Finance 金融, 2023, 13(2), 247-261
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/fin
https://doi.org/10.12677/fin.2023.132025

Hans汉斯

考虑风险态度的多期可信性投资组合研究

贺　佳

上海对外经贸大学统计与信息学院，上海

收稿日期：2023年1月3日；录用日期：2023年1月9日；发布日期：2023年3月2日

摘　要

以一致模糊数来刻画资产收益和投资者风险态度，并用可信性下半绝对偏差和条件风险值作为风险度量，考虑偏度约束、不允许卖空约束以及交易成本等因素，建立多期多目标模糊投资组合模型，并将理想点法与遗传算法结合对模型进行求解。文章针对投资者不同风险态度，对所提出的多期均值-***LAD-CVaR***-偏度投资组合模型进行了三次数值求解，通过上海证券交易所真实股票数据验证其可行性和实用性，实证表明投资者采取正确的态度是十分必要的。

关键词

可信性理论，风险态度，多期模糊投资组合

A Study of Multi-Period Plausible Portfolios Considering Risk Attitudes

Jia He

School of Statistics and Information, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai

Received: Jan. 3rd, 2023; accepted: Jan. 9th, 2023; published: Mar. 2nd, 2023

Abstract

The consistent fuzzy numbers are used to characterize asset returns and investors' risk attitudes, and the lower half absolute deviation of plausibility and conditional risk values are used as risk measures. The multi-period multi-objective fuzzy portfolio model is developed by considering the skewness constraint, the no-short-selling constraint and the transaction cost, and the model is solved by combining the ideal point method with the genetic algorithm. The proposed multi-period mean-*LAD*-*CVaR*-skewness portfolio model is solved numerically three times for different risk attitudes of investors, and its feasibility and practicality are verified by real stock data from Shanghai Stock Exchange, and the empirical evidence shows that it is necessary for investors to adopt

文章引用: 贺佳. 考虑风险态度的多期可信性投资组合研究[J]. 金融, 2023, 13(2): 247-261.
DOI: 10.12677/fin.2023.132025

the right attitude.

Keywords

Credibility Theory, Risk Attitude, Multi-Period Fuzzy Portfolio

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

投资组合理论是近年来金融与风险管理领域的热点问题之一。投资者根据自己对资产收益的风险偏好，基于一定的准则选择可供选择用的策略组合。Markowitz [1]于 1952 年提出的均值–方差投资组合优化模型，是现代投资组合理论的开始，随后学者们对其不断深化和拓展，见综述性文章 Kolm 等[2]及近期的研究 Heaton 等[3]、赵磊和朱道立[4]、王舞宇等[5]等。一般情况下，资产收益被视为随机变量，收益率也由历史数据计算。

然而，由于投资环境的复杂性，资产收益的随机变量可能无法准确估计，学者们考虑使用历史信息和主观信念，基于模糊变量来估计资产收益，于是模糊集理论[6]被广泛应用于投资组合领域。模糊投资组合研究中，测度理论分为可能性和可信性两种情况。可能性理论[7]用于模拟资产回报中固有的不确定性，比如：León 等[8]、Huang [9]、Zhang 和 Xiao [10]、Li 等[11]、Yue 和 Wang [12]均基于可能性理论讨论模糊投资组合问题。然而，可能性理论缺乏自对偶性，由 Liu 和 Liu [13]提出的可信性理论，可以克服此限制。由此，姚绍文和张出兰[14]、张鹏和龚荷珊[15]、王灿杰和邓雪[16]均在可信性理论下对不同目标的投资组合决策模型进行研究。

但是，上述研究均只涉及一个投资周期，即资产分配比例与投资期限无关。在现实中，投资者会根据市场环境变化适时调整权重，使投资组合获取更大的收益，因此多期投资得到学者关注，但是求解难度也更大。Li 和 Ng [17]、Mehlawat 和 Kumar [18]、玄海燕等[19]、Bo 等[20]、曾永泉和张鹏[21]构建了多种多期模糊投资组合优化模型，在不同约束条件下展开分析。但是这些研究均没有考虑投资者的风险态度。

股票市场的一个核心特征是投资者之间的风险态度存在差异，这也是交易(即资产的买卖)的主要原因，所以投资者的风险态度需要纳入投资策略选择过程中。学者们采用了不同形式的参数化模糊数刻画资产的收益，以模拟模糊组合选择中投资者的不同预期。比如：Tsaur [22]使用片断线性模糊数来涵盖投资者的风险偏好；Liu 和 Zhang [23]、Jalota 等[24]使用具有功率参考函数的 L-R 模糊数来刻画投资者态度。然而，这些参数化模糊数在表现投资者的预期时会产生一些混乱。因此，Li 和 Yi [25]提出了一致模糊数的概念，将资产收益视为一致模糊数，并使用自适应指数来刻画投资者态度；Gupta 等[26]利用一致模糊数同时模拟资产收益和投资者对股票市场的看法(悲观、乐观或中立)。除了投资者的风险态度之外，实际投资过程中还受到诸多摩擦因素影响，如交易成本、交易量上下界限制等市场因素，所以投资决策应该考虑这些现实约束。Mei 等[27]发现忽视交易成本会导致无效投资，Najafi 和 Pourahmadi [28]的实证研究也得出了同样的结论。

综上，在模糊环境下，已有学者研究了考虑风险态度的投资组合问题，但大部分文献主要是针对单期的情况，如刘家和等[29]、Liu 和 Zhang [30]等，且其中所采用的模糊数在表现风险态度偏好时存在逻辑上的混乱。虽然 Li 和 Yi [25]提出的一致模糊数能解决这一问题，但未能克服可能性理论的缺陷。目前

