

# 具有一类不连续非单调激活函数的时滞递归神经网络的多稳定性分析

燕泽鹏, 孙文

湖北师范大学数学与统计学院, 湖北 黄石

收稿日期: 2023年12月8日; 录用日期: 2024年1月8日; 发布日期: 2024年1月18日

## 摘要

本文提出了一类不连续非单调激活函数, 研究了具有这类激活函数的时滞递归神经网络的多稳定性。根据激活函数的几何特性和不动点定理, 给出充分条件确保 $n$ 维神经网络至少存在 $7^n$ 个平衡点, 其中 $4^n$ 个是局部指数稳定的。然后, 我们将结果推广到更一般的情况。在不增加充分条件的情况下, 本文通过增加激活函数峰值点的数量 $k$ , 得到 $n$ 维神经网络可以具有 $(2k+3)^n$ 平衡点, 其中 $(k+2)^n$ 是局部指数稳定的。与之前文献相比, 总平衡点和稳定平衡点的数量大大地增加了, 从而提高了递归神经网络的存储容量。最后, 给出了一个例子来证明我们的理论结果。

## 关键词

递归神经网络, 时变时滞, 激活函数, 多稳定性

# Multistability Analysis of Delayed Recurrent Neural Networks with a Class of Discontinuous and Non-Monotonic Activation Functions

Zepeng Yan, Wen Sun

School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei

Received: Dec. 8<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jan. 8<sup>th</sup>, 2024; published: Jan. 18<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This paper proposes a class of discontinuous and non-monotonic activation functions and studies

文章引用: 燕泽鹏, 孙文. 具有一类不连续非单调激活函数的时滞递归神经网络的多稳定性分析[J]. 动力系统与控制, 2024, 13(1): 9-20. DOI: 10.12677/dsc.2024.131002

the multistability of delayed recurrent neural network with these activation functions. By the geometrical properties of activation function and fixed point theorem, some sufficient conditions are presented to ensure that  $n$ -dimensional neural networks can have at least  $7^n$  equilibria, where  $4^n$  equilibria are locally exponentially stable. Then, the obtained results are extended to a more general case. Without adding sufficient conditions, this paper increases the number of peak points ( $k$ ) of the activation function and finds that the  $n$ -dimensional neural networks can have  $(2k + 3)^n$  equilibria, where  $(k + 2)^n$  equilibria of them are locally exponentially stable. Compared with the previous literature, the numbers of total equilibria and stable equilibria are enormously increased, thus enhancing the memory storage capacity of DRNN. Finally, one example is presented to demonstrate our theoretical results.

## Keywords

Recurrent Neural Network, Time-Varying Delay, Activation Function, Multistability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

由于神经网络(NNs)在各种技术领域的成功应用,近年来对其进行了深入研究。NNs 的应用取决于其动态行为特征,如稳定性、周期解、分岔、混沌和协作行为。其中,稳定性是理论研究中的一个关键问题,也是众多实际应用的前提[1] [2],并且在不同的应用中期望 NNs 具有不同的稳定性。例如,在优化问题中,期望 NNs 具有唯一的稳定平衡点[3]。而在联想记忆中,当 NNs 执行联想记忆功能时,平衡点被视为存储在网络中的信息。因此,NNs 拥有的平衡点越多,其记忆存储容量就越大。所以,需要 NNs 具有多个局部稳定平衡[4] [5]。综上所述,多稳定性具有重要的理论意义和应用价值。

激活函数的类型对平衡点的数量和记忆存储能力起着重要作用。目前,对具有简单激活函数(如饱和函数[6]和S形函数[7])的NNs的多稳定性已经进行了深入研究。在[8]中,分析了具有原点对称阶梯激活函数的递归神经网络(RNNs)的多稳定性。结果表明,具有这种激活函数的RNNs可以具有 $(2m+1)^n$ 个平衡点,其中 $(m+1)^n$ 个是局部指数稳定的。除了单调函数外,具有非单调激活函数的RNNs的多稳定性也是一个热门话题。在[9]中,研究了具有Gaussian激活函数的RNNs的多稳定性,揭示了这样一个系统最多可以拥有 $2^n$ 个稳定平衡点,并且它的每个解轨迹都会收敛到稳定平衡点。在[10]中,发现了具有非单调Mexican-hat-type函数 $n$ 维NNs可以最多具有 $3^n$ 个平衡点。在[11]中,研究了具有不连续非单调分段线性激活函数的神经网络的多稳定性,并且发现不连续激活函数在多稳定性具有着更良好的性质[12]。为了获得更大的记忆存储容量,将Morita激活函数扩展为Morita-like函数。结果表明,具有该激活函数的NNs可以产生 $(m+1)^n$ 个稳定平衡。

受到上述启发,本文提出了一类新的不连续非单调激活函数。之后,深入研究了时滞递归神经网络(DRNN)的多稳定性和局部指数稳定性并且通过增加激活函数的峰值点来增大NNs的记忆存储容量。最后,提供了一个数值例子,展示了结论的准确性。

## 2. 问题陈述

### 2.1. 模型描述

在本文中,将考虑如下DRNN:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + J_i, \quad (2.1.1)$$

其中  $x_i(t) \in \mathcal{R}$  是第  $i$  个神经元的状态,  $c_i > 0$  表示第  $i$  个神经元的自反馈,  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$  分别表示第  $j$  个神经元在第  $i$  个神经元上的连接权重,  $J_i$  是一个常量外部输入,  $\tau_i(t)$  满足  $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau$  ( $\tau$  为常数)。

由于不连续非单调激活函数在增大记忆存储容量方面有着良好的性质, 本文提出了一类新型的不连续非单调激活函数。

$$f_i(x) = \begin{cases} u_i, & x \in (-\infty, p_{i,1}) \\ f_{i1}(x), & x \in [p_{i,1}, q_{i,1}) \\ f_{i2}(x), & x \in [q_{i,1}, p_{i,2}) \\ f_{i3}(x), & x \in [p_{i,2}, q_{i,2}) \\ f_{i4}(x), & x \in [q_{i,2}, p_{i,3}) \\ v_i, & x \in (p_{i,3}, +\infty) \end{cases} \quad (2.1.2)$$

