

Multi-Stage Dynamic Discount and Inventory Optimization Model Based on Demand Learning: Taking Garment Sales as an Example

Jiali Han

College of Business Administration, Donghua University, Shanghai
Email: 1604421380@qq.com

Received: Dec. 26th, 2018; accepted: Jan. 8th, 2019; published: Jan. 15th, 2019

Abstract

Aiming at the uncertainties of demand model, based on the known prior demand model, data assimilation technology is applied to continuously learn the parameters of demand model, and the state-valued demand parameters of the model are optimized by using the data of each observation time. A multi-stage discount and inventory model based on demand learning is established to formulate a reasonable discount strategy to meet the business sales objectives. Empirical research shows that the proposed model can effectively reduce the inventory level of merchants by making reasonable discounts under demand uncertainty, and provide scientific basis for discount promotion. Through sensitivity analysis of initial inventory and initial price, the optimal initial inventory and initial price can be found. It provides strong support for the determination of order quantity and initial pricing, and improves the control level of dynamic system.

Keywords

Garment, Demand Learning, Parameter Prediction, Dynamic Discount

基于需求学习的多阶段动态折扣和库存优化研究——以服装销售为例

韩佳莉

东华大学旭日工商管理学院, 上海
Email: 1604421380@qq.com

收稿日期：2018年12月26日；录用日期：2019年1月8日；发布日期：2019年1月15日

摘要

本文针对需求模型不确定性问题，从需求学习的角度，基于已知的先验需求模型，应用数据同化技术对需求模型中的参数进行不断学习，利用各个观测时刻的数据对模型的状态值需求参数进行优化，建立了基于需求学习的多阶段动态折扣和库存模型，制定出合理的折扣策略满足商家的销售目标。通过实证研究表明，本文提出的模型可以在需求不确定性下通过制定合理的折扣，有效降低商家的库存水平，为打折促销提供科学的依据，并通过期初库存量和初始价格的灵敏度分析，可以找到最优期初库存量和初始价格，为商家的订货量和初始定价的确定提供有力支持，提高了对动态系统的控制水平。

关键词

服装，需求学习，动态折扣，库存

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

任何科学定价决策的基本输入信息都是需求模型，在实际的销售环境中，决策者需要根据企业已有的足够多的历史数据统计得到所需的先验需求模型，由于市场状态是平稳的，可以假设这个需求模型可以在一定程度上反映未来的需求走势，但是由于市场需求波动是存在且无规律的，根据历史数据得到的需求模型将不能很好地反映未来的真实需求。因此，基于完全依靠先验信息的动态定价模型会导致定价策略不能很好地发挥作用。那么决策者应该如何捕捉市场需求的变动，并且反映到动态定价模型中，这是个值得探讨的问题。

国内外针对动态定价研究起步于上世纪70年代，发展于90年代，已取得了研究成果。如 Golabi [1] 和 Bitran [2] 等人，建立了需求不确定下的多阶段动态定价模型：将商品的销售期分为 T 个阶段，求解各个阶段的最优价格，以实现总销售期内的利润最大化。近年来，学术界引入需求学习进行针对需求波动的动态定价研究。如 Besbes [3] 研究了需求函数参数不确定情形下的动态定价方法，给出了需求参数学习的方法，并以此来进行动态定价研究。Araman [4] 将易逝品引入需求学习的定价问题。Lin [5] 针对服务行业将需求学习思想运用到动态定价过程中，通过实时的数据进行连续需求学习。大量研究表明，针对需求预测不准确的问题，需求学习能显著提高商家利润，是解决易逝品需求不确定性的一种有效解决方法。

因此，本文考虑了基于需求学习的方法对不确定需求模型中的参数值进行学习，运用数据同化技术 (data assimilation)，将先验需求模型和当前观测数据结合，建立动态折扣和库存优化模型，实现动态系统的最优控制。