仅知 Gupta 等[26]在可信性理论下建立考虑风险态度的多期均值-*MASD*-偏度和均值-*CVaR*-偏度模型，但其研究采用ε-约束法，即在多个目标中选择一个作为研究问题的目标，而其余的目标则被视为约束，其实际的目标函数仅为均值最大化。基于可信性理论的多期多目标模糊投资组合问题还有很大探索空间。本文将在考虑交易成本、不允许卖空以及投资比例上下界限的基础上，从可信性理论出发，在 Li 和 Yi [25]及 Gupta 等[26]基础上，将资产收益率视为一致三角模糊变量，同时，以可信性 *LAD*、*CVaR* 和偏度等来度量风险，建立多期多目标模糊投资组合模型，并通过理想点法进行实证分析。

2. 模型和方法

（一）模糊集与可信性理论

设 U 为论域，则 U 上的一个模糊集合 A 可以由一个实值函数

$$\begin{gathered}\mu_A : U \to [0,1] \\ u \mapsto \mu_A(u) \in [0,1], \forall u \in U\end{gathered} \tag{1}$$

来表示。对于 $u \in U$，函数值 $\mu_A(u)$ 称为实数 u 对于模糊集 A 的隶属度，而函数 μ_A 称为 A 的隶属函数。与传统集合不同，模糊集中的每个元素都有对应的隶属度(membership degree)。隶属度是指一个元素属于这个集合的确定度(或不确定度)。

定义 1 [13]：设 ξ 为一个模糊变量，μ 为其隶属函数，而 u 是一个实数，则 ξ 的可能性、必要性和可信性测度分别定义如下：

$$Pos\{\xi \le u\} = \sup_{x \le u} \mu(x), \tag{2}$$

$$Nec\{\xi \le u\} = 1 - Pos\{\xi > u\} = 1 - \sup_{x > u} \mu(x) \tag{3}$$

$$Cr\{\xi \le u\} = \frac{1}{2}\left(Pos\{\xi \le u\} + Nec\{\xi \le u\}\right) = 1 - Pos\{\xi > u\} \tag{4}$$

这里，$Pos\{\xi \le u\}$ 和 $Nec\{\xi \le u\}$ 为一对对偶模糊测度，$Cr\{\xi \le u\}$ 为自对偶，即

$$Cr\{\xi \le u\} + Cr\{\xi > u\} = 1 \tag{5}$$

定义 2 [31]：模糊变量 ξ 是从可信性空间 (Θ, P, Cr) 到实数集 R 的映射，其可信性函数 $\mu_A(x)$ 定义如下：

$$\mu_A(x) = Cr(\xi = x),\ \forall x \in R \tag{6}$$

对于任意的 $x \in R$，若 $\mu_A(x)$ 满足如下形式

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a + \alpha}{2\alpha},\ a - \alpha \le x \le a \\ \dfrac{a + \beta - x}{2\beta},\ a \le x \le a + \beta \\ 0, \qquad \text{else} \end{cases} \tag{7}$$

则称 $\xi = (a - \alpha, a,\ a + b)$ 为可信性空间中的三角模糊数。其中 a 为模糊数中心值，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ 分别为左右宽度。

特别的，Li 和 Yi [27]提出一致性梯形模糊数的概念，通过引入自适应指数 k 来表现投资者风险态度。借鉴 Li 和 Yi [25]，Gupta 等[26]提出了一种新的三角模糊数的可信性函数，并验证了的可信性理论下的一致三角模糊数能够更加准确的反映投资者的态度。Gupta 等[26]将资产收益率视为一致三角模糊变量 $\xi_k = (a - \alpha, a, a + b)_k$ 定义如下：

定义 3 [27]：设 ξ_k 为可信性空间上的一致三角模糊变量，其隶属函数为：

$$\mu_k(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{x-a+\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}, & a-\alpha\le x\le a\\ \frac{1}{2}\left(\frac{a+\beta-x}{\beta}\right)^{k}, & a\le x\le a+\beta\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{8}$$

其中 $k\in R$，且 $k>0$。如果 $k=1$，则一致三角模糊数就变化为通常的三角模糊数，此时投资者的风险态度为中立。$K>1$ 可以看作是投资者悲观预期的标志。$k(>1)$越大，意味着投资者越悲观。反之，$k<1$ 则表明投资者的乐观。

（二）模糊变量的可信性测度

引理 1 [31]：设 ξ 和 η 是一对相互独立的三角模糊数，其中 $\xi=(a_1,a_2,a_3)$，$\eta=(b_1,b_2,b_3)$，其和 $\xi+\eta$ 也是一个三角模糊数，λ 是一个实数，有：

$$\xi+\eta=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \tag{9}$$

$$\lambda\cdot\xi=\begin{cases}(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3),\text{若}\lambda\ge 0\\ (\lambda a_3,\lambda a_2,\lambda a_1),\text{若}\lambda<0\end{cases} \tag{10}$$

设 ξ 为一个模糊变量，并存在有限期望，其均值[11]、偏度[11]以及可信性条件在险值 $CVaR$ [32]可以定义如下：

$$E[\xi]=\int_0^{\infty}Cr\{\xi\ge r\}\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^{0}Cr\{\xi\le r\}\mathrm{d}r \tag{11}$$

