & -0.96\\ 0.47 & -1.57\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}0.58 & -0.68\\ -0.13 & 0.96\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}-0.67 & -1.50\\ 1.39 & 1.23\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}-0.15 & -0.06\\ 0.50 & -0.50\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}0.25 & -0.35\\ 0.05 & -0.65\end{bmatrix}, C_3=\begin{bmatrix}0.33 & 0.07\\ 0.19 & -0.36\end{bmatrix}, C_4=\begin{bmatrix}-0.23 & 0.16\\ 0.02 & -0.57\end{bmatrix},$$

这儿考虑以下四种切换模态的部分转移概率矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1.2 & ? & 0.5 & ?\\ ? & -1.5 & ? & 0.4\\ ? & 0.3 & ? & 0.6\\ 0.2 & ? & ? & ?\end{bmatrix}$$

在这里，我们主要使用 Matlab 中的 LMI 工具箱来验证定理 1 中结果的有效性，通过给定的转移概率矩阵，可以得到系统(1)的跳跃状态图(见图 1)。取初始状态 $x_0=\left[1.8\,-1.8\right]^{\mathrm{T}}$，可得 $\mu_1=0.25, \mu_2=0.23, h=2.5, \tau=0.3$ 时系统(1)是稳定的，其状态轨迹图见图 2。

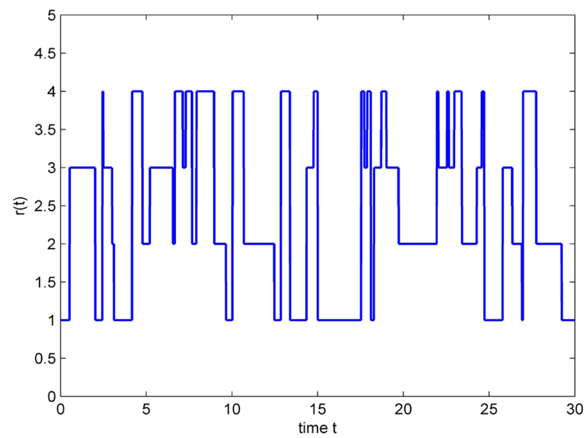

Figure 1. Modal switching diagram of system (1)
图 1. 系统(1)的模态切换图

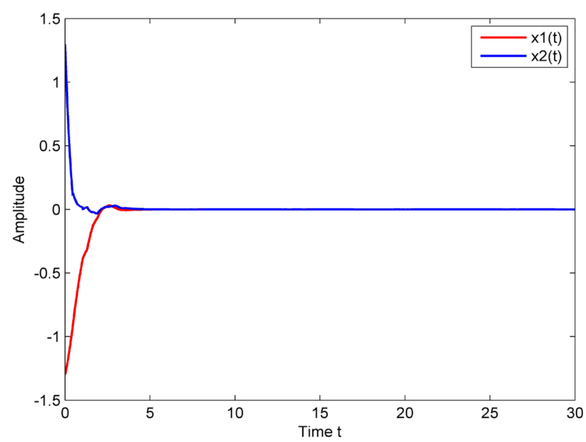

Figure 2. Trajectory map of system (1)
图 2. 系统(1)的轨迹图

例 2 考虑中立型马尔科夫跳跃系统(36)，其状态矩阵如下

$$A_1=\begin{bmatrix}-1.25 & -0.35\\ 1.50 & -4.50\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}-2.13 & -0.47\\ 1.50 & -2.14\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}-1.23 & 0.32\\ 0.27 & -0.45\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}-1.25 & 0.66\\ 0.43 & -1.47\end{bmatrix},C_1=\begin{bmatrix}-0.17 & -0.46\\ 0.58 & -1.26\end{bmatrix},C_2=\begin{bmatrix}1.27 & -0.75\\ 0.65 & -0.38\end{bmatrix},$$