2. 模型建立

2.1. 算法介绍

本文所用的研究对象为服装，在实际平稳的市场环境中，需求参数波动多呈平稳分布，因此，本文采

用经典的卡尔曼滤波算法对线性需求系统的过程参数进行更新学习，提高预测的准确性和定价的合理性。针对服装销售在短周期内需求参数的线性变化，本文利用卡尔曼滤波算法对需求参数进行更新预测。其中，卡尔曼滤波算法(KF)是一种常用的数据同化算法，是由 Kalman [6]在 1960 年提出，主要包括预测和更新 2 个过程。1) 预测。已知先验模型进行模型初始化，根据第 n 阶段的观测数据预测第 $n + 1$ 阶段的模型状态值。2) 更新。对 1)中的预测值进行加权，其中权重由卡尔曼增益确定，然后得到 $n = 1$ 阶段的更新值，即最优估计值，以此重新初始化模型，重复进行上述步骤，直到系统观测结束。，具体计算过程如下：

1) 预测。令系统状态向量 $\theta \sim N(\theta_0, \sigma^2 P_0)$ ，那么状态预测为 $\theta_n = A\theta_{n-1} + \omega$ ；

2) 计算卡尔曼增益 k_n 。根据第 n 阶段的观测数据得到测量矩阵 H_n 和测量噪声 V ，其中 R 是 V 的协方差，那么 $k_n = P_n H_n' / (H_n P_n H_n' + R)$ ；

3) 计算最优估计值。根据卡尔曼增益 k_n 得到现在阶段 n 的最优化参数估算值： $\theta_n' = \theta_n + k_n(z_n - H_n \theta_n)$ ，其中 $z_n = H_n \theta_n + V$ ，为第 n 阶段的系统测量值；

4) 更新。为了要卡尔曼滤波器不断的运行下去直到系统过程结束，还要更新第 n 阶段下 θ_n 的协方差矩阵 P_n' ，计算公式为 $P_n' = (1 - k_n H_n) P_n$ 。

2.2. 基于参数更新的动态折扣和库存优化模型

2.2.1. 动态折扣和库存优化模型建立

本文假设需求函数满足指数形式： $q_n = e^{\alpha + \beta \gamma_n + \epsilon}$ [7]，假设期初库存为 I_1 ，由决策者确定，销售期间不考虑补货， n 表示不同阶段， m 表示总的观察阶段数， I_n 表示各阶段的初始库存量，各阶段的期望日销量为 q_n (销售速率)， γ_n 为第 n 阶段折扣系数，各阶段的期望总销量为 Q_n ， p_0 和 c 分别为商家提前计划的初始价格和每件成本， t_n 为各阶段的持续天数， h 为每件每天的库存成本， H_n 为第 n 阶段的总库存成本。模型目标为：1) 销售期末库存为 0；2) 销售期内的总期望收益最大化。

各阶段的收益和各阶段初始库存为：

$$I_{n+1} = I_n - Q_n = I_0 - \sum_1^n Q_n \tag{1}$$

假设需求函数满足以下形式 $q_n = e^{\alpha + \beta \gamma_n + \epsilon}$ ，其中， α, β 为需求参数， ϵ 是系统测量噪声，满足均值 0，方差 σ^2 的正态分布，令 $M = E(e^\epsilon) = e^{\sigma^2/2}$ ，那么各阶段期望总销量为：

$$Q_n = \int_0^{t_n} q_n(t) dt = q_n t_n = e^{\alpha + \beta \gamma_n + \epsilon} t_n = M e^{\alpha + \beta \gamma_n} t_n \tag{2}$$

各阶段总库存成本为：

$$H_n = \int_0^{t_n} I_n(t) h dt = I_n t_n h - \frac{q_n t_n (1 + t_n)}{2} h \tag{3}$$

各阶段销售额函数：

$$F_n = Q_n p_0 \gamma_n = M e^{\alpha + \beta \gamma_n} t_n p_0 \gamma_n \tag{4}$$

那么阶段目标收益函数为：

$$R_n = F_n - H_n - c Q_n = M e^{\alpha + \beta \gamma_n} t_n (p_0 \gamma_n - c) - I_n t_n h + \frac{M e^{\alpha + \beta \gamma_n} t_n (1 + t_n)}{2} h \tag{5}$$

则模型总的目标收益函数为：

$$\begin{aligned} & \max \sum_{n=1}^{n=m} R_n \\ & \text{s.t: } I_{m+1} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