期望存在的条件是等式右边两个积分中至少有一个是有限的。

$$Skew[\xi]=E\left[\left(\xi-E[\xi]\right)^3\right]=\int_0^{\infty}Cr\left\{\left(\xi-E[\xi]\right)^3\ge r\right\}\mathrm{d}r \tag{12}$$

$$CVaR_p[\xi]=\min_x\left\{x+\frac{1}{1-p}E(\xi-x)^+\right\} \tag{13}$$

其中置信水平 $0<p<1$，$(\xi-x)^+=\max\{\xi-x,0\}$；

引理 2 [31]：设 ξ、η 是一个模糊变量，a、b 为实数，则

$$E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta] \tag{14}$$

引理 3 [11]：设 ξ 是一个模糊变量，λ 是一个实数，则

$$Skew[\lambda+\xi]=Skew[\xi] \tag{15}$$

特别的，根据 Gupta 等[26]，对于一致三角模糊变量 $\xi_k=(a-\alpha,a,\ a+b)_k$，有可信性均值、条件在险值($CVaR$)以及偏度如下：

$$E[\xi_k]=a+\frac{\beta-k\alpha}{2(k+1)} \tag{16}$$

$$CVaR_p[\xi_k]=\begin{cases}a+\frac{2p\alpha\left(1-(2p)^k\right)+k\alpha(2p-1)+\beta}{2(1+k)(1-p)}, & \text{若}0<p<0.5\\ a+\beta-\frac{k\beta\left(2(1-p)\right)^{\frac{1}{k}}}{k+1}, & \text{若}0.5\le p\le 1\end{cases} \tag{17}$$

$$Skew\left[\xi_k\right]=\frac{k\left[-5k^5\alpha^3+5\beta^3+k^4\alpha A_1+k^3B_1+k^2C_1+k\beta D_1\right]}{4(1+k)^3(2+k)(3+k)(1+2k)(1+3k)}$$

其中，$A_1=-32\alpha^2-9\alpha\beta+18\beta^2$，$B_1=-65\alpha^3-48\alpha^2\beta+69\alpha\beta^2+42\beta^3$，(18)

$C_1=-42\alpha^3-69\alpha^2\beta+48\alpha\beta^2+65\beta$，$D_1=-18\alpha^2+9\alpha\beta+32\beta^2$

当 $k=1$ 时，有

$$E[\xi]=a+\frac{\beta-\alpha}{4} \tag{19}$$

$$CVaR_p[\xi]=\begin{cases}a+\dfrac{\beta-\alpha(1-2p)^2}{4(1-p)}, & 若0<p<0.5\\ a+p\beta, & 若0.5\le p\le 1\end{cases} \tag{20}$$

$$Skew[\xi]=\frac{(\alpha+\beta)^2(\beta-\alpha)}{32} \tag{21}$$

（三）可信性下半绝对偏差

根据 Liu 等[30]对于下半绝对偏差(LAD)的定义，有：

$$LAD[\xi]=E\left[\left|\left(\xi-E[\xi]\right)^-\right|\right]=\int_0^{\infty}Cr\left\{\left(\xi-E[\xi]\right)^-\ge r\right\}\mathrm{d}r \tag{22}$$

其中 $\left(\xi-E[\xi]\right)^-=\begin{cases}\xi-E[\xi], & \xi\le E[\xi]\\ 0, & \xi>E[\xi]\end{cases}$。

参考张鹏和龚荷珊[15]对半方差的推导方法，一致模糊变量 $\xi_k=(a-\alpha,a,a+b)_k$ 的可信性下半绝对偏差(LAD)为：

$$LAD[\xi_k]=\begin{cases}\dfrac{k\alpha}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{\beta-k\alpha}{2\alpha(k+1)}\right)^{\frac{k+1}{k}}, & 若k\alpha\ge\beta\\ \dfrac{\beta}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{k\alpha-\beta}{2\beta(k+1)}\right)^{k+1}, & 若k\alpha<\beta\end{cases} \tag{23}$$

证明：

$$LAD[\xi_k]=E\left[\left|\left(\xi_k-E[\xi_k]\right)^-\right|\right]=\int_0^{+\infty}Cr\left\{\left|\left(\xi_k-E[\xi_k]\right)^-\right|\ge r\right\}\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}Cr\left\{E[\xi_k]-\xi_k\ge r\right\}\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}Cr\left\{\xi_k\le e-r\right\}\mathrm{d}r$$

其中，$e=a+\dfrac{\beta-k\alpha}{2(k+1)}$。

此时

$$Cr\{\xi_k\le e-x\}=\begin{cases}0, & x>\dfrac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2(k+1)}\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2\alpha(k+1)}-\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}, & \dfrac{-k\alpha+\beta}{2(k+1)}\le x\le\dfrac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2(k+1)}\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\beta}+\dfrac{2k\beta+\beta+k\alpha}{2\beta(k+1)}\right)^k, & 0\le x\le\dfrac{-k\alpha+\beta}{2(k+1)}\\ 1, & x\le 0\end{cases}$$

则当 $k\alpha>\beta$时，有

$$LAD[\xi_k]=\int_0^{\frac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2(k+1)}}\frac{1}{2}\left(\frac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2\alpha(k+1)}-\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\mathrm{d}r+0$$

$$=\frac{k\alpha}{2(k+1)}\left(\frac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2\alpha(k+1)}\right)^{\frac{1}{k}+1}$$

当 $k\alpha<\beta$时，有

$$LAD[\xi_k]=\int_{\frac{-k\alpha+\beta}{2(k+1)}}^{\frac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2(k+1)}}\frac{1}{2}\left(\frac{\beta+k\alpha+2\alpha}{2\alpha(k+1)}-\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}dr$$

$$+\int_0^{\frac{-k\alpha+\beta}{2(k+1)}}1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\beta}+\frac{2k\beta+\beta+k\alpha}{2\beta(k+1)}\right)^{k}dr$$

$$=\frac{k\alpha}{2(k+1)}+\frac{\beta-k\alpha}{2(k+1)}-\frac{\beta}{2(k+1)}$$

$$+\frac{\beta}{2(k+1)}\left(\frac{2k\beta+\beta+k\alpha}{2\beta(k+1)}\right)^{k+1}$$

$$=\frac{\beta}{2(k+1)}\left(1+\frac{k\alpha-\beta}{2\beta(k+1)}\right)^{k+1}$$

即：

$$LAD[\xi_k]=\begin{cases}\dfrac{k\alpha}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{\beta-k\alpha}{2\alpha(k+1)}\right)^{\frac{k+1}{k}}，若k\alpha\ge\beta\\ \dfrac{\beta}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{k\alpha-\beta}{2\beta(k+1)}\right)^{k+1}，若k\alpha<\beta\end{cases}$$

