Query the Truth of the First Mathematical Crisis

YANg Liusheng
Shaanxi Chang'an Normal School, Xi'an China
Email: 13572503691@163.com

Abstract

Purpose: The purpose is to clarify the truth of the first mathematical crisis. The method is to reveal that the proof of the Pythagoras School on √2 not a rational number is non-effective.The results show that "α and β as relatively primes" is an irrelevant assumption that misleads people to do the non-effective reasoning, which should be corrected to "α and β as integers". Conclusions are obtained that the truth of the first mathematical crisis is that the first pair of immeasurable discoveries is not based on a valid proof that √2 is not a rational number but is based on a non-effective proof.

Keywords

consistency;effective inference; fallacy of ambiguity; law of excluded middle; rational number;relatively prime

Subject Areas Math & Physics

质疑第一次数学危机的真相

杨六省
陕西省长安师范学校，陕西 西安
Email:13572503691@163.com

收稿日期：2017年6月14日；发布日期：2017年6月14日

摘　要

目的:澄清第一次数学危机的真相。方法:揭示Pythagoras派关于√2不是有理数的证明是非有效的。结果:"α，β互素"是个不相干的假设，它误导人们做非有效推理，它应被更正为"α，β均为整数"。结论:第一次数学危机的真相是:第一对不可公度量的发现，并不是基于对√2不是有理数的有效证明，而是基于非有效证明。

关键词

相容性；有效推理；歧义谬误；排中律；有理数；互素

0 引言

√2 与 1 不能公度的证明是 Pythagoras 派给出的。这个证明当然和现今对√2 为无理数的证明相同。[1]38 它们的推理出发点都是——√2 =α：β（α，β 互素），且都认可由假设前提可推出 α 为偶数这个阶段性的结论。笔者的质疑是：一，这样的推理是有效的吗？二，如果 α 为偶数的结论会导致矛盾，推理还有效吗？这就产生了一个问题：第一次数学危机的真相是什么？也就是，第一对不可公度量的发现，是基于对√2 不是有理数的有效证明呢？还是非有效证明？这是应当澄清的。

1 讨论

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14 June 2017, publ: 14 June 2017

1.1 毕达哥拉斯派的证明

设等腰直角三角形斜边与一直角边之比为 α：β，并设这个比已表达成最小整数之比。于是根据 Pythagoras 定理得 $\alpha^2=2\beta^2$。由于 α^2 为偶数，α 必然也是偶数，因任一奇数的平方必是奇数。但比 α：β 是既约的，因此 β 必然是奇数。α 既是偶数，故可设 α=2γ。于是 $\alpha^2=4\gamma^2=2\beta^2$。因此 $\beta^2=2\gamma^2$，这样 β^2 是个偶数。于是 β 也是偶数。但 β 同时又是奇数，这就产生了矛盾。[1]37-38

1.2 现今教科书中的证明

下面采用北师大版教材（八年级上册）的证明。

假设边长为 1 的正方形的对角线的长可写成两个整数 α，β 的比 α/β（α，β 互质），于是有 $(\alpha/\beta)^2=2$，$\alpha^2=2\beta^2$.

因此，α^2 是偶数，α 是偶数.

于是可设 α=2γ,那么 $\alpha^2=4\gamma^2=2\beta^2$,$\beta^2=2\gamma^2$.

这就是说，β^2 是偶数，β 也是偶数.这与“α，β 是互质的两个整数”的假设矛盾. [2]

作者评析：√2 是不是有理数的矛盾，表现为表达式√2 =α：β 中的 α 和 β 能否全是整数。这个矛盾是两个数系之间的矛盾，而不是整数系统内部的某种矛盾。虽说把 α：β 写成最简分数是合理的，但把假设条件由“α，β 均为整数”换成“α，β 互素”，就会使问题的讨论发生原则性的变化——人们不再讨论 α 和 β 能否全是整数，而是讨论 α 与 β 能否互素。这样一来，原本属于两个数系之间的矛盾，似乎就变成了整数系统内部的某种矛盾，但这是不可能的。因此，α 与 β 互素这个假设条件，是一个陷阱，而且是一个超级陷阱，因为它居然能够存在长达 25 个世纪之久。