2.2.2. 最优折扣求解

这里采用多阶段的动态规划的方法对参数更新的动态定价模型进行最优折扣优化求解。将模型看成多阶段决策问题：取第 n 阶段初的库存量为状态变量，状态转移方程为 $I_{n+1} = I_n - Q_n$ ，决策变量为折扣系数 γ_n ，阶段收益为 R_n ，若用 $f_n(I_n)$ 表示从状态 I_n 出发，采用最优策略为到第 m 阶段结束时收益最大化，那么就有如下动态规划模型：

$$f_n(I_n) = \max \{R_n + f_{n+1}(I_{n+1})\} \tag{7}$$

$$f_{m+1}(I_{m+1}) = 0, \quad n = m, m-1, \dots, 1 \tag{8}$$

1) 2 阶段模型求解

当 $m = 2$ 时，模型目标为： $\max(E(R_1) + E(R_2))$ ，先验信息 $\theta = (\alpha, \beta)' \sim N(\theta_0, \sigma^2 P_0)$ ，可以通过之前的历史数据得到，根据卡尔曼滤波重新更新得到 θ_1 ，以此类推，首先考虑第 2 阶段，进行 $f_2(I_2)$ 的极值求解：

$$f_2(I_2) = R_2 = Me^{\alpha + \beta \gamma_2} t_2 (p_0 \gamma_2 - c) - I_2 t_2 h + \frac{Me^{\alpha + \beta \gamma_2} t_2 (1 + t_2)}{2} h \tag{9}$$

根据状态转移方程 $I_3 = I_2 - Q_2$ 和 $I_3 = 0$ ，因此可以得到 $Q_2 = I_2 = Me^{\alpha_1 + \beta_1 \gamma_2} t_2$ ，那么第 2 阶段的最优折扣为：

$$\gamma_2^* = \frac{\ln\left(\frac{I_2}{Mt_2}\right) - \alpha_1}{\beta_1} \tag{10}$$

于是可得第 2 阶段的收益：

$$E(R_2^*) = f_2(I_2) = I_2 \left(p_0 \frac{\ln\left(\frac{I_2}{Mt_2}\right) - \alpha_1}{\beta_1} - c \right) - I_2 t_2 h + \frac{I_2 (1 + t_2)}{2} h \tag{11}$$

由于需求估计存在误差，第 2 阶段因参数 α, β 的不确定性而引起的期望损失为 $-\frac{1}{2} \frac{Me^{\alpha_1 - 1}}{\beta_1^3} \sigma_{\beta_1}^2 \sigma_{\alpha_1}^2$ ，当 $n = 1$ 时， γ_1 不仅会影响 $R(\gamma_1)$ ，同时也会影响 β_1 的方差。再考虑第 1 阶段，进行 $f_1(I_1)$ 的极值求解：

$$f_1(I_1) = \max \{R_1 + f_2(I_2)\} \\ = \max \left\{ Me^{\alpha_0 + \beta_0 \gamma_1} t_1 (p_0 \gamma_1 - c) - I_1 t_1 h + \frac{Me^{\alpha_0 + \beta_0 \gamma_1} t_1 (1 + t_1)}{2} h + I_2 \left(p_0 \frac{\ln\left(\frac{I_2}{Mt_2}\right) - \alpha_1}{\beta_1} - c \right) - I_2 t_2 h + \frac{I_2 (1 + t_2)}{2} h \right\} \tag{12}$$

为求极值，对 γ_1 求导，令 $\frac{\partial f_1(I_1)}{\partial \gamma_1} = 0$ ，将 $I_2 = I_1 - Q_1 = I_1 - Me^{\alpha_0 + \beta_0 \gamma_1} t_1$ ，代入 $\frac{\partial f_1(I_1)}{\partial \gamma_1}$ ，求解可得：

$$\gamma_1^* = \frac{\ln\left(\frac{I_1}{M\left(t_2 e^{\beta_0 + \frac{2+t_1-t_2}{2p_0} h \beta_1 - t_2 M} + t_1\right)}\right) - \alpha_0}{\beta_0} \tag{13}$$