证明完毕。

当 $k=1$ 时，有：

$$LAD[\xi]=\begin{cases}\dfrac{(\beta+3\alpha)^3}{64\alpha}，若\alpha\ge\beta\\ \dfrac{(3\beta+\alpha)^3}{64\beta}，若\alpha<\beta\end{cases}\tag{24}$$

该结果与 Liu 等[30]一致。

3. 可信性理论下多期多目标模糊投资组合模型构建与求解

（一）模型构建

假设投资者希望在 n 个资产中分配可用的资本，投资范围包括 T 个时期。投资者在每期结束时，根据可获得的资本等更新信息来调整下一期的投资组合(投资组合再平衡)。第 $i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 个资产在 $t\left(t=1,2,\cdots,T\right)$ 时期的收益率用一个连贯的三角模糊数 $\xi_{it,k}=\left(a_{it}-\alpha_{it},\ a_{it},a_{it}+b_{it}\right)_k$ 表示。一致三角模糊数的适应性指数 k 用来模拟投资者对股票市场的看法(其中 $k<1$ 表示乐观，$k>1$ 表示悲观，$k=1$ 为中性)。

如果 x_{it} 是在 t 时期对资产 i 的投资比例，可以得到多期资产投资组合收益率为 $\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_{it}a_{it} - \sum_{i=1}^{n} x_{it}\alpha_{it}, \sum_{i=1}^{n} x_{it}a_{it}, \sum_{i=1}^{n} x_{it}a_{it} + \sum_{i=1}^{n} x_{it}\beta_{it}\right)_k$。

1) 总交易成本

在多期投资过程中，不同投资之间资产的买卖会产生交易费用 c_{it}，假设总交易成本为：

$$\sum_{i=1}^{n} c_{it}\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right| \tag{25}$$

其中，$x_{i0} = 0,\ \forall i = 1,2,\cdots,n,\ t = 1,2,\cdots,T$。

2) 终期财富值

假定 W_t 表示 t 时期末的财富值，则有：

$$W_t = W_{t-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_{it} + \left(\beta_{it} - \alpha_{it}\right)}{4}\right]x_{it} - \sum_{i=1}^{n} c_{it}\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right|\right) \tag{26}$$

基于此，本文研究的目标之一是最大化终期财富值 W，即：

$$\max W\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it}\right] = W_0\prod_{t=1}^{T}\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_{it} + \left(\beta_{it} - \alpha_{it}\right)}{4}\right]x_{it} - \sum_{i=1}^{n} c_{it}\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right|\right) \tag{27}$$

特别的，在考虑投资者的风险态度时，含指数 k 的最大化终期财富值目标函数如下：

$$\max W\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] = W_0\prod_{t=1}^{T}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_{it}x_{it} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{it}x_{it} - k\sum_{i=1}^{n}\alpha_{it}x_{it}}{2(k+1)} - \sum_{i=1}^{n} c_{it}\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right|\right) \tag{28}$$

其中，$x_{i0} = 0,\ \forall i = 1,2,\cdots,n,\ t = 1,2,\cdots,T$。

3) 多期多目标优化模型

假设所有资产全部用于投资，考虑可信性均值和终期财富值最大化、可信性 *LAD* 和 *CVaR* 最小化这四个目标函数，在约束条件中引入偏度约束以增加正收益概率，同时加入投资比例上下界约束来达到不允许卖空和分散风险的目的，构建优化模型如下：

$$\begin{aligned}
&\max E\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&\min LAD\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&\min\left|CVaR\left[-\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]\right| \\
&\max W\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&s.t.\begin{cases} Skew\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{it} = 1 \\ l_{it} \le x_{it} \le u_{it} \\ \forall i = 1,2,\cdots,n, t = 1,2,\cdots,T \end{cases}
\end{aligned} \tag{29}$$

其中多期可信性均值、*LAD*、*CVaR* 以及偏度的具体表达式见附录 1。与 Gupta 等[26]相比，本文直接将偏度作为约束条件，并将可信性下半绝对偏差 *LAD* 作为风险测度，由此建立均值-*LAD*-*CVaR*-偏度模型。

（二）模型求解

多目标优化问题求解的主要方法是利用线性加权法将其转化为单目标优化问题。考虑到线性加权法可能存在权重约束失效，本文利用理想点法[33]的方法进行转换，理想点法的基本思想是对于多目标规划问题：

$$\begin{aligned}
&\max f_1 = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&\min f_2 = LAD\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&\min f_3 = \left|CVaR\left[-\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]\right| \\
&\max f_4 = W\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] \\
&s.t. x \in X
\end{aligned} \tag{30}$$

先分别求出各个分目标函数的最优值，将这些最优值构成的点称为理想点，然后根据实际点与理想点之间的距离构造评价函数和单目标优化问题：

$$\begin{cases}
\min\left(\dfrac{f_1 - f_{1,\max}}{f_{1,\max}}\right)^2 + \left(\dfrac{f_2 - f_{2,\min}}{f_{2,\min}}\right)^2 + \left(\dfrac{f_3 - f_{3,\min}}{f_{3,\min}}\right)^2 + \left(\dfrac{f_4 - f_{4,\max}}{f_{4,\max}}\right)^2 \\
s.t.\ Skew\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right] > 0, \sum_{i=1}^{n} x_{it} = 1, l_{it} \le x_{it} \le u_{it}, \forall i = 1,2,\cdots,n, t = 1,2,\cdots,T
\end{cases} \tag{31}$$