其中  $p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3}, q_{i,1}, q_{i,2}$  是常数并且  $-\infty < p_{i,1} < q_{i,1} < p_{i,2} < q_{i,2} < p_{i,3} < +\infty$ 。  $f_{i1}(x)$  和  $f_{i3}(x)$  是连续且单调递增的函数,  $f_{i2}(x)$  和  $f_{i4}(x)$  是连续且单调递减函数,  $f_i(p_{i,1}) = f_i(p_{i,2}) = f_i(p_{i,3}) = u_i$ ,  $f_i(q_{i,1}) = f_i(q_{i,2})$  并且  $v_i > f_i(q_{i,1}) > f_i(p_{i,1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。  $f_i(x)$  有两个峰值点  $(q_{i,1}, f_i(q_{i,1}))$  和  $(q_{i,2}, f_i(q_{i,2}))$ 。

为了便于描述, 我们定义了以下符号,

$$\begin{aligned} (-\infty, p_{i,1}) &= (-\infty, p_{i,1})^1 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^0 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^0 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^0 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^0 \times (p_{i,3}, +\infty)^0, \\ (p_{i,1}, q_{i,1}) &= (-\infty, p_{i,1})^0 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^1 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^0 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^0 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^0 \times (p_{i,3}, +\infty)^0, \\ (q_{i,1}, p_{i,2}) &= (-\infty, p_{i,1})^0 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^0 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^1 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^0 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^0 \times (p_{i,3}, +\infty)^0, \\ (p_{i,2}, q_{i,2}) &= (-\infty, p_{i,1})^0 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^0 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^0 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^1 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^0 \times (p_{i,3}, +\infty)^0, \\ (q_{i,2}, p_{i,3}) &= (-\infty, p_{i,1})^0 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^0 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^0 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^0 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^1 \times (p_{i,3}, +\infty)^0, \\ (p_{i,3}, +\infty) &= (-\infty, p_{i,1})^1 \times (p_{i,1}, q_{i,1})^0 \times (q_{i,1}, p_{i,2})^0 \times (p_{i,2}, q_{i,2})^0 \times (q_{i,2}, p_{i,3})^0 \times (p_{i,3}, +\infty)^1, \end{aligned}$$

由此对  $\mathcal{R}^n$  进行状态空间划分:

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, p_{i,1})^{\delta_1^{(i)}} \times [p_{i,1}, q_{i,1}]^{\delta_2^{(i)}} \times (q_{i,1}, p_{i,2})^{\delta_3^{(i)}} \times [p_{i,2}, q_{i,2}]^{\delta_4^{(i)}} \times (q_{i,2}, p_{i,3})^{\delta_5^{(i)}} \times (p_{i,3}, +\infty)^{\delta_6^{(i)}}, \right. \\ &\quad \left. (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)}, \delta_4^{(i)}, \delta_5^{(i)}, \delta_6^{(i)}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ 或 } (0, 1, 0, 0, 0, 0) \text{ 或 } (0, 0, 1, 0, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. \text{或 } (0, 0, 0, 1, 0, 0) \text{ 或 } (0, 0, 0, 0, 1, 0) \text{ 或 } (0, 0, 0, 0, 0, 1) \right\} \end{aligned}$$

显然可见,  $\Omega_n$  有  $6^n$  个元素。

## 2.2. 平衡点的定义

由于具有激活函数(2.1.2)的 DRNN(2.1.1)是具有不连续点的微分方程组, 因此我们需要说明神经网络(2.1.1)解的含义。定义  $K[f(x)] = (K[f_1(x_1)], K[f_2(x_2)], \dots, K[f_n(x_n)])^T$  并且  $K[f_i(x_i)] = [f_i(x_i^-), f_i(x_i^+)]$ 。

定义 2.2.1. 如果  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T : [-\tau, T] \rightarrow \mathcal{R}^n, T \in (0, +\infty]$  满足以下条件:

- 1)  $x(t)$  在  $[-\tau, T]$  上是连续的, 并且在  $[0, T]$  上是绝对连续的。
- 2) 对于几乎所有的  $t \in [-\tau, T]$ , 存在可测函数  $\gamma(t) = [\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)]^T : [-\tau, T] \rightarrow \mathcal{R}^n$  使得  $\gamma(t) \in K[f(x(t))]$  且满足

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \gamma_j(t - \tau_{ij}) + J_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

则  $x(t)$  是 DRNN(2.1.1) 的一个解。

定义 2.2.2. 如果向量  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  满足:  $0 \in -c_i x_i^* + \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) K[f_j(x_j^*)] + J_i, \quad i = 1, \dots, n$ , 则称之为 DRNN(2.1.1) 的平衡点。

### 3. 主要结果

#### 3.1. 平衡点的存在性分析

首先, 我们将分析位于激活函数(2.1.2)连续区域中的平衡点数目。

引理 3.1.1 对  $i = 1, \dots, n$ , 如果以下条件成立:

$$-c_i p_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii}) u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max\{(a_{ij} + b_{ij}) u_j, (a_{ij} + b_{ij}) v_j\} + J_i < 0, \quad (3.1.1)$$

$$-c_i q_{i,2} + (a_{ii} + b_{ii}) f_i(q_{i,2}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{(a_{ij} + b_{ij}) u_j, (a_{ij} + b_{ij}) v_j\} + J_i > 0, \quad (3.1.2)$$

$$-c_i p_{i,3} + (a_{ii} + b_{ii}) v_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{(a_{ij} + b_{ij}) u_j, (a_{ij} + b_{ij}) v_j\} + J_i > 0, \quad (3.1.3)$$

则具有激活函数(2.1.2)的 DRNN(2.1.1) 有  $6^n$  个平衡点位于  $\Omega_n$ 。

证明: 从集合  $\Omega_n$  中任意选取一个元素为

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_n = & \left\{ \prod_{i \in N_1} (-\infty, p_{i,1}) \times \prod_{i \in N_1} [p_{i,1}, q_{i,1}] \times \prod_{i \in N_3} (q_{i,1}, p_{i,2}) \right. \\ & \left. \times \prod_{i \in N_4} [p_{i,2}, q_{i,2}] \times \prod_{i \in N_5} (q_{i,2}, p_{i,3}) \times \prod_{i \in N_6} (p_{i,3}, +\infty) \right\} \subset \Omega_n, \end{aligned}$$