这儿考虑以下四种切换模态的部分转移概率矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-0.2 & ?\\ ? & ?\end{bmatrix}$$

在这里，我们主要使用 Matlab 中的 LMI 工具箱来验证推论 1 中结果的有效性，通过给定的转移概率矩阵，可以得到系统(36)的跳跃状态图(见图 3)。取初始状态 $x_0=[1.5-1.5]^{\mathrm{T}}$，可得 $h=2.1,\tau=0.7$ 时系统(36)是稳定的，其状态轨迹图见图 4。

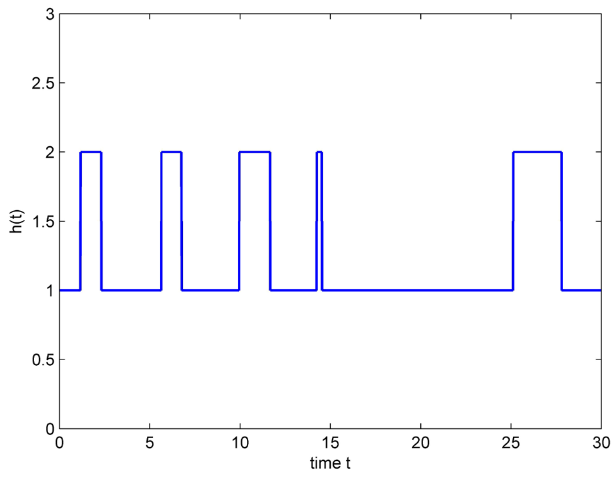

Figure 3. Modal switching diagram of system (36)
图 3. 系统(36)的模态切换图

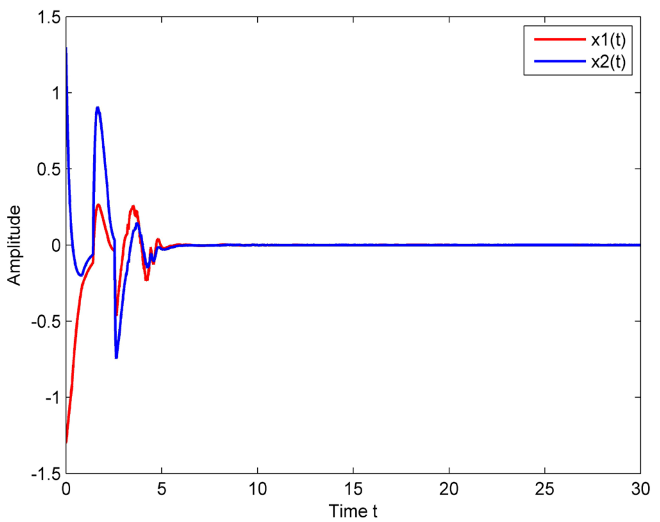

Figure 4. Trajectory map of system (36)
图 4. 系统(36)的轨迹图

例 3 考虑如下不确定的中立型马尔科夫跳跃系统

$$\dot{x}(t)-\left(C(r_t)+\Delta C(r_t)\right)\dot{x}(t-\tau(t))=\left(A(r_t)+\Delta A(r_t)\right)x(t)+\left(B(r_t)+\Delta B(r_t)\right)x(t-h(t))$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}-6.15 & 0.05\\ -0.15 & -1.50\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}-3.15 & -0.09\\ 0.21 & -2.10\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}-1.27 & -0.12\\ 0.24 & -0.25\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1.45 & -0.16\\ 0.47 & -1.57\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}-0.08 & -0.06\\ 0.03 & -0.04\end{bmatrix},C_2=\begin{bmatrix}0.05 & 0.01\\ 0.05 & -0.06\end{bmatrix},F_{11}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.7\\ -0.9 & 1.6\end{bmatrix},F_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1.0\\ 1.3 & -2.6\end{bmatrix},$$

