The Theory of Higher Dimensional Linear Partitions and Its Application
—Note on Ramsey Number R(5,5;2)=47

Minghao Guo[1], Zhicheng Guo[2]
1 School of Biomedical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China
2 Dept. Northern Design and Research Institute, Shijiazhuang, China
Email: 13833116000@139.com

Abstract

Leonhard Euler established a new mathematical branch: partition, from his study on generating functions: $(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)\cdots$. In this work, we propose several new recurrence relations from dual-binary function of solid partitions and General Gödel numbers, based on observations of $(1+x^{a}y^{\alpha}z)(1+x^{b}y^{\beta}z)(1+x^{c}y^{\gamma}z)\cdots$ inspired by Euler's work. Furthermore connections are derived from this, especially of Leibniz formula for $\pi/4$ and Euler formula for $\pi^2/6$, from binary pertition formulas. Binary partition is an implementation of cubic partition or dual-binary partitions, which is as well as a expression from Gödel numbers to Gödel numbers array. Actually, we present a new sense to get Ramsey number R(5, 5; 2) = 47 in this paper.

Keywords

Binary partitions; solid partitions; linear partitions; general Gödel numbers

Subject Areas Math & Physics

高维线性分拆理论及其应用
——Ramsey数R(5,5;2)=47的注记

郭铭浩[1]， 郭志成[2]
1上海交通大学生物医学工程学院，上海，中国
2北方设计研究院，石家庄，中国
Email: 13833116000@139.com

收稿日期：2017年11月10日；发布日期：2017年11月14日

摘　要

Euler 通过展开一元表达式$(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{z})(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{z})(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{z})\cdots$的研究，创立了数的分拆这个数学分支。本文推广表达式到二元形式$(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{z})(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\mathbf{b}}\mathbf{y}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{z})(\mathbf{1}+\mathbf{x}^{\mathbf{c}}\mathbf{y}^{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{z})\cdots$,并建立了相应的二元分拆的递推规则，由此得到了许多有趣的性质，特别是建立了圆周率 $\boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}$的莱布尼茨公式和圆周率 $\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}/\mathbf{6}$的欧拉公式与二元分拆函数的联系。二元分拆本质上属于立方体分拆或双二元函数分拆，同时它也是哥德尔数推广到哥德尔数组的一种表达形式。事实上，二元分拆理论也为求解拉姆塞数 R(5,5；2)=47 找到了一种新方法。

关键词

二元分拆；立方体分拆；线性分拆；广义哥德尔数

1.引言

Euler 把一维的离散函数 $p_\Phi(n)$定义为整数 n 拆成正整数之和（不计次序或允许重复）的种数[1]。例如，当 n=4 时，4 可以分拆为：

4，3+1，2+2，2+1+1，1+1+1+1，⇒ $p_\Phi(4)=5$

$p_\Phi(n)$的前面几项是：1,2,3,5,7,11,15,22,⋯

令：$P(q):=1+\sum_{n=1}p_\Phi(n)\,q^n$，那么分拆种数存在恒等式

$$P(q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{-1}$$

进一步，在 Euclid 空间中，我们把一维分拆函数 $p_\Phi(n)$ 推广到二维，并用$p_\Phi^2(n)$表示整数 n 在平面上的二维分拆种数。需要特别说明的是，函数p_Φ^2的指数 2 表示分拆的维数，不能简单理解为分拆函数 p_Φ 的平方。例如：当 n=4 时，省略符号+后，可以表示为

$$4,\ 31,\ \begin{matrix}3\\1\end{matrix},\ 22,\ \begin{matrix}2\\2\end{matrix},\ 211,\ \begin{matrix}21\\1\end{matrix},\ \begin{matrix}2\\1\\1\end{matrix},\ 1111,\ \begin{matrix}111\\1\end{matrix},\ \begin{matrix}11\\11\end{matrix},\ \begin{matrix}11\\1\\1\end{matrix},\ \begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix},\ \Rightarrow\ p_\Phi^2(4)=13\neq(p_\Phi(4))^2=25$$

$p_\Phi^2(n)$的前面几项是：1,3,6,13,24,48,86,160,⋯

令：$Q(q):=1+\sum_{n=1}p_\Phi^2(n)\,q^n$，P.A.MacMahon 花费了 20 年时间，证明了下面的恒等式[2]

$$Q(q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{-m}$$

更进一步，我们用函数$p_\Phi^k(n)$表示 k 维 Euclid 空间中，数 n 的分拆种数；并且令函数$\pi_\Phi^k(n)$由下面的公式确定：

$$\Pi^k(q):=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{-\binom{\mu(m)k-1}{k-1}}=1+\sum_{n=1}\pi_\Phi^k(n)\,q^n$$