2) 多阶段模型求解

当 $m > 2$ 时, 参数更新下的动态规划求解相当困难。但是基于上述动态规划求解过程可以采取一个近似定价策略: 要找到每个阶段的最优折扣 γ_n^* , 就是要下式最大化:

$$E(R_n) = Me^{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}\gamma_n} t_n (p_0 \gamma_n - c) - I_n t_n h + \frac{Me^{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}\gamma_n} t_n (1 + t_n)}{2} h + \frac{1}{2} \frac{Me^{\alpha_{n-1}}}{\beta_n^3} \sigma_{\beta_n}^2 \sigma_{\alpha_n}^2$$

其中 α_{t-1} 和 β_{t-1} 是第 n 阶段开始时的回归系数, 为了防止参数的精确度不高, 加入了因预测不准确性引起的期望损失, 尽管预测的参数可能是真实参数的无偏差估计, 但是由于目标函数是关于参数的非线性函数, 因此 γ_n^* 中可能存在隐含的偏差, 观察公式 10 和 13 的结果, 可以得出各阶段最优折扣可计算为:

$$\gamma_n^* = \frac{\ln \left(\frac{I_n}{M \left(t_{n+1} e^{\frac{\beta_n + 2 + t_n - t_{n+1}}{2 p_0} h \beta_n - t_{n+1} M} + t_n \right)} \right)}{\beta_{n-1}} - \alpha_{n-1} \tag{14}$$

3. 实证分析

3.1. 数据源

本文的研究数据来源为某服装企业的销售数据, 从中选取 6 类主要季节性商品: 羽绒服、短袖 T 恤、短裤、牛仔裤、长袖衬衫、毛衣进行实证分析。

3.2. 预测误差分析

考虑到数据同化技术需要将观测数据输入模型, 本文将选择系统误差最小的同化频率作为销售期内的有效观测时间间隔, 以此作为动态定价的时间间隔依据。其中, 期望预测值与真实值的误差称为系统误差, 这里定义:

$$\text{Error} = (\theta'_n - \theta_n) / \theta_n \tag{15}$$

通过计算各参数的平均误差作为系统平均误差。对 6 类季节性服装进行误差检验, 考虑到商家以周为单位进行预算决策, 且季节性服装的销售期有限, 因此, 同化的频率不宜太小或太大, 这里选择 1~5 周作为同化频率进行估计误差对比, 结果如图 1 所示, 可以发现, 短袖 T 恤和毛衣应选择 1 周为观测频率, 羽绒服和长袖衬衫应选择为 2 周, 短裤和牛仔裤应选择 3 周为宜。

3.3. 最优折扣策略计算

以某季节性服装为例, 进行考虑库存优化的多阶段动态折扣定价策略计算。其中, 初始价格 $p_0 = 140$ 元, 单件成本 $c = 41$ 元, 初始库存 $I_1 = 2230$ 件, 单件每日库存成本 $h = 0.05$ 元, 销售期 $T = 18$ 周, 先验需求函数为 $q_0 = e^{3.55 + 0.989\gamma}$, 系统测量噪声 ϵ 满足均值为 0, 标准差为 0.3 的正态分布, 即

$M = E(e^{\epsilon}) = e^{\sigma^2/2} = 1.046$, 参数更新频率为 3 周, 即 $t_n = 21$ 天, 根据表 1 的各阶段参数的滤波估计值, 计算最优折扣策略, 期望销量和期望收益额(元), 结果如表 2 所示。