其中  $N_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  是  $\{1, 2, \dots, n\}$  的子集, 并且  $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_6 = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_i \cap N_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 。我们将证明 DRNN(2.1.2) 在位于  $\tilde{\Omega}_n$  中至少有一个平衡点。

注意, DRNN(2.1.1) 的平衡点与以下无延迟神经网络的平衡点相同

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j(t)) + J_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

令

$$F_i(x) = -c_i x + (a_{ii} + b_{ii}) f(x) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (a_{ij} + b_{ij}) f(x_j(t)) + J_i. \quad (3.1.5)$$

情形 1: 当  $i \in N_1$  时, 根据(3.1.1)和(3.1.5)可得:

$$F_i(p_{i,1}) \leq -c_i p_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii})u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max\{(a_{ij} + b_{ij})u_j, (a_{ij} + b_{ij})v_j\} + J_i < 0.$$

并且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_i(x) = +\infty$ , 由于  $F_i(x)$  在  $(-\infty, p_{i,1}]$  连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (-\infty, p_{i,1})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

情形 2: 当  $i \in N_2$  时, 根据(3.1.2)和(3.1.5)可得:

$$F_i(q_{i,1}) > -c_i q_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii})f(q_{i,2}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n \min\{(a_{ij} + b_{ij})u_j, (a_{ij} + b_{ij})v_j\} + J_i > 0.$$

结合  $F_i(p_{i,1}) < 0$ , 由于  $F_i(x)$  在  $[p_{i,1}, q_{i,1}]$  上连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (p_{i,1}, q_{i,1})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

情形 3: 当  $i \in N_3$  时, 根据(3.1.1)可得  $F_i(p_{i,2}) < 0$ , 结合  $F_i(q_{i,1}) > 0$ , 由于  $F_i(x)$  在  $[q_{i,1}, p_{i,2}]$  上连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (q_{i,1}, p_{i,2})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

情形 4: 当  $i \in N_4$  时, 根据(3.1.2)可得  $F_i(q_{i,2}) > 0$ , 结合  $F_i(p_{i,2}) < 0$ , 由于  $F_i(x)$  在  $[p_{i,2}, q_{i,2}]$  上连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (p_{i,2}, q_{i,2})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

情形 5: 当  $i \in N_5$  时, 根据(3.1.1)可得  $\lim_{x \rightarrow p_{i,3}} F_i(x) < 0$ , 结合  $F_i(q_{i,2}) > 0$ , 由于  $F_i(x)$  在  $[q_{i,2}, p_{i,3}]$  上连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (q_{i,2}, p_{i,3})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

情形 6: 当  $i \in N_6$  时, 根据(3.1.3)和(3.1.5)可得  $\lim_{x \rightarrow p_{i,3}^+} F_i(x) > 0$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = -\infty$ , 由于  $F_i(x)$  在  $(p_{i,3}, +\infty)$  上连续, 所以至少存在一个  $\bar{x}_i \in (p_{i,3}, +\infty)$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

定义映射  $\mathcal{G}: \tilde{\Omega}_n \rightarrow \tilde{\Omega}_n$  满足  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ 。显然, 映射  $\mathcal{G}$  连续。根据 Brouwer 不动点定理,  $\mathcal{G}$  至少存在一个不动点  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \tilde{\Omega}_n$ , 此不动点也是 DRNN(2.1.1)位于  $\tilde{\Omega}$  中的一个平衡点。由于  $\Omega$  被划分为 6 个区间, 因此具有不连续非单调激活函数(2.1.2)的 DRNN(2.1.1)在  $\Omega$  中至少存在  $6^n$  个平衡点。

注 3.1.1 不等式(3.1.1)~(3.1.3)表明了  $a_{ii} + b_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ 。事实上, 根据(3.1.1)和(3.1.2), 我们可以得到  $-c_i p_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii})u_i < -c_i q_{i,2} + (a_{ii} + b_{ii})f_i(q_{i,2})$ , 使得  $0 < c_i(q_{i,2} - p_{i,1}) < (a_{ii} + b_{ii}) \cdot (f_i(q_{i,2}) - u_i)$ , 由于  $f_i(q_{i,2}) - u_i > 0$ , 因此这意味着  $a_{ii} + b_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ 。

上述给出的引理 3.1.1 只考虑了平衡点的所有分量都位于激活函数的连续区域的情况, 但是是否存在一些平衡点, 其部分分量正好位于激活函数的不连续点。这个问题将在下列引理中被讨论。

**引理 3.1.2** 假设(3.1.1)~(3.1.3)成立, 具有非单调不连续激活函数(2.1.2)和 DRNN(2.1.1)至少存在  $\sum_{j=1}^n C_n^j 6^{n-j}$  个平衡点位于激活函数  $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^T$  的不连续区域。

证明: 对于任何点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{R}^n$ , 定义一个集合  $\mathcal{N} = \{i \mid x_i = p_{i,3}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。  $\rho(\mathcal{N})$  表示集合  $\mathcal{N}$  中元素的数量。在下文中, 我们将根据  $\rho(\mathcal{N})$  的值分为两种情形讨论。

情形 1:  $\rho(\mathcal{N}) = 1$ , 这意味着向量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  只有一个分量  $x_i = p_{i,3}$ 。为了不失一般性的情况下, 我们假设  $x_1 = p_{1,3}$ 。接下来, 我们将证明  $(p_{1,3}, x_2, \dots, x_n)$  是 DRNN(2.1.1)的一个平衡点。根据定义 2.2.2, 我们仅需要满足:

$$0 \in -c_1 p_{1,3} + (a_{11} + b_{11})[u_1, v_1] + \sum_{j=2}^n (a_{1j} + b_{1j})f_j(x_j) + J_1, \quad (3.1.6)$$

$$0 \in -d_i x_i + (a_{i1} + b_{i1})[u_1, v_1] + \sum_{j=2}^n (a_{ij} + b_{ij})f_j(x_j) + J_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1.7)$$