式中$\mu(m)=1-\frac{2-m}{k}$，或$\mu(m)k=m+k-1$。

那么对于 k=0,1,2，存在等式

$$\pi_\Phi^k(n)=p_\Phi^k(n)$$

P.A.MacMahon 猜想[1]对于自然数 k，等式$\pi_\Phi^k(n)=p_\Phi^k(n)$也是成立的。尽管后来反例说明了这个猜想对于 k>2 几乎都是错误的，但是函数$\pi_\Phi^k(n)$和$p_\Phi^k(n)$存在如下的两个引人注目的性质[3,4]。

性质 1：$p_\Phi^k(0)=\pi_\Phi^k(0)=1$，$p_\Phi^k(1)=\pi_\Phi^k(1)=1$，$p_\Phi^k(2)=\pi_\Phi^k(2)=1+k$

[1] 由 Euler 和 P.A.MacMahon 得到的公式可以求解出$\pi_\Phi^2(200)=4066263490068623016919082185$, 因此求解 $\mu(n)$的性质属于小世界的问题。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$p_\Phi^k(3)=\pi_\Phi^k(3)=1+2\binom{k}{1}+\binom{k}{2}$$
$$p_\Phi^k(4)=\pi_\Phi^k(4)=1+4\binom{k}{1}+4\binom{k}{2}+\binom{k}{3}$$
$$p(5)=\pi(5)=1+6\binom{k}{1}+11\binom{k}{2}+7\binom{k}{3}+\binom{k}{4}$$
$$p_\Phi^k(6)=\pi_\Phi^k(6)-\binom{k+1}{4}=\pi_\Phi^k(6)-\binom{k}{3}-\binom{k}{4}$$
$$=1+10\binom{k}{1}+27\binom{k}{2}+28\binom{k}{3}+11\binom{k}{4}+\binom{k}{5}$$
$$p_\Phi^k(7)=\pi_\Phi^k(7)-k\binom{k+1}{4}=\pi_\Phi^k(7)-3\binom{k}{3}-8\binom{k}{4}-5\binom{k}{5}$$
$$=1+14\binom{k}{1}+57\binom{k}{2}+93\binom{k}{3}+64\binom{k}{4}+16\binom{k}{5}+\binom{k}{6}$$

需要注意的是，函数$\pi_\Phi^k(n)$和$p_\Phi^k(n)$的首项和末项的系数都是 1，第二项和第三项系数也是相同的。因此，$p_\Phi^k(n)$中$\binom{k}{1}$项的系数和$\binom{k}{2}$项的系数只与 n 相关。

性质 2：如果 k+1 是一个素数，那么存在同余式

$$p_\Phi^k\big((k+1)n\big)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k+1),\quad 1\le n<(k+1)^k$$
$$p_\Phi^k\big((k+1)^{k+1}\big)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ k+1)$$

尽管我们知道，上述的两个性质揭示的是维数的关联性质；但是却无法在 Euclid 空间中给出它们直观的几何解释。并且对于整数 n，既使在 Euclid 三维空间中继续寻找函数$\pi_\Phi^3(n)$和$p_\Phi^3(n)$的性质都是非常困难的[5]。甚至下面的看似显然的猜想至今都没有被证明。

$$\boldsymbol{\pi_\Phi^k(n)-p_\Phi^k(n)\ >0,\ \ (\text{当}k\ge 3\text{时})}\ \ ???$$

本文推广 n 为整数向量，并在 Li-代数空间中研究了函数$\pi_\Phi^3(n)$和$p_\Phi^3(n)$的性质。详细地说，本文的二元分拆理论研究的是：对于足够大的集合 S，如果将 S 的所有 r-元子集分拆（或划分）为 2 个类，则总能找到 S 的一个 q-元子集全部位于同一类中。

大量的文献[6,7]讨论了$\pi_\Phi^3(n)$和$p_\Phi^3(n)$的性质，它们利用的是高维保形理论、三维全息理论、Farey 数分拆、M 角数理论、局部 Bell 多项式理论等等[8,9,10]。本文利用平面上一种特殊向量的分拆，研究$p_\Phi^3(n)$的性质，它属于二元分拆的范畴。

$p_\Phi^3(n)$的前面几项是：1,4,10,26,59,140,307,684,1464,⋯

$\pi_\Phi^3(n)$的前面几项是：1,4,10,26,59,141,310,692,1483,⋯

实际上，k=3 情形下，似乎可以求解满足分拆条件的 Ramsey 数$R(n,m;2)$，而上述的两个性质恰恰对应着求解 Ramsey 数$R(5,5;2)$。然而，在 Euclid 空间中，讲清楚这个问题非常困难；必须另辟蹊径。

为了说明代数方法判定 Ramsey 数$R(5,5;2)=47$的猜想，我们把代数方法求解 Ramsey 数$R(4,4;2)$的过程作为一个例题。

例题 1.1：把有 17 个点的完全图用红蓝涂色，给出不存在单染色 4-子集的一种涂法。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