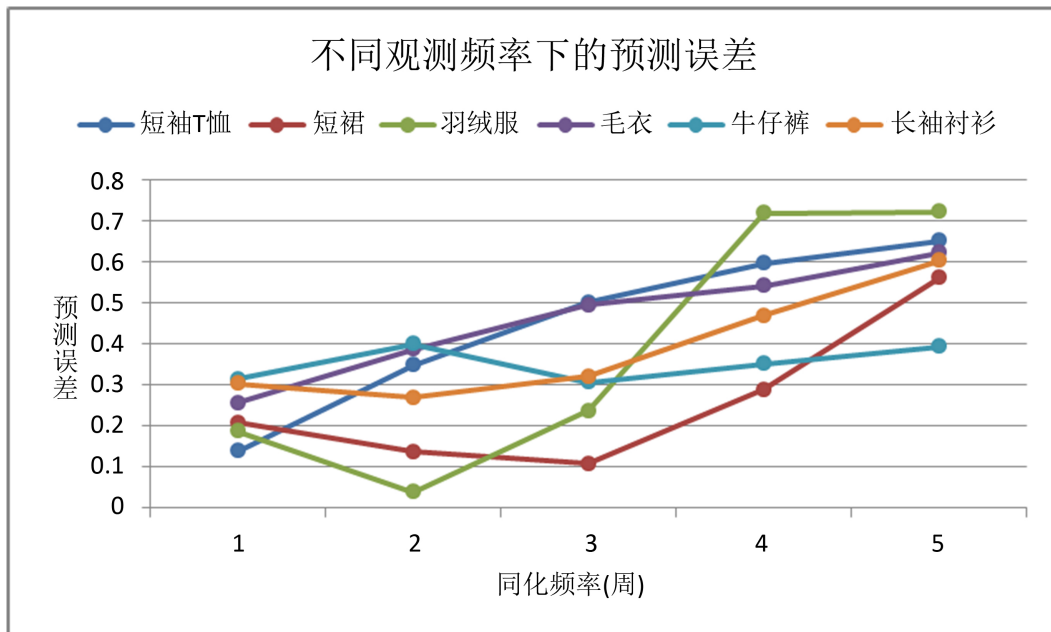


Figure 1. Comparison of prediction errors under different assimilation frequencies
图 1. 不同同化频率下的预测误差对比

Table 1. Filtering estimation value
表 1. 滤波估计值

阶段(周)		1~3	4~6	7~9	10~12	13~15	16~18
滤波估计	a	1.88	1.99	2.05	1.85	0.33	0.28
	b	0.99	1.04	1.33	1.81	0.26	0.41

Table 2. Optimal discount strategy and inventory change in each stage
表 2. 各阶段最优折扣策略及库存量变化

阶段(周)	1~3	4~6	7~9	10~12	13~15	16~18
最优折扣	1	1	1	0.97	0.62	0.44
销售速率(件/天)	18	21	29	37	2	2
各阶段初库存量(件)	2230	1860	1427	811	36	2
期望销量(件)	370	433	616	775	34	33
各阶段期望收益(元)	34,510	41,165	59,841	72,915	1547	712
累计收益(元)	34,510	75,675	135,515	208,430	209,977	210,689

4. 参数灵敏度分析

由式子 19 可以发现, 各阶段的最优折扣决策除了与需求参数相关, 还与各期初始库存量(I_n), 初始价格(p_0), 库存成本(h), 阶段持续时间(t_n)等有关。这里主要对商家主要关注的销售期期初库存(I_1), 初始价格(p_0)进行灵敏度分析, 以探讨各因素对决策模型的影响。其中, 当研究期期初库存量对定价决策的影响时, 保持初始价格 $p_0 = 140$ 元, 当研究初始价格对定价决策的影响时保持期期初库存为 2230 件, 结果如表 3、表 4 所示。

Table 3. Sensitivity analysis of initial inventory
表 3. 对期初库存量(I_1)的灵敏度分析

期初库存量(件)	各阶段折扣策略						总收益	单件收益
	1~3	4~6	7~9	10~12	13~15	16~18		
500	1.00	1.00	1.00	1.00	0.73	0.33	36,975	73.95
1000	1.00	1.00	1.00	1.00	0.89	0.38	74,766	74.77
1500	1.00	1.00	1.00	0.97	0.61	0.40	112,747	75.16
2000	1.00	1.00	1.00	0.78	0.68	0.44	172,221	86.11*
2500	1.00	1.00	0.97	0.62	0.57	0.53	210,689	84.28
3000	1.00	1.00	0.97	0.84	0.79	0.57	237,012	79.00
3500	1.00	0.98	0.89	0.76	0.58	0.58	256,082	73.17
4000	1.00	0.99	0.95	0.81	0.67	0.60	267,245	66.81