$$F_{21}=\begin{bmatrix}-1.0 & 1.0\\ 2.0 & -3.0\end{bmatrix},F_{22}=\begin{bmatrix}1.0 & 1.0\\ -2.0 & -3.0\end{bmatrix},F_{31}=\begin{bmatrix}2.0 & 1.0\\ -1.3 & 2.5\end{bmatrix},F_{32}=\begin{bmatrix}1.0 & 3.0\\ 1.5 & -2.3\end{bmatrix},$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1.0 & 2.1\\ 1.0 & -1.8\end{bmatrix},L_2=\begin{bmatrix}0 & 0.9\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix},I=\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.0\end{bmatrix},$$

这儿考虑以下两种切换模态的完全未知的转移概率矩阵

$$\Lambda=\begin{bmatrix}? & ?\\ ? & ?\end{bmatrix}$$

在这里，我们主要使用Matlab中的LMI工具箱来验证定理2中结果的有效性，当$\varepsilon=0.1,\tau=0.9,h=0.9113$, $\mu_1=0.2,\mu_2=0.27$时，系统(50)是随机稳定的。通过 Matlab 求解(54)~(63)式，得到可行解，分别为

$$P_1=\begin{bmatrix}3.4939 & 0.6039\\ 0.6039 & 2.6255\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}3.6407 & 0.9342\\ -1.3952 & 1.4950\end{bmatrix},R_{111}=1.0\times10^5\begin{bmatrix}0.0001 & -7.0921\\ 7.0921 & 0.0000\end{bmatrix},$$

$$R_{121}=\begin{bmatrix}1.3874 & 0.3177\\ -0.0858 & 0.9778\end{bmatrix},R_{221}=1.0\times10^5\begin{bmatrix}0.0000 & -6.5220\\ 6.5220 & 0.0000\end{bmatrix},R_{112}=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 1.2442\\ -1.2442 & 0.0000\end{bmatrix},$$

$$R_{122}=\begin{bmatrix}1.1310 & -0.2528\\ -0.0325 & 0.1963\end{bmatrix},R_{222}=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 1.2690\\ -1.2690 & 0.0000\end{bmatrix},M_{111}=1.0\times10^5\begin{bmatrix}0.0001 & 6.2788\\ -6.2788 & 0.0000\end{bmatrix},$$

$$M_{121}=\begin{bmatrix}1.4103 & 0.2982\\ -0.0691 & 0.9971\end{bmatrix},M_{221}=1.0\times10^4\begin{bmatrix}0.0000 & -9.0346\\ 9.0346 & 0.0001\end{bmatrix},M_{112}=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & -1.5024\\ 1.5024 & 0.000\end{bmatrix},$$

$$M_{122}=\begin{bmatrix}1.1534 & -0.2412\\ -0.0221 & 0.2034\end{bmatrix},M_{222}=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 1.7983\\ -1.7983 & 0.000\end{bmatrix},W_1=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 8.1782\\ -8.1782 & 0.0000\end{bmatrix},$$

$$W_2=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 1.7774\\ -1.7774 & 0.000\end{bmatrix},Q_1=\begin{bmatrix}0.1131 & 0.0038\\ 0.0053 & 0.1255\end{bmatrix},Q_2=1.0\times10^6\begin{bmatrix}0.0000 & 2.4782\\ -2.4782 & 0.0000\end{bmatrix}.$$

5. 结论

本文对具有部分未知转移概率信息的中立型马尔科夫跳跃系统的稳定性问题进行了研究。首先，构造新的 Lyapunov 泛函，运用 Jensen’s 不等式和 Wirtinger-based 不等式分析技巧，引入相应的自由权矩阵，得到具有时变时滞的稳定性条件。其次，利用 Matlab 中的 LMI 控制工具箱对所得的线性矩阵不等式进行验证，得到此方法具有一定理论价值。最后，列举三个数值算例，得到此方法的有效性。

基金项目

贵州省科技厅科学研究基金(J[2015]2074)，贵州省科技厅、贵州民族大学联合基金项目(LKM[2013]21)，贵州省教育厅群体创新研究项目贵州民族大学博士启动基金项目(KY[2016]021)。

参考文献

[1] 沈长春. 中立型系统的稳定性与可达集边界——线性矩阵不等式方法[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2015.