我们将首先证明对于任意的  $(x_2, \dots, x_n)^T \in \mathcal{R}^{n-1}$ , (3.1.6)都成立。注意到  $a_{11} + b_{11} > 0$ , 我们有  $(a_{11} + b_{11})[u_1, v_1] = [(a_{11} + b_{11})u_1, (a_{11} + b_{11})v_1]$ 。由  $u_j \leq f_j(x) \leq v_j$ , (3.1.1)和(3.1.3)可得:

$$\begin{aligned}
 & -c_1 p_{1,3} + (a_{11} + b_{11})u_1 + \sum_{j=2}^n (a_{1j} + b_{1j})f_j(x_j) + J_1 \\
 & < -c_1 p_{1,1} + (a_{11} + b_{11})u_1 + \sum_{j=2}^n \max\{(a_{1j} + b_{1j})u_j, (a_{1j} + b_{1j})v_j\} + J_1 < 0,
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$$\begin{aligned}
 & -c_1 p_{1,3} + (a_{11} + b_{11})v_1 + \sum_{j=2}^n (a_{1j} + b_{1j})f_j(x_j) + J_1 \\
 & \geq -c_1 p_{1,3} + (a_{11} + b_{11})v_1 + \sum_{j=2}^n \min\{(a_{1j} + b_{1j})u_j, (a_{1j} + b_{1j})v_j\} + J_1 > 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

因此(3.1.6)成立。

从  $\mathcal{R}^{n-1}$  中任意选取一个区域:

$$\tilde{\Omega}_{n-1} = \prod_{i \in N_1} (-\infty, p_{i,1}) \times \prod_{i \in N_2} [p_{i,1}, q_{i,1}] \times \prod_{i \in N_3} (q_{i,1}, p_{i,2}) \times \prod_{i \in N_4} [p_{i,2}, q_{i,2}] \times \prod_{i \in N_5} (q_{i,2}, p_{i,3}) \times \prod_{i \in N_6} (p_{i,3}, +\infty)$$

其中  $N_i (i=1,2,\dots,6)$  是  $\{2,3,\dots,n\}$  的子集,  $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4 \cup N_5 \cup N_6 = \{2,3,\dots,n\}$ ,  $N_i \cap N_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 。接下来, 我们要证明(3.1.7)成立。对于任意的  $(x_2, \dots, x_n)^T \in \tilde{\Omega}_{n-1}$ , 定义函数:

$$F_i(x) = -c_i x + (a_{ii} + b_{ii})f_i(x) + \tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} + \sum_{j \neq i, j=2}^n (a_{ij} + b_{ij})f_j(x_j) + J_i, i = 2, \dots, n \tag{3.1.10}$$

其中  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \in (a_{i1} + b_{i1})[u_1, v_1]$ 。这就意味着

$\min\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\} \leq \tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \leq \max\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$ 。接下来有六种可能的案例需要讨论。

1) 当  $i \in N_1$  时,  $f_i(p_{i,1}) = u_i$ ,  $u_j \leq f_j(x_j) \leq v_j$  且  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \leq \max\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$ 。根据(3.1.1)和(3.1.10)可得:

$$F_i(p_{i,1}) \leq -c_i p_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii})u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max\{(a_{ij} + b_{ij})u_j, (a_{ij} + b_{ij})v_j\} + J_i < 0.$$

由于  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_i(x) = +\infty$  和  $F_i(x) (x \neq p_{i,3})$  的连续性, 因此, 存在  $\bar{x}_i \in (-\infty, p_{i,1})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

2) 当  $i \in N_2$  时,  $f_i(q_{i,1}) = f_i(q_{i,2})$  且  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \geq \min\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$ 。根据(3.1.2)和(3.1.10)可得:

$$F_i(q_{i,1}) \geq -c_i q_{i,2} + (a_{ii} + b_{ii})f_i(q_{i,2}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{(a_{ij} + b_{ij})u_j, (a_{ij} + b_{ij})v_j\} + J_i > 0.$$

因此, 存在  $\bar{x}_i \in (p_{i,1}, q_{i,1})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

3) 当  $i \in N_3$  时,  $f_i(p_{i,2}) = u_i$ ,  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \leq \max\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$  且  $p_{i,2} > p_{i,1}$ 。根据(3.1.1)和(3.1.10)可得  $F_i(p_{i,2}) < 0$ 。因此, 存在  $\bar{x}_i \in (q_{i,1}, p_{i,2})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

4) 当  $i \in N_4$  时,  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \geq \min\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$ 。根据(3.1.2)和(3.1.10)可得  $F_i(q_{i,2}) > 0$ 。

因此, 存在  $\bar{x}_i \in (p_{i,2}, q_{i,2})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

5) 当  $i \in N_5$  时,  $f_i(p_{i,3}) = u_i$ ,  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \leq \max\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$  且  $p_{i,3} > p_{i,1}$ 。根据(3.1.1)和(3.1.10)可得:

$$\lim_{x \rightarrow p_{i,3}^-} F_i(x) \leq -c_i p_{i,1} + (a_{ii} + b_{ii})u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max\{(a_{ij} + b_{ij})u_j, (a_{ij} + b_{ij})v_j\} + J_i < 0.$$

因此, 存在  $\bar{x}_i \in (q_{i,2}, p_{i,3})$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

6) 当  $i \in N_6$  时,  $\tilde{a}_{i1} + \tilde{b}_{i1} \geq \min\{(a_{i1} + b_{i1})u_1, (a_{i1} + b_{i1})v_1\}$ 。根据(3.1.2)和(3.1.10)可得  $\lim_{x \rightarrow p_{i,3}^+} F_i(x) > 0$ 。由

于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_i(x) = -\infty$  和  $F_i(x)$  ( $x \neq p_{i,3}$ ) 的连续性, 因此, 存在  $\bar{x}_i \in (p_{i,3}, +\infty)$  使得  $F_i(\bar{x}_i) = 0$ 。

定义映射  $\mathcal{G}: \tilde{\Omega}_{n-1} \rightarrow \tilde{\Omega}_{n-1}$  满足  $\mathcal{G}(x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ 。显然, 映射  $\mathcal{G}$  连续。根据 Brouwer 不动点定理,  $\mathcal{G}$  至少存在一个不动点  $(x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \tilde{\Omega}_{n-1}$  并且满足 (3.1.7)。因此,  $(p_{1,3}, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  是 DRNN(2.1.1) 的平衡点。由于  $\tilde{\Omega}_{n-1}$  的任意性,  $\mathcal{R}^{n-1}$  被划分成  $6^{n-1}$ , 具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 的 DRNN(2.1.1) 具有  $6^{n-1}$  个平衡点, 并且这  $6^{n-1}$  个平衡点的第一个分量  $x_1 = p_{1,3}$ 。