我们把圆上的 17 个点顺序编号为 0,1,⋯，16。可以按照编号为 mod 17 的二次剩余和二次非剩余分为两类 P：={1,4,9,16,10,2,15,13}，Q：={3,5,6,7,8,11,12,14,16,}。每一类有 8 个点。

编号 0 既不是二次剩余，也不是二次非剩余，把 0 作为 P,Q 的公共元素。然后我们把 0 与 P 和 Q 点的连线分别涂成红色和蓝色。由于 0 点与其它标号的点是等价的，由此我们把 0 点的连线形式复制到其它各点。恰好使得 17 个点中，每两个点既无重复也无遗漏的连线并涂色。用枚举法或代数法容易证明，P,Q 点形成的图互为镜像，且 P,Q 形成的 2 色完全图不存在单染色的 4-子集。■

又因为用组合的方法可以求出$R(4,4;2) \le 18$，故我们得到的是不存在单染色 4-子集的一个最大完全图。这种完全图称为 Ramsey 数$R(4,4;2) = 18$的临界图[2]。 我们可以把例题 1.1 写成与组合恒等式

$$\binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn = \binom{m+n}{2}$$

类似的形式如下：

$$\binom{8+1/2}{2}_P + \binom{8+1/2}{2}_Q + (8+1/2)_P \otimes (8+1/2)_Q = \binom{17}{2}_{P+Q}$$

式中的每一项可以解释为组合线段用两种颜色的涂色方法，并分别给出。

当然，我们也可以把临界图写成代数式

$$\binom{17/2+\phi}{2}_{P+\phi} + \binom{17/2-\phi}{2}_{Q-\phi} + (17/2+\phi)_{P+\phi} \otimes (17/2-\phi)_{Q-\phi} = \binom{17}{2}_{P+Q}$$

并按 ϕ 值分 17 个点为两类。但是对于$\phi \ne 0$的情形，临界图的涂色方法无明显规律可描述。

类似的，例题 1.1 的临界图也可以写成余弦定理 $a^2+b^2+a\cdot 2\cos(\pi+\alpha)\cdot b=c^2$ 的形式，并把每一项解释为三角形线段上的格点性质，再利用文献[11,12]的结论来研究平面上的涂色问题。

由例题 1.1 和上面的论述可以看出，即使给出了$R(4,4;2) = 18$，它的临界图如果不做形式上的转换，17 个整点分为两类的涂色方法就无任何规律可循；在整点分类情况下，我们只能叙述临界图每条线段的涂色。

反过来说，由于临界图的整点着色规律是由所有线段的着色确定的，因此试图通过一部分图的着色找到$R(4,4;2)$的规律，都会是徒劳的。实际上，对于不太大的数$R(5,5;2)$，利用枚举法检验所有相关的着色图，即使计算机也不可胜任。因此，类似二次同余求解$R(4,4;2)$临界图的方法（代数法），指出了求解$R(5,5;2)$的一个方向。

我们知道，数学界具有里程碑意义的一个事件是“哥德尔的（Gödel）证明”两篇论文[13,14]的发表，在此之前，罗素和怀特海(Russell& Whitehead)于 1910 年至 1913 年出版了三卷本《数学原理》(Principia Mathematica）。罗素和怀特海自信已经将全部数学建立在纯逻辑之上了。

出人意料的是，二十年后，逻辑学家 Gödel 指出：“按照《数学原理》的规则，总可以找到一个公式不可证”。使得《数学原理》这座数学灯塔轰然倒塌。然而，“Gödel 的证明”对计算机的影响并不都是负面的，“Gödel 的证明”表明：**给每一个原始符号、每一个公式以及每一个证明都指定一个独一**

[2] 常见的文献都是不加解释的直接给出这个至关重要的临界图。尽管已知$R(4,4;2) = 18$的结论，但它对求解相邻的小 Ramsey 数$R(5,5;2)$不能提供任何帮助；人们甚至不知道应该从何入手来求解$R(5,5;2)$。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

无二的数是可能的。Gödel 近似的用 12 个整数，代表域中的数学符号；用来解释不完备性原理。这 12 个数称为 Gödel 数。

本文把 Gödel 原理推广到了二元分拆理论，得到了 Gödel “向量数”和 Gödel “角阵数”的许多公式。它是对 Gödel 原理的深刻推广，仅用一个数学分枝描述基于许多流派的相应命题是非常困难的。因此，我们仅给出容易理解的有关二元分拆的几个必然结果。并说明它在判定 R(5,5)=47 时的一个应用。

二元线性分拆理论的建立和$R(n,m;2)$的估算过程，都是为了解决高维空间的计算问题。但它们的表达形式和涉及到的数学分支存在着很大的差异。本文用最容易理解的二元数的分拆理论做为本文的主线，而不用估算$R(n,m;2)$的方法做为主线；其目的是用较短的篇幅，把判定$R(5,5;2)=47$的过程尽可能解释的简单明了。