在 Pythagoras 派的证明中，依次推出了 α 是偶数、β 是奇数、β 是偶数，由于后两项矛盾，故又否定了第二项，从而可推出 α 和 β 都是偶数，于是，又否定了“α，β 互素”这个假设，据此矛盾，便以为证明了√2 不是有理数。但是，笔者认为，Pythagoras 派得出 α 是偶数这一步骤的推理，当然也包括其后续推理，是不能被认可的。理由是：

⑴不考虑应用归谬法

不失一般性，假设β 为整数（这一点总能得到满足），则可推出α 不是奇数。接下来，关于应用排中律，我们不妨先假设它是针对√2=α ：β 做出的。笔者的质疑是：如果α 和β 的论域指的是整数范围，那么，又如何能够保证对于√2=α ：β ，当β 为整数时，α 也是整数呢？如果不能保证这一点（注：事实上，现在人们都明白这一点），应用排中律做出α 不是奇数就是偶数的结论，就是没有根据的。如果α 和β 的论域指的不是整数范围，那么，对于√2=α ：β ，当β 为整数时，已知α 不是奇数，同样不能推出α 是偶数的结论，因为不是奇数，并非必然就是偶数，即这里的α 可能既非奇数，也非偶数。

下面我们来考虑，如果关于排中律的推理是针对“α ，β 互素”（这里特用到α 和β 均为整数）进行的。很明显，从“√2=α ：β ”可推出“α 不是奇数”，但从“α ，β 互素”则不能。因此，笔者认为，Pythagoras 派的证明，实质上是把前者的结论强加于后者（再应用排中律进行推理），故其做法是不合理的。也许有人会

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14 June 2017, publ: 14 June 2017

反驳说，难道“√2=α：β”与“α，β 互素”中的α 不是同一的吗？下文中的“本文作者的证明”与 Pythagoras 派的证明没有关联，我们可以应用其结论（指√2 是无理数）。我们说，作为推理前提的表达式√2=α：β（α，β 互素），看似一个不可分割的整体，实则是由两个不相容的条件被外在地结合在一起：①√2=α：β，由人们的现今常识（指√2 是无理数）可知，其中的α 和β 不可能均为整数；②α 与 β 互素，其中的α 和β 均为整数，很明显，当β 为整数时，对于后者，α 是整数，对于前者，α 不是整数，这就表明，当β 为整数时，“√2=α：β”与“α，β 互素”中的α 并不是同一的。

需要说明的是，目下我们正在讨论的问题是，Pythagoras 派的证明是否可被接受。在这种情况下，如果人们不假思索的用√2 是无理数这个现今的常识来反驳 Pythagoras 派的证明，就等同于你已承认 Pythagoras 派的证明可被接受，这就陷入矛盾了。当然，如果你已了解下文中的“本文作者的证明”，然后再应用√2 是无理数这个结论去反驳 Pythagoras 派的证明，那就不会有问题了。那么，“本文作者的证明”这部分内容是否一定要放在文章的靠前位置呢？这倒不必。因为笔者要揭示 Pythagoras 派证明的非有效性，不一定非得要借助于√2 是无理数这个结论。事实上，笔者只需指出——因为 Pythagoras 派在推理过程中，始终没有证明“√2=α：β”与“α，β 互素”中的α 和β 是同一的，但在推理中却视它们为同一，这就构成了推理形式上的歧义谬误，据此，我们有理由对 Pythagoras 派证明的有效性不予认可。

基于上述分析，这就告诉人们，Pythagoras 派关于“α 不是奇数就是偶数”的证明是不可被接受的。

⑵要用到归谬法

对于（1），也许有人会反驳说，我们是在应用归谬法，是要导出矛盾，因此，应用与“√2=α：β”不相容的条件“α，β 均为整数”（注：假设条件“α，β 互素”包含“α，β 均为整数”）并没有什么错。但笔者的反问是，应用这个假设前提推出的矛盾究竟是什么？

如果由$\alpha^2=2\beta^2$能推出α 是偶数，由$\beta^2=2\gamma^2$能推出β 是偶数，那么，这同一模式的推理继续下去，就是合理的。然而，我们发现，这样一来，α 和β 就会均含有无穷多个因数 2，在这种情况下，怎么能说，α 和β 都是偶数呢？既然α 和β 全不是整数，又怎么能够应用“α，β 互素”进行后续推理呢？