即在多目标规划的可行域内，尽可能的“逼近”理想点。

进一步的，针对动态单目标规划问题(31)，我们将采用遗传算法[34]求解。

4. 实证研究

（一）数据来源

从上海证券交易所选取 10 支股票作为研究样本，分别是平安银行(000001)，世纪星源(000005)，中国宝安(000009)，美丽生态(000010)，南玻 A (000012)，深科技(000021)，深圳能源(000027)，华联控股(000036)，华侨城 A (000069)，美的集团(000333)。数据选取的时间区间为 2016-01-01 至 2021-12-31 期间内所有正常开盘时间的日交易数据(数据收集自同花顺软件)，获得各股票 1472 个收盘价数据。

（二）股票模糊收益率测算

假设投资者打算在连续 3 个投资周期的时间范围内，在 10 个资产中分配他的财富，依据前文假设，所选取的 10 支股票的收益率是三角模糊数，记为 $\xi_{it,k} = \left(a_{it} - a_{it}, a_{it}, a_{it} + b_{it}\right)_k$，$\alpha_{it}$ 代表模糊数的左宽度，β_{it} 代表右宽度，a_{it} 代表三角模糊数量化后的中心值。通过搜集到的日收盘价数据计算对数收益率，以 2 年为一个计算周期，使用 Gupta 等[28]采用的频数统计法对数据进行量化处理，得到每支股票的三角模糊收益率中的 α_{it}，β_{it} 和 a_{it}，其中 $i = 1,2,\cdots,10$，$t = 1,2,3$，各支股票的模糊收益率(%)如表 1 所示。

Table 1. Fuzzy return rate of stock (%)
表 1. 股票模糊收益率(%)

股票名称	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
平安银行	(−4.4323, 0.0087, 5.7499)	(−4.2310, 0.0856, 4.4862)	(−4.1494, 0.0722, 4.8834)
世纪星源	(−5.8325, 0.0495, 5.3032)	(−4.4235, 0.0719, 5.8466)	(−4.4237, 0.1118, 4.7076)
中国宝安	(−5.0958, 0.0144, 5.9056)	(−4.9562, 0.0459, 5.4703)	(−6.5369, −0.0627, 4.9978)
美丽生态	(−5.6187, −0.0458, 4.8887)	(−2.5140, 0.1161, 7.4460)	(−4.2444, 0.1834, 5.8769)
南玻 A	(−4.6885, 0.0420, 5.2088)	(−5.3018, −0.1141, 4.3781)	(−4.7214, 0.4773, 5.6761)
深科技	(−.6485, 0.0194, 5.2482)	(−5.1414, 0.0772, 5.4211)	(−5.0586, 0.1906, 5.6529)
深圳能源	(−4.1680, 0.0342, 5.4249)	(−4.1547, −0.1158, 4.8613)	(−4.6207, 0.1915, 6.2038)
华联控股	(−4.9016, 0.0869, 5.2324)	(−5.8542, −0.1282, 4.4498)	(−4.4216, 0.1093, 5.8549)
华侨城 A	(−4.2759, 0.0688, 4.5596)	(−4.8031, −0.0439, 4.3305)	(−4.0800, 0.0922, 5.4484)
美的集团	(−4.1763, 0.0288, 6.4591)	(−4.1476, 0.0526, 4.6077)	(−3.9364, −0.1136, 4.6310)

(三) 总交易成本及终值财富

假设投资者初始投资资金为 10,000 元，即 $W_0 = 10{,}000$，单位交易成本 $c_{it} = 0.03\%$，则多期模糊投资组合的交易成本为 $C_{it} = \sum_{i=1}^{10} 0.0003\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right|$，$t = 1,2,3$。

于是，终期财富值如下：

$$W = W_0 \prod_{t=1}^{3}\left(1 + \sum_{i=1}^{10} a_{it}x_{it} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{it}x_{it} - k\sum_{i=1}^{n}\alpha_{it}x_{it}}{2(k+1)} - \sum_{i=1}^{10} 0.0003\left|x_{it} - x_{i,t-1}\right|\right) \tag{32}$$

(四) 其他参数设置

由于我国金融市场不允许卖空行为存在，故投资比例下限取为 0。同时，投资的资产数越多，投资者面临的风险更低，因此，本文将考虑不同资产投资比例上限的情况，对资产投资比例上限 u_{it} 取 0.3、0.5、0.8 以及 1 这四种情况进行对比分析，同时，假设 $CVaR$ 的置信水平 p 为 0.95。

进一步的，针对本文研究目的，对投资者风险态度的参数 k 分别取值 0.5 (风险追求)、1 (风险中性)以及 1.5 (风险规避)。在求解模型所采用的遗传算法中，具体参数设置为：目标值为 9，种群规模为 1000，交叉概率为 0.7，变异概率为 0.3。从线性代数的角度来说，采用这样的处理方式，会使得在程序上更容易得到运行。交叉概率设置为 70%，即一边是 70%，另一边是 30%，两边的基因都得到了较好的保留。

(五) 多期多目标投资组合策略

基于可信性理论构造多期均值-LAD-$CVaR$-偏度模糊投资组合模型，运用 Python 编程计算风险追求型、风险规避型和风险中性型 3 类投资者在投资期末的风险值(LAD, $CVaR$)以及收益值(E, W)，见表 2。在投资比例上界约束分别取 0.3、0.5、0.8 以及 1 时，所得到的不同态度下多期投资权重见附录 2。