2. 一元分拆函数的代数表达式简介

递推求解一元级数的过程并不能简单推广到二元级数。为了讲明白递推求解二元级数的展开式，我们有必要从新的视角介绍和完善欧拉的一元级数的分拆理论。

Euler 通过无穷因式的乘积

$$(1+x^{\alpha}z)\left(1+x^{\beta}z\right)(1+x^{\gamma}z)\cdots$$

展开为级数的研究，得到了整数 n 分拆为相异整数之和的种数的计算方法。

为了进一步研究，我们把因式的乘积 Z 和 X 记为

$Z=(1+x^0z)(1+x^1z)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$

$X=(1+x^1z)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$

因此 Z 是 z 的线性函数，即：

$Z=X+Xz$

当 X 的展开级数表示为下面的形式时

$X=1+P_0z+Q_0z^2+R_0z^3+\cdots$

由于因式$(1+x^0z)$的存在，使得 $1,P_0,Q_0,R_0,\cdots$成为一种简单递推关系，并且 $P_0,Q_0,R_0,\cdots$都是 x 的多项式。这些多项式的各项系数可以由递推的方法得到。

上面的结论还告诉我们，当 z=1 时，若$(X)_{z=1}$的表达式为

$$(X)_{z=1}=\frac{(Z)_{z=1}}{2}=1+ax+bx^2+cx^3+\cdots \tag{1}$$

那么，它的系数 a,b,c,⋯也是一种递推关系。欧拉把系数 a,b,c,⋯解释为 x 指数的相异分拆种数。

欧拉首先找出了“从给出了把一个数拆成可以相同的数之和的种数”的递推方法，由此再推出“从给出了把一个数拆成相异的数之和的种数”。由此得到：

a=p(1)=1,b=p(2)=1,c=p(3)=2,d=p(4)=2,e=p(5)=3,f=p(6)=4,⋯

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

式中 p(n)表示整数 n 的相异分拆种数。

这种用数的递推关系简化因式乘积展开的方法，极大简化了系数 a,b,c,⋯的计算过程。为了把关于 z 的一元级数的多项式系数 P_0,Q_0,R_0,⋯和常数 a,b,c,⋯的递推求解方法，顺利推广到二元级数的相应系数，我们首先规范一元分拆函数的定义如下：

1.用 $p_k(n)$表示将 n 拆成 k 个整数之和且不允许重复的种数。

2.用 p(n)表示将 n 拆成整数之和且不允许重复的种数。

3.用 $p_I(n)$表示将 n 拆成奇数之和且允许重复的种数（注意 $p_I(n)$和 $p_1(n)$的定义区别）。

4.用 $p_{k\Phi}(n)$（下标 Φ 是空集符号）表示将 n 拆成 k 个整数之和且允许重复的种数。

5.用 $p_{0\Phi}(n)$或 $p_0(n)$表示将 n 拆成整数之和且允许重复的种数。

下面简单介绍和解读 Euler 给出的一元分拆的的几个重要结论。

Euler 利用定理

$$p_{k\Phi}(n) = p_k\left(n + \frac{k(k+1)}{2}\right) \tag{2}$$

和

$$p_k(n) = p_{k\Phi}\left(n - \frac{k(k+1)}{2}\right) \tag{3}$$

得到了递推法则

$p_k(n)= p_k(n–k) + p_{(k-1)}(n-k)$

由此可以从比较简单情况下 $p_k(n)$的结果，逐步递推得到了下面的表 1

Table 1. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n)$

表 1: 分拆函数 $p_k(n)$ 的递推表[3]

n	k=Φ	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
0	Φ						
1	ϕ	Φ					
2	ϕ	1					
3	ϕ	1	Φ				
4	ϕ	1	1				
5	ϕ	1	2				
6	ϕ	1	2	Φ			
7	ϕ	1	3	1			
8	ϕ	1	3	2			

[3] 表中符号 Φ 和 ϕ 表示 Euler 偏序集中的$\hat{1}$ 和$\hat{0}$。通常情况下，Φ 表示空集可取 Φ=1；ϕ 表示集合的初始点可取 ϕ=0

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

9	ϕ	1	4	3			
10	ϕ	1	4	4	Φ		
11	ϕ	1	5	5	1		
12	ϕ	1	5	7	2		
13	ϕ	1	6	8	3		
14	ϕ	1	6	10	5		
15	ϕ	1	7	12	6	Φ	
16	ϕ	1	7	14	9	1	
17	ϕ	1	8	16	11	2	
18	ϕ	1	8	19	15	3	
19	ϕ	1	9	21	18	5	
20	ϕ	1	9	24	23	7	
21	ϕ	1	10	27	27	10	Φ
22	ϕ	1	10	30	34	13	1
23	ϕ	1	11	33	39	18	2
24	ϕ	1	11	37	47	23	3
25	ϕ	1	12	40	54	30	5