对于其他  $n-1$  种情况:  $x_j = p_{j,3}, j = 2, 3, \dots, n$ , 可以类似讨论。因此, 在情形 1 中, DRNN(2.1.1) 至少存在  $C_n^1 6^{n-1}$  个平衡点。

情形 2: 对于其余的情况  $\rho(\mathcal{N}) = j, j = 2, 3, \dots, n$ , 通过与情形 1 中相同的推理, 我们可以得到神经网络至少存在  $C_n^j 6^{n-j}$  个平衡点。

综上所述, 具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 的 DRNN(2.1.1) 至少存在  $\sum_{j=1}^n C_n^j 6^{n-j}$  个平衡点位于所设计的激活函数的不连续点处。

结合引理 3.1.1 和 3.1.2, 我们可以得到的结论是具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 的 DRNN(2.1.1) 至少存在  $6^n + \sum_{j=1}^n C_n^j 6^{n-j} = (6+1)^n = 7^n$  个平衡点。下面的定理总结了上面得到的结果。

定理 3.1.1 假设 (3.1.1)~(3.1.3) 成立, 具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 的 DRNN(2.1.1) 至少存在  $7^n$  个平衡点, 其中  $6^n$  个位于激活函数的连续区域,  $7^n - 6^n$  个位于激活函数的不连续区域。

证明: 结合引理 3.1.1 和 3.1.2, 我们可以得到具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 的 DRNN(2.1.1) 至少存在  $6^n + \sum_{j=1}^n C_n^j 6^{n-j} = (6+1)^n = 7^n$  个平衡点,  $7^n - 6^n$  个位于激活函数的不连续区域。

### 3.2. 平衡点的稳定性分析

令

$$\Phi_1 = \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, p_{i,1})^{\delta_1^{(i)}} \times (q_{i,1}, p_{i,2})^{\delta_2^{(i)}} \times (q_{i,2}, p_{i,3})^{\delta_3^{(i)}} \times (p_{i,3}, +\infty)^{\delta_4^{(i)}}, \right. \\ \left. (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)}, \delta_4^{(i)}) = (1, 0, 0, 0) \text{ or } (0, 1, 0, 0) \text{ or } (0, 0, 1, 0) \text{ or } (0, 0, 0, 1) \right\}, \\ \Phi_2 = \Omega_n - \Phi_1.$$

显然,  $\Phi_1$  有  $4^n$  个元素,  $\Phi_2$  有  $6^n - 4^n$  个元素。在讨论平衡点的局部稳定性之前, 我们首先证明  $\Phi_1$  的正不变性, 它将在稳定性定理中起着关键作用。

引理 3.2.1 对  $i = 1, \dots, n$ , 如果以下条件成立:

$$-c_i p_{i,1} + a_{ii} u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \max \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i < 0, \quad (3.2.1)$$

$$-c_i q_{i,2} + a_{ii} f_i(q_{i,2}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0, \quad (3.2.2)$$

$$-d_i p_{i,3} + a_{ii} v_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0, \quad (3.2.3)$$

那么  $\Phi_1$  是 DRNN(2.1.1) 正不变集。

证明: 首先, 很容易看出, 条件 (3.2.1)~(3.2.3) 意味着定理 3.1.1 中的条件 (3.1.1)~(3.1.3) 成立。因此, 根据定理 3.1.1, 在引理 3.2.1 的条件下, 可以保证 DRNN(2.1.1) 的  $7^n$  个平衡点的共存。

从集合  $\Phi_1$  中任意选取一个集合:

$$\tilde{\Phi}_1 = \prod_{i \in N_1} (-\infty, p_{i,1}) \times \prod_{i \in N_3} (q_{i,1}, p_{i,2}) \prod_{i \in N_5} (q_{i,2}, p_{i,3}) \times \prod_{i \in N_6} (p_{i,3}, +\infty) \subset \Phi_1,$$

其中  $N_i (i=1,3,5,6)$  是  $\{1,2,\dots,n\}$  的子集,  $N_1 \cup N_3 \cup N_5 \cup N_6 = \{1,2,\dots,n\}$ ,  $N_i \cap N_j = \emptyset (i \neq j, i, j=1,3,5,6)$ 。

情形 1: 假设存在  $i \in N_1$  和  $t_2 > t_1 \geq 0$  使得  $x_i(t_1) = p_{i,1}$  和  $x_i(t_2) > p_{i,1}$ , 从而  $\dot{x}_i(t_1) > 0$ 。另一方面, 根据 (3.2.1) 可得:

$$\dot{x}_i(t_1) \leq -c_i p_{i,1} + a_{ii} u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max\{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \max\{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i < 0,$$

与  $\dot{x}_i(t_1) > 0$  矛盾。因此,  $x_i(t)$  不会逃离  $(-\infty, p_{i,1})$ 。

情形 2: 假设存在  $i \in N_3$  和  $t_2 > t_1 \geq 0$  使得  $x_i(t_1) = q_{i,1}$  和  $x_i(t_2) < q_{i,1}$ , 从而  $\dot{x}_i(t_1) < 0$ 。另一方面, 根据 (3.2.2) 可得:

$$\dot{x}_i(t_1) > -c_i q_{i,2} + a_{ii} f_i(q_{i,2}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min\{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0,$$

与  $\dot{x}_i(t_1) < 0$  矛盾。因此,  $x_i(t)$  不会从左侧逃离  $(q_{i,1}, p_{i,2})$ 。类似地,  $x_i(t)$  不会从右侧逃离  $(q_{i,1}, p_{i,2})$ 。

情形 3: 假设存在  $i \in N_5$  和  $t_2 > t_1 \geq 0$  使得  $x_i(t_1) = q_{i,2}$  和  $x_i(t_2) < q_{i,2}$ , 从而  $\dot{x}_i(t_1) < 0$ 。另一方面, 根据 (3.2.2) 可得:

$$\dot{x}_i(t_1) > -c_i q_{i,2} + a_{ii} f_i(q_{i,2}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min\{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0,$$

与  $\dot{x}_i(t_1) < 0$  矛盾。因此,  $x_i(t)$  不会从左侧逃离  $(q_{i,2}, p_{i,3})$ 。类似地,  $x_i(t)$  不会从右侧逃离  $(q_{i,2}, p_{i,3})$ 。