通过对模型(32)进行实证分析，可以发现：

1) 增加投资比例上限(u_{it})约束可以达到分散风险的目标。分析附录 2 中附表 1~4 可以看出：随着投资比例上界 u_{it} 的递增，投资者所采用的投资策略不同。在每个投资周期，不仅投资者实际投资的资产数量会递减，其比例大小值也会逐渐失衡。参考表 2，当 $k = 1$，即投资者态度为风险中性时，无论是收益(E 和 W)还是风险(LAD、$CVaR$)，其数值大小均随着投资比例上界 u_{it} 的增大而增大，这就意味着在追求

Table 2. Comparison of multi-period investment results under different attitudes (upper bound constraints of different investment ratios)
表 2. 不同态度下多期投资结果的对比(不同投资比例上界约束)

	u_{it}	$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 1.5$		
		t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3	t = 1	t = 2	t = 3
均值	0.3	0.0114	0.0135	0.0123	0.0038	0.0049	0.0045	−0.0011	−0.0034	−0.0004
	0.5	0.0112	0.0133	0.0122	0.0043	0.0059	0.0045	−0.0005	0.0008	−0.0004
	0.8	0.0111	0.0132	0.0122	0.0047	0.0064	0.0045	0.0001	0.0019	−0.0004
	1	0.0111	0.0131	0.0121	0.0049	0.0065	0.0045	0.0005	0.0024	−0.0004
LAD	0.3	0.0129	0.0128	0.0127	0.0125	0.0123	0.0126	0.0083	0.0081	0.0085
	0.5	0.0127	0.0127	0.0126	0.0126	0.0125	0.0126	0.0081	0.0083	0.0085
	0.8	0.0127	0.0127	0.0126	0.0128	0.0125	0.0127	0.0083	0.0080	0.0084
	1	0.0127	0.0126	0.0125	0.0129	0.0126	0.0125	0.0127	0.0117	0.0084
CVaR	0.3	0.0548	0.0560	0.0554	0.0552	0.0561	0.0555	0.0506	0.0507	0.0475
	0.5	0.0543	0.0559	0.0551	0.0564	0.0573	0.0555	0.0517	0.0520	0.0507
	0.8	0.0543	0.0557	0.0550	0.0585	0.0589	0.0555	0.0544	0.0543	0.0511
	1	0.0543	0.0556	0.0549	0.0585	0.0591	0.0556	0.0562	0.0558	0.0514
财富值	0.3	10111.2	10240.2	10362.4	10035.3	10080.2	10121.9	9985.5	9947.6	9939.7
	0.5	10109.0	10239.0	10359.1	10040.2	10093.9	10136.8	9991.6	9994.4	9987.3
	0.8	10108.9	10236.6	10356.4	10044.5	10103.2	10143.9	9998.1	10012.0	10006.2
	1	10108.0	10235.3	10354.2	10046.7	10106.2	10148.6	10002.2	10020.7	10015.5

收益最大化的同时，投资者的投资范围也会更加集中，所面临的风险也将增大。

2) 投资者的风险态度会影响其收益和风险。在投资比例上限约束相同的情况下，不同风险态度的投资者可能获得的收益和面临的风险也不同。当 k 值分别取 0.5、1 和 1.5 时，在投资比例上限约束 $u_{it} = 0.3$ 的情况下，期望值 E 在每一个投资周期均随 k 值的增大而减小，3 种风险态度下所获得的终期财富值分别为 10362.4 > 10121.9 > 9939.7 (元)，风险测度 *LAD* 值为 0.0127 > 0.0126 > 0.0085，*CVaR* 值分别为 0.0554、0.0555、0.0475。也就是说，风险偏好型投资者渴望进行具有挑战性的投资，这就意味着高风险高回报并存；风险规避型投资者倾向于低风险，其收益最低；风险中性型投资者倾向于客观看待，既不悲观，也不乐观。

在以上实证分析中，模型(32)的最优解分布符合常规投资组合结果的情况，所建模型在不同时期之间都在追求期末财富值比上一期要高的目标。同时，对于不同风险态度的投资者，若投资者对风险的容忍度越大，即承受最大的风险，其所获得的终期财富值越大；而风险规避者虽然获得的终期财富值最小，但是其稳定性最佳，风险最小，这与现实的投资环境中风险与收益不能同时兼备的事实相符。从上述实证结果可以表明该模型在中国证券市场下具有实用性和有效性。

5. 结论

本文在可信性理论下，基于下半绝对偏差(*LAD*)和条件在险值(*CVaR*)进行风险的度量，引入偏度约束来增加正收益概率，同时考虑交易成本和投资比例上下界约束，研究考虑投资者风险态度的多期多目标模糊投资组合问题，利用上海证券交易所股票市场数据进行实证分析。与已有文献相比，本文创新点在

于：对一致性三角模糊变量的可信性下半绝对偏差(*LAD*)进行推导计算，在可信性理论下，建立考虑投资者风险态度的多期均值-*LAD*-*CVaR*-偏度模糊投资组合模型，并通过理想点法进行模型求解。实证结果表明：持有不同风险态度的投资者在投资周期结束之后所获得投资权重、收益和风险值均不同，对风险容忍度越高的投资者获得的终期收益越大，同时也兼具最大的不稳定性。

参考文献

[1] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] Kolm, P.N., Tutuncu, R. and Fabozzi, F.J. (2014) 60 Years of Portfolio Optimization: Practical Challenges and Current Trends. *European Journal of Operational Research*, **234**, 356-371. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060

[3] Heaton, J.B., Polson, N. and Witte, J. (2016) Deep Learning for Finance: Deep Portfolios. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **33**, 3-12. https://doi.org/10.1002/asmb.2209

[4] 赵磊, 朱道立. 基数约束投资组合选择问题[J]. 系统管理学报, 2021, 30(2): 344-352.