[2] 沈长春. 时滞中立型系统的动力学问题研究[D]: [博士学位论文]. 成都: 电子科技大学, 2012.

[3] 彭晨, 熊良林, 吴涛. 一种改进的中立型时滞系统稳定性[J]. 云南民族大学学报: 自然科学版, 2018, 27(3): 222-227.

[4] Xiong, L.L., Zhong, S.M. and Tian, J.K. (2009) New Robust Stability Condition for Uncertain Neutral Systems with Discrete and Distributed Delays. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **42**, 1073-1079. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.002

[5] Tian, J.K., Xiong, L.L., Liu, J.X. and Xie, X.J. (2009) Novel Delay-Dependent Robust Stability Criteria for Uncertain Neutral Systems with Time-Varying Delay. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **40**, 1858-1866. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.09.068

[6] Xiong. L.L., Zhong. S.M. and Tian. J.K. (2009) Novel Robust Stability Criteria of Uncertain Neutral Systems with Discrete and Distributed Delays. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **40**, 771-777. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.08.023

[7] 柴瑶, 王汝凉, 裴晓丽, 刘一莹. 部分未知转移概率的马尔科夫跳跃线性系统稳定性分析[J]. 广西师范学院学报: 自然科学版, 2017, 34(4): 36-40.

[8] 张保勇, 夏卫锋, 李永民. 时滞马尔科夫跳变系统的分析与综合研究综述[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2018, 42(2): 3-17.

[9] 高丽君, 武玉强, 方玉光. 具有干扰的马尔科夫跳跃线性系统几乎处处稳定性充分条件[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 543-546.

[10] 范泉涌. 转移概率部分已知的 Markov 跳跃系统鲁棒控制方法研究[D]: [硕士学位论文]. 沈阳: 东北大学, 2013.

[11] Xiong, L.L., Zhong, S.M., Ye, M. and Wu, S.L. (2009) New Stability and Stabilization for Switched Neutral Control Systems. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **42**, 1800-1811. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.093

[12] Zhang, Y., He, Y., Wu, M. and Zhang, J. (2011) Stabilization for Markovian Jump Systems with Partial Information on Transition Probability Based on Free-Connection Weighting Matrices. *Automatica*, **47**, 79-84. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.09.009

[13] Chen, W.M., Ma, Q. and Zhang, B.Y. (2018) State Estimation of Neutral Markovian Jump Systems: A Relaxed L-K Functional Approach. *Journal of the Franklin Institute*, **355**, 3635-3676. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.01.041

[14] Xiong, L.L., Tian, J.K. and Liu, X.Z. (2012) Stability Analysis for Neutral Markovian Jump Systems with Partially Unknown Transition Probabilities. *Journal of the Franklin Institute*, **349**, 2193-2214. https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.04.003

[15] Xiong, L.L., Zhang, H.Y., Li, Y.K. and Lin, Z.X. (2016) Improved Stability and Performance for Neutral Systems with Uncertain Markovian Jump. *Nonlinear Analysis*: *Hybrid Systems*, **19**, 13-25.

[16] Boyd, S., Ghaoui, E.L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994) Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611970777

[17] Skorohod, A.V. (1989) Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equation. American Mathematical Society, Providence.

[18] Gu, K. (2000) An Integral Inequality in the Stability Problem of Time-Delay Systems. *Proceedings of the Thirty-Ninth IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, December 2000, 2805-2810.

[19] Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013) Wirtinger-Based Integral Inequality: Applications to Time-Delay Systems. *Automatica*, **49**, 2860-2866. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.05.030