情形 4: 假设存在  $i \in N_6$  和  $t_1 \geq 0$  使得  $x_i(t_1) = p_{1,3} + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  是充分小的正数),  $\dot{x}_i(t_1) < 0$  和  $x_i(t) \in [p_{1,3} + \varepsilon, +\infty)$  对于  $0 \leq t \leq t_1$ 。由于  $\varepsilon$  是充分小的正数, 根据 (3.2.3) 可得:

$$\dot{x}_i(t_1) \geq -c_i p_{i,3} + a_{ii} v_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min\{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min\{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i - c_i \varepsilon \geq 0,$$

与  $\dot{x}_i(t_1) < 0$  矛盾。因此,  $x_i(t)$  不会从左侧逃离  $(p_{i,3}, +\infty)$ 。从这四种情形中, 我们得到  $\tilde{\Phi}_1$  是 DRNN(2.1.1) 的一个正不变集。

接下来, 我们将证明位于  $\tilde{\Phi}_1$  的平衡点是局部稳定的。令  $d_i = c_i - a_{ii} \max\{f'_{i2}(\xi^*), f'_{i4}(\xi^{**})\}$ ,  $\bar{a}_{ij} = |a_{ij}| \max\{f'_{j2}(\xi^*), f'_{j4}(\xi^{**})\}$ ,  $\bar{b}_{ij} = |b_{ij}| \max\{f'_{j2}(\xi^*), f'_{j4}(\xi^{**})\}$ , 其中  $\xi^* \in (q_{i,1}, p_{i,2})$ ,  $\xi^{**} \in (q_{i,2}, p_{i,3})$ 。

定理 3.2.1 假设 (3.2.1)~(3.2.3) 成立, 如果存在正常数  $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n$  使得以下条件成立:

$$d_i \varsigma_i - \sum_{j=N, j \neq i}^n \bar{a}_{ij} \varsigma_j - \sum_{j=N}^n \bar{b}_{ij} \varsigma_j > 0, i=1, \dots, n \tag{3.2.4}$$

那么具有非单调不连续激活函数 (2.1.2) 和 DRNN(2.1.1) 至少有  $7^n$  个平衡点, 其中位于  $\Phi_1$  的  $4^n$  个是局部指数稳定的。

证明: 假设  $\tilde{\Phi}_1$  中的平衡点为  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , 令  $e(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) = x(t) - x^*$ ,  $N = \{i | x_i(t) \in (q_{i,1}, p_{i,2}) \text{ 或 } (q_{i,2}, p_{i,3}), i \in \{1, \dots, n\}\}$ 。那么  $e(t)$  的右上 Dini 导数

$$\begin{aligned} D^+ |e_i(t)| &= \text{sign}(e_i(t)) \frac{de_i(t)}{dt} \\ &\leq -c_i |e_i(t)| + a_{ii} f'_i(\xi_i(t)) |e_i(t)| + \sum_{j=N, j \neq i}^n \bar{a}_{ij} |e_j(t)| + \sum_{j=N}^n \bar{b}_{ij} |e_j(t - \tau_j(t))| \\ &\leq -d_i |e_i(t)| + \sum_{j=N, j \neq i}^n \bar{a}_{ij} |e_j(t)| + \sum_{j=N}^n \bar{b}_{ij} |e_j(t - \tau_j(t))| \end{aligned}$$



其中  $\xi_i(t) \in (x_i(t), x_i^*)$  或  $(x_i^*, x_i(t))$ 。

根据(3.2.4), 存在充分小的  $\theta(\theta > 0)$  满足下列不等式成立:

$$(-d_i + \theta)\zeta_i + \sum_{j=N, j \neq i}^n \bar{a}_{ij}\zeta_j + \sum_{j=N}^n \bar{b}_{ij}\zeta_j \exp(\theta\tau) < 0. \quad (3.2.5)$$

令  $V_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{t \in [-\tau, 0]} \zeta_i^{-1} |e_i(t)| \right\}$  和

$$V_i(t) = \begin{cases} \zeta_i^{-1} |e_i(t)| - V_{\max}, & -\tau \leq t \leq 0, \\ \zeta_i^{-1} |e_i(t)| \exp(\theta t) - V_{\max}, & t > 0. \end{cases}$$

显然,  $V_i(t) \leq 0$  对于  $t \in [-\tau, 0]$ 。接下来, 我们会证明  $V_i(t) \leq 0$  对于  $t \geq 0$ 。假设存在  $k \in \{1, \dots, n\}$  和  $t_2 > t_1 \geq 0$  使得  $V_k(t_1) = 0$ ,  $V_k(t_2) > 0$ 。基于上述假设,  $D^+V_k(t_1) \geq 0$ 。然而,

$$\begin{aligned} D^+V_k(t_1) &= \zeta_k^{-1} |e_k(t_1)| \theta \exp(\theta t_1) + \zeta_k^{-1} D^+ |e_k(t_1)| \exp(\theta t_1) \\ &\leq \zeta_k^{-1} V_{\max} \left( (-d_k + \theta)\zeta_k + \sum_{j=1, j \neq k}^n \bar{a}_{kj}\zeta_j + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{kj}\zeta_j \exp(\theta\tau) \right). \end{aligned}$$

根据(3.2.5)可得,  $D^+V_k(t_1) < 0$ 。这与  $D^+V_k(t_1) \geq 0$  矛盾。因此, 当  $t \geq 0$  时,

$$|e_i(t)| \leq \zeta_i V_{\max} \exp(-\theta t), \quad i = 1, \dots, n.$$

这意味着  $x(t)$  会指数收敛到  $\tilde{\Phi}_1$  中的平衡点  $x^*$ 。

### 3.3. 定理的推广

与[11]相比, 我们增加了激活函数的复杂性, 提出了一类新的不连续非单调激活函数, 并证明了具有这类新的激活函数的神经网络有  $7^n$  个平衡, 其中有  $4^n$  个稳定平衡。更重要的是, 需要满足的条件数量与[11]中的相同。因此, 我们猜测增加激活函数的峰值可以在不增加计算复杂性的情况下增加稳定平衡的数量。接下来, 我们继续增加峰值的数量, 并提出以下激活函数:

$$f_i(x) = \begin{cases} u_i, & x \in (-\infty, p_{i,1}) \\ f_{i1}(x), & x \in [p_{i,1}, q_{i,1}) \\ f_{i2}(x), & x \in [q_{i,1}, p_{i,2}) \\ \dots \\ f_{i2k-1}(x), & x \in [p_{i,k}, q_{i,k}) \\ f_{i2k}(x), & x \in [q_{i,k}, p_{i,k+1}) \\ v_i, & x \in (p_{i,k+1}, +\infty) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