[5] 王舞宇, 章宁, 范丹, 等. 基于动态交易和风险约束的智能投资组合优化[J]. 中央财经大学学报, 2021(9): 32-47.

[6] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[7] Zadeh, L.A. (1978) Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28. https://doi.org/10.1016/0165-0114(78)90029-5

[8] León, T., Liem, V. and Vercher, E. (2002) Viability of Infeasible Portfolio Selection Problems: A Fuzzy Approach. *European Journal of Operational Research*, **139**, 178-189. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00175-8

[9] Huang, X. (2008) Mean-Semivariance Models for Fuzzy Portfolio Selection. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **217**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.06.009

[10] Zhang, W.G. and Xiao, W.L. (2009) On Weighted Lower and Upper Possibilistic Means and Variances of Fuzzy Numbers and Its Application in Decision. *Knowledge and Information Systems*, **18**, 311-330. https://doi.org/10.1007/s10115-008-0133-7

[11] Li, X., Qin, Z. and Kar, S. (2010) Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Returns. *European Journal of Operational Research*, **202**, 239-247. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.003

[12] Yue, W. and Wang, Y. (2017) A New Fuzzy Multi-Objective Higher Order Moment Portfolio Selection Model for Diversified Portfolios. *Physical*: *Statal Mechanics and Its Applications*, **465**, 124-140. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.08.009

[13] Liu, B. and Liu, Y.K. (2002) Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **10**, 445-450. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2002.800692

[14] 姚绍文, 张出兰. 模糊环境下基于可信性安全准则的投资组合模型[J]. 统计与决策, 2008(21): 23-25.

[15] 张鹏, 龚荷珊. 可调整的均值-半方差可信性投资组合绩效评价[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(1): 144-157.

[16] 王灿杰, 邓雪. 基于可信性理论的均值-熵-偏度投资组合模型及其算法求解[J]. 运筹与管理, 2019, 28(2): 154-159, 192.

[17] Li, D. and Ng, W.L. (2000) Optimal Dynamic Portfolio Selection: Multiperiod Mean-Variance Formulation. *Mathematical Finance*, **10**, 387-406. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00100

[18] Mehlawat, K.M. (2016) Credibilistic Mean-Entropy Models for Multi-Period Portfolio Selection with Multi-Choice Aspiration Levels. *Information Sciences*: *An International Journal*, **345**, 9-26. https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.01.042

[19] 玄海燕, 李玥, 张玉春, 等. 兼容移动市场下的多期模糊投资组合优化模型[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2017, 34(5): 128-133.

[20] Bo, L., Zhu, Y., Sun, Y., *et al*. (2018) Multi-Period Portfolio Selection Problem under Uncertain Environment with Bankruptcy Constraint. *Applied Mathematical Modelling*, **56**, 539-550. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.12.016

[21] 曾永泉, 张鹏. 限制卖空的不确定多阶段均值-绝对偏差投资组合决策[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(3): 59-70.

[22] Tsaur, R. (2013) Fuzzy Portfolio Model with Different Investor Risk Attitudes. *European Journal of Operational Research*, **227**, 385-390. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.036

[23] Liu, Y.J. and Zhang, W.G. (2018) Fuzzy Portfolio Selection Model with Real Features and Different Decision Behaviors. *Fuzzy Optimization & Decision Making*, **17**, 317-336. https://doi.org/10.1007/s10700-017-9274-z

[24] Jalota, H., Thakur, M. and Mittal, G. (2017) Modelling and Constructing Membership Function for Uncertain Portfolio Parameters: A Credibilistic Framework. *Expert Systems with Applications*, **71**, 40-56. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.11.014

[25] Li, H.Q. and Yi, Z.H. (2019) Portfolio Selection with Coherent Investor's Expectations under Uncertainty. *Expert Systems with Application*, **133**, 49-58. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.05.008

[26] Gupta, P., Mehlawat, M.K. and Khan, A.Z. (2021) Multi-Period Portfolio Optimization Using Coherent Fuzzy Numbers in a Credibilistic Environment. *Expert Systems with Applications*, **167**, 114-135. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.114135

[27] Mei, X.L., DeMiguel, V. and Nogales, F.J. (2016) Multiperiod Portfolio Optimization with Multiple Risky Assets and Generaltransaction Costs. *Journal of Banking & Finance*, **69**, 108-120. https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2016.04.002

[28] Najafi, A.A. and Pourahmadi, Z. (2016) An Efficient Heuristic Method for Dynamic Portfolio Selection Problem under Transaction Costs and Uncertain Conditions. *Physica A*, **448**, 154-162. https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.048

[29] 刘家和, 金秀, 苑莹. 考虑投资者风险态度的随机模糊投资组合模型及实证[J]. 运筹与管理, 2016, 25(1): 166-174.

[30] Liu, Y.J., Zhang, W.G. and Zhang, Q. (2016) Credibilistic Multi-Period Portfolio Optimization Model with Bankruptcy Control and Affine Recourse. *Applied Soft Computing*, **38**, 890-906. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.09.023

[31] Li, X. (2013) Credibilistic Programming. An Introduction to Models and Applications. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-36376-4

[32] Liu, N., Chen, Y. and Liu, Y. (2018) Optimizing Portfolio Selection Problems under Credibilisticcvar Criterion. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **34**, 335-347. https://doi.org/10.3233/JIFS-171298

[33] 王中兴, 卢余刚. 基于模糊熵和模糊夏普比率的多阶段投资组合模型及实证[J]. 广西大学学报: 自然科学版, 2019, 44(6): 1814-1821.