注：表中按照递推规则添加了第一行和第一列。且 Φ=1, ϕ=0。

当 k 相对 n 为充分小时，可以由表 1 和公式

$p(n)=p_1(n) + p_2(n) + p_3(n) + p_4(n) + p_5(n) +\cdots$

求出 p(n)。也就是表 1 中每一行的数值相加，就得到了分拆函数 p(n)和$(X)_{z=1}$的展开式(1)的系数。

另一方面，也可以利用公式

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p_k(n)$$

求出产生级数的递推尺度：

1，+1，0，0，−1，0，−1，0，0，0，0，+1，0，0，+1，0，0，⋯

递推尺度不为 0 的项也可以由五角数公式

$$\frac{3n^2 \pm n}{2}$$

表出。式中 n 为奇数的项为负，n 为偶数的项为正；其它的项为 0。

Euler 将这个性质写成了著名的五角数公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{1}{2}n(3n-1)} + x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\, x^{\frac{1}{2}n(3n-1)}$$

我们利用递推尺度可以求出

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\cdots$$

的展开级数为：

$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+\cdots$

这个级数的每一项，系数都等于 x 的指数分拆为整数之和且允许重复的种数。也就是当种数 k 充分大时，指数 n 的分拆函数与 k 无关，记为 $p_0(n)$。即：

$\alpha=p_0(1)=1$，$\beta=p_0(2)=2$，$\gamma=p_0(3)=3$，$\delta=p_0(4)=5$，$\varepsilon=p_0(4)=7$，…

它与利用表 1 及公式(2)得到的结果相同。当然，我们也可以利用递推尺度及公式(3)求解得到公式(1)中的 a,b,c,d,…。也就是说，利用表 1（或递推尺度）和三角数 k(k+1)/2（加或减）可以进行 a,b,c,d,…与 α,β,γ,δ,…之间的转换。这些内容文献[1]已经讲的很清楚了。

特别需要说明的是，任意五角数定理的证明都等价于下面的分拆命题[4]。

命题 2.1：数 n 拆分为大于等于 2 的整数之和的种数(不计次序)等于 $p_0(n)-p_0(n-1)$。即由公式

$p_0(n)-p_0(n-1)=d_0(n)$

确定的分拆函数 $d_0(n)$可以解释成数 n 分拆为大于等于 2 的整数之和的种数。例如：

9,2+7,3+6,4+5,2+2+5,2+3+4,3+3+3,2+2+2+3 ⇒ $d_0(9)=p_0(9)-p_0(8)=30-22=8$

更进一步的结果是[15]：由 Ramanujin 提出猜想并由 Mordell 证明的二次 Euler 积的如下展开式：

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,q^n,\ (q=e^{2\pi iz})$$

$$\prod_{p:素数}(1-\tau(p)p^{-s}+p^{11-2s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,n^{-s}$$

式中$\tau(n)$是 Fourier 展开的系数。

Ramanujin 对系数$\tau(n)$情有独钟，并证明了 p 为素数时，$|\tau(n)|<2p^{\frac{11}{2}}$和$\tau(n)\equiv 1+p^{11}(\mathrm{mod}691)$。$\tau(n)$的前面几项是：

$$\tau(1)=1,\ \tau(2)=-24,\ \tau(3)=252,\ \tau(4)=-1472,\ \tau(5)=4830,\ \tau(6)=-6048$$

$$\tau(7)=-16744,\ \tau(8)=84480,\ \tau(9)=-113643,\ \tau(10)=-115920,\ \ldots$$

现代数论进一步把目标指向更高次 Euler 积的研究，解决了诸如 Langlands 猜想、Fermat 猜想等著名的历史难题。然而，这些理论是如此的晦涩难懂，只有极少数相关专业的人可以看懂。

本文的二元线性分拆理论本质上研究的也是高次 Euler 积的展开，它相对于现代数论要容易理解的多。

3. 二元分拆理论概述

[4] 作者未发现有文献记载简单的命题 2.1。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

比 Euler 数的分拆更进一步，我们研究无穷因式的乘积

$$Z=(1+x^{a}y^{\alpha}z)\big(1+x^{b}y^{\beta}z\big)(1+x^{c}y^{\gamma}z)\cdots$$

的展开式。

我们由高斯给出的代数基本定理的证明知道，对于系数为整数的代数方程都可以分解为一次或二次因式的乘积。它隐含着的一个结论是：这种一次因式和二次因式的系数是有理数。

如果我们把任意一元多项式方程 Z=0（无论方程的次数是有限的还是无穷的）的根按实数部分的大小和虚数部分的大小分别排序，实数记为 a,b,c,d,⋯；虚数记为 α,β,γ,δ,⋯；并分别标注在 x 和 y 的指数上。根据迪美佛(De Moivre)定理和任意函数均可表为级数形式的拉格朗日（Lagrange）定理，这种表示法是允许的。因此最高项系数为 1 的多项式方程 Z=0 可表为

$$(1+x^{a}y^{\alpha}z)\big(1+x^{b}y^{\beta}z\big)(1+x^{c}y^{\gamma}z)\cdots=0$$

因为代数数是可数集合，故我们也可以把指数数组$(a+\alpha),(b+\beta),(c+\gamma),\cdots$ 按确定的规则排序，再用 0,1,2,⋯作为它们的代表值。