其中  $p_{i,1}, \dots, p_{i,k+1}, q_{i,1}, \dots, q_{i,k}$  是常数并且  $-\infty < p_{i,1} < q_{i,1} < p_{i,2} < q_{i,2} < \dots < q_{i,k} < p_{i,k+1} < +\infty$ 。

$f_{i1}(x), f_{i3}(x), \dots, f_{i2k-1}(x)$  是连续且单调递增的函数,  $f_{i2}(x), f_{i4}(x), \dots, f_{i2k}(x)$  和是连续且单调递减函数,  $f_i(p_{i,1}) = f_i(p_{i,2}) = \dots = f_i(p_{i,k+1}) = u_i$ ,  $f_i(q_{i,1}) = \dots = f_i(q_{i,k})$  并且  $v_i > f_i(q_{i,1}) > f_i(p_{i,1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。  $f_i(x)$  有  $k$  个峰值点  $(q_{i,1}, f_i(q_{i,1})), (q_{i,2}, f_i(q_{i,2})), \dots, (q_{i,k}, f_i(q_{i,k}))$ 。然后, 可以得到以下两个定理。

推论 3.3.1 对  $i = 1, \dots, n$ , 如果以下条件成立:

$$-c_i p_{i,1} + a_{ii} u_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \max \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \max \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i < 0, \quad (3.3.2)$$

$$-c_i q_{i,k} + a_{ii} f_i(q_{i,k}) + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0, \quad (3.3.3)$$

$$-d_i p_{i,k+1} + a_{ii} v_i + \sum_{j \neq i, j=1}^n \min \{a_{ij} u_j, a_{ij} v_j\} + \sum_{j=1}^n \min \{b_{ij} u_j, b_{ij} v_j\} + J_i > 0, \quad (3.3.4)$$

那么具有非单调不连续激活函数(3.3.1)的 DRNN(2.1.1)至少存在  $(2k+3)^n$  个平衡点, 其中  $(2k+2)^n$  个位于激活函数的连续区域,  $(2k+3)^n - (2k+2)^n$  个位于激活函数的不连续区域。

证明: 与定理 3.1.1 和引理 3.2.1 的证明方法类似, 因此省略证明。

在给出推论 3.3.2 之前, 我们先令  $d_i = c_i - a_{ii} \max \{f'_{i2}(\xi_1), f'_{i4}(\xi_2), \dots, f'_{i2k}(\xi_k)\}$ ,  $\bar{a}_{ij} = |a_{ij}| \max \{f'_{j2}(\xi_1), \dots, f'_{j2k}(\xi_k)\}$ ,  $\bar{b}_{ij} = |b_{ij}| \max \{f'_{j2}(\xi_1), \dots, f'_{j2k}(\xi_k)\}$ , 其中  $\xi_1 \in (q_{i,1}, p_{i,2}), \xi_2 \in (q_{i,2}, p_{i,3}), \dots, \xi_k \in (q_{i,k}, p_{i,k+1})$ 。  $N = \{i | x_i(t) \in (q_{i,h}, p_{i,h+1}), h=1, \dots, k\}$ 。

推论 3.3.2 假设(3.3.2)~(3.3.4)成立, 如果存在正常数  $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n$  使得以下条件成立:

$$d_i \varsigma_i - \sum_{j \in N, j \neq i} \bar{a}_{ij} \varsigma_j - \sum_{j \in N} \bar{b}_{ij} \varsigma_j > 0, i=1, \dots, n \quad (3.3.5)$$

那么具有非单调不连续激活函数(3.3.1)和 DRNN(2.1.1)至少有  $(2k+3)^n$  个平衡点, 其中  $(k+2)^n$  个平衡点是局部指数稳定的。

证明: 与定理 3.2.1 的证明方法类似, 因此省略证明。

#### 4. 数值仿真

我们将列举一个例子来说明本文理论结果的有效性。

例 4.1: 考虑 2 维时滞递归神经网络, 其中  $\tau_1(t) = t/(1+t)$ ,  $\tau_2(t) = \exp(t)/(1+\exp(t))$ , 以及

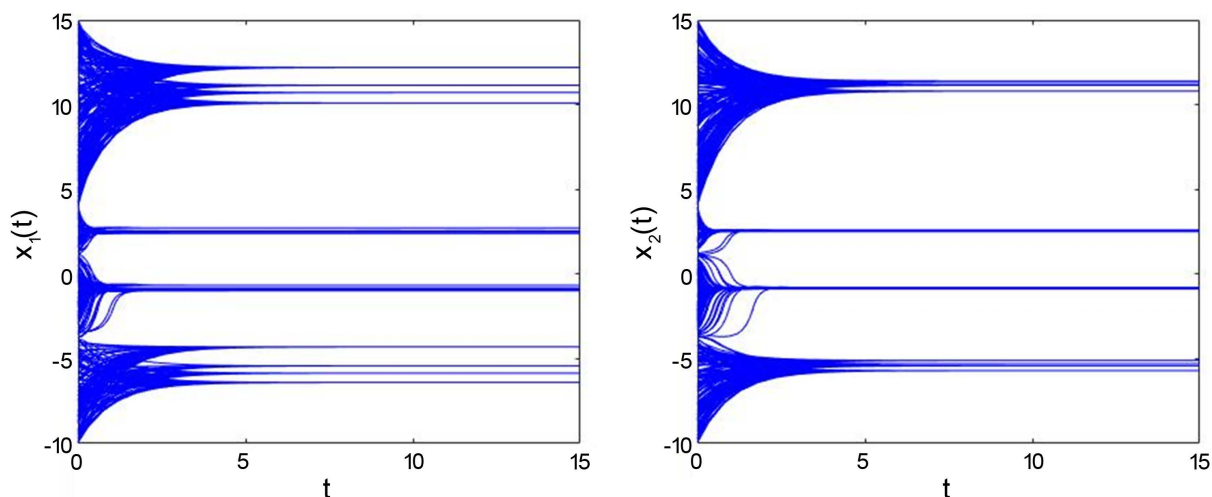
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0.3 \\ -0.5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