Table 4. Sensitivity analysis of initial price
表 4. 对初始价格(p_0)的灵敏度分析

p_0	各阶段折扣策略						总收益	单件收益
	1~3	4~6	7~9	10~12	13~15	16~18		
80	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.56	86970	39
100	1.00	1.00	1.00	1.00	0.85	0.63	128,938.6	57.82
120	1.00	1.00	1.00	0.97	0.90	0.78	172,646.6	77.42
140	1.00	1.00	1.00	0.97	0.62	0.44	210,689	84.28
160	1.00	1.00	0.96	0.84	0.52	0.47	188,412.7	84.49*
180	1.00	0.98	0.90	0.76	0.57	0.45	179,782	80.62
200	1.00	0.98	0.86	0.66	0.45	0.34	166,647.9	74.73

从表 3 可以发现, 当期初库存量逐渐增大时, 开始打折的时机也越来越早, 这与实际的商家打折情况相吻合。从总收益来看, 商家的期初库存越大, 计划销售的量越多, 在理想的环境下(最优时机和折扣力度)进行打折, 销售收益也越来越大, 但是考虑到库存压力和对其他款的竞争压力, 商家需要选择一个最优的计划销售量, 这里考虑了单件的盈利, 如期初库存量在 2000 件时的单位利润最大, 可以作为商家制定销售计划的参考依据。

从表 4 可以发现, 当初始价格逐渐增大时, 开始打折的时机也越来越早。一般来说, 商家制定的初始价格不会低于成本价格的 3 倍, 当初始价格越高时, 打折的空间也会越大, 难度也就越大。从收益来看, 初始价格对总收益的影响没有明显规律, 这与销售进行期间的需求变动和打折策略相关, 但从整体来看, 当期初库存量一定时, 初始价格 $p_0 = 160$ 时的收益最大, 可作为商家制定初始零售价的参考依据。

5. 结论

本文将需求学习应用到服装动态定价领域, 针对需求参数的动态变化, 运用数据同化算法进行参数学习, 建立了动态折扣和库存优化模型, 确定了合适的打折频率和打折幅度, 最后进行实证研究。研究发现本文提出的模型可以在需求不确定性下通过制定合理的折扣, 有效降低商家的库存水平, 为打折促销提供科学的依据, 并通过期初库存量和初始价格的灵敏度分析, 可以找到最优期初库存量和初始价格, 为商家的订货量和初始定价的确定提供有力支持, 提高了对动态系统的控制水平。

参考文献

- [1] Golabi, K. (1985) Optimal Inventory Policies When Ordering Prices Are Random. *Operations Research*, **33**, 575-588. <https://doi.org/10.1287/opre.33.3.575>
- [2] Bitran, G.R. and Mondschein, S.V. (1997) Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing. *Management Science*, **43**, 64-79. <https://doi.org/10.1287/mnsc.43.1.64>
- [3] Besbes, O. and Zeevi, A. (2009) Dynamic Pricing without Knowing the Demand Function: Risk Bounds and Near-Optimal Algorithms. *Operations Research*, **57**, 1407-1420. <https://doi.org/10.1287/opre.1080.0640>
- [4] Araman, V.F. and Caldentey, R. (2009) Dynamic Pricing for Perishable Products with Demand Learning. *Operations Research*, **57**, 1169-1188. <https://doi.org/10.1287/opre.1090.0725>
- [5] Lin, K.Y. (2006) Dynamic Pricing with Real-Time Demand Learning. *European Journal of Operational Research*, **174**, 522-538. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.01.041>
- [6] Huang, C.L. and Xin, L.I. (2006) Experiments of Soil Moisture Data Assimilation System Based on Ensemble Kalman Filter. *Plateau Meteorology*, **112**, 888-900.
- [7] Carvalho, A.X. and Puterman, M.L. (2003) Dynamic Pricing and Reinforcement Learning. *International Joint Conference on Neural Networks*, **4**, 2916-2921. <https://doi.org/10.1109/IJCNN.2003.1224034>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2168-5843, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: ecl@hanspub.org