为了进一步说明，我们考虑下面的无穷因式的乘积。

令:

$Z=(1+z)$

$(1+xz)(1+yz)$

$(1+x^2z)(1+xyz)(1+y^2z)$

$(1+x^3z)(1+x^2yz)(1+xy^2z)(1+y^3z)$

$(1+x^4z)(1+x^3yz)(1+x^2y^2z)(1+xy^3z)(1+y^4z)$

……

$XY=(1+xz)(1+yz)$

$(1+x^2z)(1+xyz)(1+y^2z)$

$(1+x^3z)(1+x^2yz)(1+xy^2z)(1+y^3z)$

$(1+x^4z)(1+x^3yz)(1+x^2y^2z)(1+xy^3z)(1+y^4z)$

……

则 Z 是 z 的线性函数，它的表达式为

$Z=XY+XYz$

可以变形为

$$Z=\sqrt{z}XY\left(\frac{\sqrt{z}}{1}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

在 XY 的表达式中，仅|x·y|小于有限值时，XY 才是收敛的；故不妨始终假定|y|小于等于 1。

我们把 XY 展开为 z 的级数得

$1+z(x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+ x^3y+\cdots)+$

$z^2(xy+x^3+2x^2y+2xy^2+y^3+x^4+3x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4+2x^5+4x^4y+5x^3y^2+\cdots)+$

$z^3(x^3y+x^2y^2+xy^3+2x^4y+3x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4+x^6+4x^5y+6x^4y^2+8x^3y^3+$

$6x^2y^4+4xy^5+y^6+x^7+7x^6y+11x^5y^2+13x^4y^3+\cdots)+$

$z^4(x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+x^6y+2x^5y^2+4x^4y^3+4x^3y^4+2x^2y^5+xy^6+2x^7y+6x^6y^2+$

$9x^5y^3+10x^4y^4+9x^3y^5+6x^2y^6+2x^2y^6+2xy^7+4x^8y+10x^7y^2+17x^6y^3+\cdots)+$

……

然后用卷积的形式表示 XY 为如下的向量乘积的形式：

$XY=\mathbf{I}_0+zP\circ\mathbf{I}_1+z^2Q\circ\mathbf{I}_2+z^3R\circ\mathbf{I}_3+\cdots$

式中 $\mathbf{I}_k$ 为 x,y 的多项式，P,Q,R,…为无穷数组。即：

$\mathbf{I}_0=1$

$P\circ\mathbf{I}_1= x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+ x^3y+\cdots$

$=(1+1+1+1+1+1+1+1+\cdots)\circ(x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+\cdots)$

$Q\circ\mathbf{I}_2=xy+x^3+2x^2y+2xy^2+y^3+x^4+3x^3y+3x^2y^2+3xy^3+y^4+2x^5+4x^4y+5x^3y^2+\cdots$

$=(1+1+2+2+1+1+3+3+\cdots)\circ(xy+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+x^3y+x^2y^2+\cdots)$

$R\circ\mathbf{I}_3=x^3y+x^2y^2+xy^3+2x^4y+3x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4+x^6+4x^5y+6x^4y^2+8x^3y^3+$

$6x^2y^4+4xy^5+y^6+2x^7+6x^6y+10x^5y^2+13x^4y^3+\cdots$

这种表示法既是变量 z 的二元多项式的表达形式，也是代数数到向量卷积的自然拓展。

为了清晰和简便，我们把这些二元的数值表示为矩阵的数值。令：

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} x^0 & +y^1 & +y^2 & +y^3 & +y^4 & \cdots \\ +x^1 & +x^1y^1 & +x^1y^2 & +x^1y^3 & \cdots & \\ +x^2 & +x^2y^1 & +x^2y^2 & \cdots & & \\ +x^3 & +x^3y^1 & \cdots & & & \\ +x^4 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}$$

并按把 $z,z^2,z^3,\cdots$中的分项系数分别添加在上面的标准三角形 **I** 的相应项 x^ny^m 上，然后简化 $P\circ\mathbf{I}_1$，$Q\circ\mathbf{I}_2$， $R\circ\mathbf{I}_3$，…为 **P**，**Q**，**R**，…的形式如下[5]：