定义激活函数为:

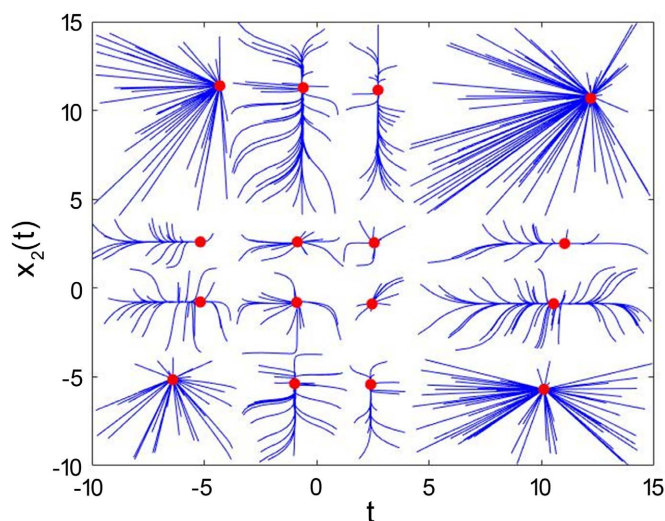
$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} -1, & -\infty < x < -4 \\ x+3, & -4 \leq x < -2 \\ -x-1, & -2 \leq x < 0 \\ x-1, & 0 \leq x < 2 \\ -x+3, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2, & 4 < x < +\infty \end{cases} \quad (4.1.1)$$

激活函数(4.1.1)有两个峰值  $(-2,1)$  和  $(2,1)$ 。上述参数满足定理 3.2.1 的条件。根据定理 3.2.1, DRNN(2.1.1)存在  $7^2 = 49$  个平衡点, 其中有  $4^2 = 16$  个平衡点是局部指数稳定的。事实上, 仿真结果也验证了理论结果的正确性。  $x_1$  和  $x_2$  的瞬态行为如图 1 所示。图 2 显示了具有 500 个随机初始值的 DRNN(2.1.1) 的解轨迹, 其中 16 个红色填充的圆圈表示局部指数稳定的平衡点。我们可以发现这 500 个随机初始值经过一段时间都收敛到了局部稳定平衡点。图 2 中解的轨迹满足本文对稳定平衡点的证明, 因此本文的结论是有效的。



**Figure 1.** Transient behavior of  $x_1$  and  $x_2$  in Example 4.1

**图 1.** 例 4.1 中  $x_1$  和  $x_2$  的瞬态行为



**Figure 2.** Phase diagrams of  $(x_1, x_2)$  in Example 4.1

**图 2.** 例 4.1 中  $(x_1, x_2)$  的相位图

## 5. 结论

为增加稳定平衡点的数量, 本文提出了一类不连续非单调激活函数, 并探索相应的 DRNN(2.1.1) 的多稳性。首先证明了具有这种激活函数的 DRNN(2.1.1) 在某些条件下可以产生  $7^n$  个平衡点, 其中  $4^n$  个是局部指数稳定的。进一步, 通过增加激活函数峰值点的数量  $k$ , DRNN(2.1.1) 可以产生  $(2k+3)^n$  个平衡点, 其中  $(k+2)^n$  个是局部指数稳定的。与现有文献中的分段线性函数不同, 本文采用的激活函数是不连续非单调分段函数, 可以大大增加现有神经网络稳定平衡点的数量和记忆存储容量。

## 参考文献

- [1] Cao, J. and Zhou, D. (1998) Stability Analysis of Delayed Cellular Neural Networks. *Neural Networks*, **11**, 1601-1605. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(98\)00080-X](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(98)00080-X)
- [2] Faydasicok, O. and Arik, S. (2012) Robust Stability Analysis of a Class of Neural Networks with Discrete Time De-

- 
- lays. *Neural Networks*, **29**, 52-59. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2012.02.001>
- [3] Di Marco, M., Forti, M. and Pancioni, L. (2017) New Conditions for Global Asymptotic Stability of Memristor Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**, 1822-1834. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2017.2688404>
- [4] Zeng, Z. and Zheng, W.X. (2012) Multistability of Neural Networks with Time-Varying Delays and Concave-Convex Characteristics. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **23**, 293-305. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2011.2179311>
- [5] Hu, B., Guan, Z.H., Chen, G., *et al.* (2018) Multistability of Delayed Hybrid Impulsive Neural Networks with Application to Associative Memories. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **30**, 1537-1551. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2018.2870553>
- [6] Zeng, Z., Wang, J. and Liao, X. (2004) Stability Analysis of Delayed Cellular Neural Networks Described Using Cloning Templates. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **51**, 2313-2324. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.836855>
- [7] Cheng, C.Y., Lin, K.H. and Shih, C.W. (2006) Multistability in Recurrent Neural Networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 1301-1320. <https://doi.org/10.1137/050632440>
- [8] Zeng, Z. and Zheng, W.X. (2013) Multistability of Two Kinds of Recurrent Neural Networks with Activation Functions Symmetrical about the Origin on the Phase Plane. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **24**, 1749-1762. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2013.2262638>
- [9] Liu, P., Zeng, Z. and Wang, J. (2017) Complete Stability of Delayed Recurrent Neural Networks with Gaussian Activation Functions. *Neural Networks*, **85**, 21-32. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.09.006>
- [10] Wang, L. and Chen, T. (2012) Multistability of Neural Networks with Mexican-Hat-Type Activation Functions. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **23**, 1816-1826. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2210732>
- [11] Nie, X. and Zheng, W.X. (2015) Multistability of Neural Networks with Discontinuous Non-Monotonic Piecewise Linear Activation Functions and Time-Varying Delays. *Neural Networks*, **65**, 65-79. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2015.01.007>
- [12] Shen, Y., Zhu, S., Liu, X., *et al.* (2021) Multistability and Associative Memory of Neural Networks with Morita-Like Activation Functions. *Neural Networks*, **142**, 162-170. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.04.035>