笔者认为，应用“α，β 均为整数”这个假设条件推出的矛盾应该是“α，β 均为整数”的否定（因为必然会推出α 和β 均含有无穷多个因数 2），而不是与假设条件“α，β 互素”相矛盾的“α 和β 同为偶数”，因为如果认可后者，就会陷入自相矛盾，即否定自身：由于会推出α 和β 均含有无穷多个因数 2，从而α 和β 又不是偶数。

上述两条理由，其中的任何一条都足以表明，Pythagoras 派关于√2 不是有理数的证明是不能被认可的，尤其是后一条，以确凿无疑的理由表明 Pythagoras 派的证明是非有效的。

如果说，Pythagoras 派在“第一次”试图证明√2不是有理数时，由于尚不能确定√2能不能表为两个整数之比，只是想通过归谬法进行试探的话，那么，把 α：β 设定为最简分数，倒是情有可原的。但当后世已经明确知道√2=α：β 中的 α 和 β 不可能全是整数（其中至少有一个是无理数），因此，α 和 β 之间也就不存在是否互素的问题，

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14 June 2017, publ: 14 June 2017

就应该直接从论题的否定（√2能表为整数之比）开始，相反，由于“α，β 互素”这个不相干的假设条件的保留，就使得形式上的歧义谬误的逻辑错误在推理中是不可避免的。

人们把 α：β 写成最简分数，似乎是很自然的事。因为直觉告诉人们，形式越简单会使问题的讨论更简明。直觉虽是好的向导，但也常常误导人们步入歧途。既然假设了√2 =α：β（α，β 互素），那么，在推理中会用到 α 与 β 互素这一条，就是理所当然的事。当 β 为整数时，可以推出 α 不可能是奇数。因为最终会应用到 α：β 是最简分数这一条进行后续推理，于是人们会认为，α 属于整数范围是理所当然的事。这时，关于 α 是否有可能不是整数的问题，人们已不会进行质疑，也不认为有必要进行质疑，因为预设条件（α，β 互素）使人们相信，问题的症结一定出在 α 与 β 是否互素上面。正是出于这种意识，人们跳过了，换一种说法，也就等同于放过了对 α 是偶数（整数）的质疑，从而很自然地想到了排中律：α 不是奇数就是偶数。然而，正是这不经意的一步，人们已把 α 的讨论对象由原来的“√2 =α：β”偷换成了“α 与 β 都是整数”，于是，形式上的歧义谬误发生了。

一直以来，人们总认为，为了用归谬法证明√2不是有理数，对于√2 =α：β，假设“α，β 互素”要比假设“α，β 都是整数”为好，因为前者的形式更简明，殊不知，这微妙的差异会造成误导。

1.3 本文作者的证明

设√2 =α：β（α，β 均为整数），则$2=\alpha^2:\beta^2$，从而 $\alpha^2=2\beta^2$。当 β 为整数时，$2\beta^2$ 是偶数。

①α 不可能是奇数，因为奇数的平方不可能是偶数。

②对于√2=α ：β （即$\alpha^2=2\beta^2$），假设α 和β 均为整数成立，就会有结论——α 不是奇数就是偶数。如果 α 是偶数，设α =2γ （γ 为整数），代入$\alpha^2 = 2\beta^2$，得 $2\gamma^2=\beta^2$。如果由上述 $\alpha^2=2\beta^2$（β 为整数）能推出 α 是偶数，那么，这里由 $2\gamma^2=\beta^2$（γ 为整数）也应该能推出β 为偶数；……这样下去，就会推出β 有无穷多个因数 2，从而说明β 不可能是整数，但这与β 为整数的假设矛盾，由此说明对于√2=α ：β ，假设α 和β 均为整数是不成立的。

2 结论

第一次数学危机的真相是:第一对不可公度量的发现，并不是基于对√2 不是有理数的有效证明,而是基于无效证明，因此，数学史关于第一次数学危机的史实记载应改写。

参考文献

[1][美]M.克莱因.古今数学思想[M]，第 1 卷．张理京，张锦炎译．上海：上海科学技术出版社，1979 年第 1 版，第 37-38 页.
[2]马复主编.义务教育教科书数学（八年级上册）[M].北京：北京师范大学出版社，2014 年第 2 版，第 24 页.

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14 June 2017, publ: 14 June 2017