[5] 下面的矩阵表达形式等同于 ax^ny^m 的形式。**I** 等同于同类项，数字角阵等同于同类项的个数。相同的，本文的向量卷积也用这种方法表示。它使得矩阵和向量的加法运算等同于合并同类项，而不用再作解释。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$\mathbf{P}\circ\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 0 & +y^1 & +y^2 & +y^3 & +y^4 & \cdots \\ +x^1 & +x^1y^1 & +x^1y^2 & +x^1y^3 & \cdots & \\ +x^2 & +x^2y^1 & +x^2y^2 & \cdots & & \\ +x^3 & +x^3y^1 & \cdots & & & \\ +x^4 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}\circ\mathbf{I}$$

$$\mathbf{Q}\circ\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +y^3 & +y^4 & \cdots \\ 0 & +x^1y^1 & +2x^1y^2 & +3x^1y^3 & \cdots & \\ 0 & +2x^2y^1 & +3x^2y^2 & \cdots & & \\ +x^3 & +3x^3y^1 & \cdots & & & \\ +x^4 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & & \\ 1 & 3 & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}\circ\mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 1 & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}$$

省略掉 **I**，表 XY 为

$XY=1+\mathbf{P}z+\mathbf{Q}z^2+\mathbf{R}z^3+\cdots$

与矩阵的命名相对应，我们称对称矩阵 **P**，**Q**，**R**，…为三角形阵，称 **I** 为三角形阵的基。由于三角形阵的基不变，一般情况下我们可以仅用数字阵列表示 XY 级数的系数，并简称为角阵。

需要注意的是，z^0 项的 $\mathbf{I}_0$ 也是一个角阵，它的第一行第一列的数值为 1，其它项系数均为 0。当不产生误解时，可以用空集符号 Φ 或单位 1 表示 $\mathbf{I}_0$。

进一步，z 项的系数 **P** 是 **I** 的特殊角阵，是 x^0y^0 项系数为 0，其它每一项系数都是 1 的特殊角阵。在文献[16]中，使用了欧拉偏序集的空交符号$\hat{0}$表示 $\mathbf{I}_1$，当然也可以使用空交符号$\hat{1}$表示 $\mathbf{I}_1$，它们是指同一个二项型偏序集的极大链指向相反的两个方向，对极大链长度是无关紧要的。只是有时需要注意$\hat{1}$和 1 的区别。

由上面整数的分拆函数定义，我们可以简单的把分拆函数的一个变量 n 拓展为两个变量 n,m，并相应的定义二元数组(n,m)的分拆函数[6]

$p_k(n,m)$，$p(n,m)$，$p_I(n,m)$，$p_{k\Phi}(n,m)$，$p_0(n,m)$

下面首先讨论二次函数 $p_k(n,m)$和 $p(n,m)$的计算。

4. 二元分拆数与 Ramsey 数的关系

令：z=1，XY 的展开角阵的一部分数值为

[6] 二元数组(n,m)既可以认为是有理数，也可以认为是一个面积，面积逐步减小的过程属于双限制分拆。双限制分拆对应的有理数性质是 Farey 数列的性质。如果用自然数标注这个过程的每一步，二元分拆就退化为了一元分拆。相反的步骤是拓展过程。参见[17]

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$(\mathrm{XY})_{z=1}=\mathbf{I_0}+\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{R}+\cdots=\left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 10 & 14 & 19 & 25 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 14 & 21 & 31 & 44 & 61 \\ 2 & 5 & 9 & 17 & 27 & 42 & 64 & 93 & 132 \\ 2 & 7 & 14 & 27 & 46 & 74 & 116 & 174 & \\ 3 & 10 & 21 & 42 & 74 & 123 & 197 & 303 & \\ 4 & 14 & 31 & 64 & 116 & 197 & 323 & & \\ 5 & 19 & 44 & 93 & 174 & 303 & & \dots\dots & \\ 6 & 25 & 61 & 132 & & & & & \end{array}\right)$$

显然，在每一个角阵 **P**，**Q**，**R**，…中，$x^n y^m$ 项的系数总是等于 $x^m y^n$ 项的系数；称这个性质是二元分拆的对称性。显然它们的求和也保持了对称性不变。

如果令$(xy)^n$是次数为 n 的所有齐次项，那么我们可以把$(XY)_{z=1}$表示为如下形式：

$$(\mathrm{XY})_{z=1}=1+\mathrm{A}\circ(\mathrm{xy})+\mathrm{B}\circ(\mathrm{xy})^2+\mathrm{C}\circ(\mathrm{xy})^3+\mathrm{D}\circ(\mathrm{xy})^4+\mathrm{E}\circ(\mathrm{xy})^5+\cdots$$

式中

A=(1+1)，B=(1+2+1)，C=(2+3+3+2)，D=(2+5+5+5+2)，E=(3+7+9+9+7+3)，…

$(xy)=(x+y)$，$(xy)^2=(x^2+xy+y^2)$，$(xy)^3=(x^3+x^2y+xy^2+y^2)$，$(xy)^4=(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$，