[34] Holland, J.H. (1992) Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge. https://doi.org/10.7551/mitpress/1090.001.0001

附　录 1

第三章第(一)节多期多目标模糊投资组合模型构建中，基于一致三角模糊数构建的可信性测度的表达式如下：

1) $\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}$ 的可信性期望收益(E)为：

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]=\sum_{i=1}^{n} a_{it}x_{it}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{it}x_{it}-k\sum_{i=1}^{n}\alpha_{it}x_{it}}{2(k+1)}$$

2) $\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}$ 的可信性下半绝对偏差(LAD)为：

$$LAD\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]=\begin{cases}\dfrac{k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}-k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}}{2\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}(k+1)}\right)^{\frac{k+1}{k}}, & 若k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}\geq\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}\\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}}{2(k+1)}\left(1+\dfrac{k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}-\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}}{2\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}(k+1)}\right)^{k+1}, & 若k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}<\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}\end{cases}$$

3) $\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}$ 的可信性偏度($Skew$)的表达式分别为：

$$Skew\left[\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]=\frac{k\left[-5k^5\phi^3+5\varphi^3+k^4\phi A_2+k^3B_2+k^2C_2+k\varphi D_2\right]}{4(1+k)^3(2+k)(3+k)(1+2k)(1+3k)}$$

其中，$A_2=-32\phi^2-9\phi\varphi+18\varphi^2$

$$B_2=-65\phi^3-48\phi^2\varphi+69\phi\varphi^2+42\varphi^3$$

$$C_2=-42\phi^3-69\phi^2\varphi+48\phi\varphi^2+65\varphi$$

$$D_2=-18\phi^2+9\phi\varphi+32\varphi^2$$

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it},\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}$$

4) $\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}$ 的可信性条件在险值($CVaR$)的表达式为：

$$CVaR\left[-\sum_{i=1}^{n} x_{it}\xi_{it,k}\right]=\begin{cases}-\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}-\dfrac{2p\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}\left(1-(2p)^k\right)+k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}(2p-1)+\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}}{2(1+k)(1-p)}, & 若0<p<0.5\\ -\sum_{i=1}^{n}x_{it}\alpha_{it}-\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}-\dfrac{k\sum_{i=1}^{n}x_{it}\beta_{it}\left(2(1-p)\right)^{\frac{1}{k}}}{k+1}, & 若0.5\leq p\leq 1\end{cases}$$

附　录 2

第四章第(五)节多期多目标投资组合策略中，对资产投资比例上限 u_{it} 取 0.3、0.5、0.8 以及 1 时，可得不同态度下多期投资权重如下：

Table S1. Multi-period investment weight under different attitudes (upper limit of investment ratio $u_{it} = 0.3$)
附表 1. 不同态度下多期投资权重(投资比例上限 $u_{it} = 0.3$)

	$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 1.5$		
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
x_1	0.102	0.142	0	0.3	0.3	0	0.3	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0.259	0
x_3	0	0	0	0.15	0	0	0.023	0	0
x_4	0	0.3	0.3	0	0	0.3	0	0.123	0.3
x_5	0.017	0	0.3	0	0.015	0.228	0.017	0	0.241
x_6	0	0.3	0	0.005	0	0	0.031	0	0
x_7	0.3	0.227	0	0.3	0.142	0.146	0.3	0.214	0.071
x_8	0	0	0.014	0	0	0.215	0	0	0.218
x_9	0.3	0	0.151	0.008	0242	0.11	0.029	0.139	0.17
x_{10}	0.281	0.031	0.235	0.3	0.3	0	0.3	0.266	0

Table S2. Multi-period investment weight under different attitudes (upper limit of investment ratio $u_{it} = 0.5$)
附表 2. 不同态度下多期投资权重(投资比例上限 $u_{it} = 0.5$)

	$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 1.5$		
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
x_1	0	0.072	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0.235	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0.308	0.194	0	0.5	0.393	0	0.5	0.5
x_5	0	0	0.5	0	0	0.5	0	0	0
x_6	0	0.5	0	0	0.412	0	0	0.265	0
x_7	0.351	0.12	0	0.5	0.063	0	0.499	0	0.085
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0.415
x_9	0.368	0	0	0.054	0	0	0.016	0	0
x_{10}	0.281	0	0.306	0.446	0.025	0.107	0.484	0	0

Table S3. Multi-period investment weight under different attitudes (upper limit of investment ratio $u_{it} = 0.8$)
附表 3. 不同态度下多期投资权重(投资比例上限 $u_{it} = 0.8$)

	$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 1.5$		
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
x_1	0	0.034	0	0	0.155	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0.003	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0.002
x_4	0	0.096	0	0	0.8	0.104	0	0.8	0.679
x_5	0	0	0.716	0	0	0.8	0	0	0
x_6	0	0.8	0	0	0	0	0	0.158	0
x_7	0.8	0.07	0	0.433	0.045	0	0.208	0.039	0.127
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0.133
x_9	0.127	0	0	0	0	0	0	0	0.059
x_{10}	0.073	0	0.284	0.567	0	0.096	0.792	0	0

Table S4. Multi-period investment weight under different attitudes (upper limit of investment ratio $u_{it} = 1$)
附表 4. 不同态度下多期投资权重(投资比例上限 $u_{it} = 1$)

	$k = 0.5$			$k = 1$			$k = 1.5$		
	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
x_1	0	0.034	0	0	0.088	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0.075	0.47	0	0.95	0.819
x_5	0	0	0.693	0	0	0.383	0	0	0
x_6	0	0.966	0	0	0.188	0	0	0	0
x_7	0.929	0	0	0.346	0	0	0.008	0	0.115
x_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0.056
x_9	0.071	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0.307	0.654	0	0.147	0.992	0.05	0