$(xy)^5=(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$，…

A,B,C,D 也可以写为向量的形式，即：

A=(1,1)，B=(1,2,1)，C=(2,3,3,2)，D=(2,5,5,5,2)，E=(3,7,9,9,7,3)，…

这种展开式与一元分拆 X 的展开式的形式完全相同。至此，我们建立了一种与一元整数分拆类似的二元整数分拆的架构。在这个架构中，整数拓展为向量，向量拓展为角阵。由此我们可以把一元整数分拆的原理、方法和结果一一对应的移植到向量或角阵上。换成偏序集的说法就是，Euler 偏序集的原理，方法和结果可以移植到了二项型偏序集上[16]。

从上面$(XY)_{z=1}$角阵的不规则数字中，我们仅仅可以看出它们随着 m,n 的增长而增长。然而，从这些数字的含义上我们又知道，这些数字表示的是每组数字之间与顺序无关的组合性质。例如：

$$\mathrm{B}\circ(\mathrm{xy})^2=x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2xy=2yx+x^2+y^2$$

有多种组合形式[7]；它们由 m+n 确定，与数组(n,m)的顺序和取值无关。表示这种指数项组合性质不变的另一类数是 Ramsey 数，下面的表 1 是已知的 m,n<8 的 Ramsey 数$R(n,m;2)$。

[7] 对这种特殊情形，现代数学称之为加法和乘法的交换律。本文用组合性质不变来描述交换律，具有更广泛和深刻的含义。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

Table 2. Results of Small Ramsey Number

表 2: 小 Ramsey 数$R(n,m;2)$表[18]

n \ m	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18	25	35-41	49-61
5	14	25	43-49	58-87	80-143
6	18	35-41	58-87	102-169	111-298
7	23	49-61	80-143	111-298	205-540
8	73-88	153-417	261-		

定义 $(XY)_{z=1}$ 中项 $x^n y^m$ 的系数为分拆函数 p(n,m)，容易发现，p(n−1,m−1)的值与已知的小 Ramsey 数 $R(n,m;2)$ 很接近。尤其是 R(n,n;2)−1 和 p(n−1,n−1)有非常相近的组合性质。由已知的结果：p(2,2)+1=R(3,3;2)=6，p(3,3)+1=R(4,4;2)=18，使得我们很自然的提出下面的命题和猜想。

命题 3.1:

R(5,5,2)= p(4,4)+1=47

猜想 3.1: 当 n≥3 时，

R(n,n;2)= p(n−1,n−1)+1

然而我们逐渐会发现，命题 3.1 和代数基本定理(更类似于六度分离)一样，都是看似显然的结果，但给出令人信服的严密证明却是极其困难的。因此本文只给出命题 3.1 的证明，而把求解$R(6,6;2)$确解的值和猜想 3.1 的证明留待以后解决。

5. 二元分拆函数 p(n,m)的计算导论

5.1. 二元分拆简介

Euler 给出的整数分拆函数最重要的结论是：整数 n 拆成奇数之和且不计次序的种数 $p_I(n)$，等于 n 拆成相异整数的种数 p(n)。也就是 Euler 证明了$(X)_{z=1}$ 级数的系数 a,b,c,⋯又等于允许重复的奇数分拆种数 $p_I(n)$。

函数 $p_I(n)=p(n)$的结论推广到二元分拆的结论是怎样的呢？现在我们还看不出一点点头绪，甚至把它推广到二元分拆的表达形式都想象不出来，但它又属于涉及微积分(等价于分拆)或无穷计算的分析学上的离散结论。倘若不利用这一点，那么我们对类似 Ramsey 数这类问题几乎就无能为力了。

需要说明的是，我们需要建立函数 $p_I(n)=p(n)$表示的两种分拆形式的一一对应关系，才能继续推广它到二元分拆函数；这是一元分拆理论中没有引起人们重视的问题。问：

函数 $p_I(n)=p(n)$表示的两种分拆形式存在怎样的一一对应关系？？？

实际上，二元线性分拆函数的这种一一对应关系，给出的恰是 Ramsey 数 R(n,n;2)求解过程。即找出下面的对应关系：

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p(n-1,n-1)= p_I(n-1,n-1) \quad \leftrightarrow \quad R(n,n;2)-1$ =相应的临界图 ？？？

二元分拆函数的计算看似简单，其实它的计算过程冗长且繁杂，这也是求解小 Ramsey 数非常困难的原因[8]。下面我们就先从不涉及无穷计算的二元分拆函数 p(n,m)的研究开始。

首先，我们把函数 XY 展开式中项 $x^n y^m z^k$ 的系数定义为 $p_k(n,m)$ ，把 $(XY)_{z=1}$ 或$(XY)_{k=\infty}$展开式中项 $x^n y^m z^k$ 的数字三角阵列定义为 p(n,m)。由此，我们可以把一元分拆函数的计算方法推广到二元分拆函数的计算。

5.2.一元级数的代数式

首先观察一元分拆函数。在无穷乘积

$X=(1+x^1z)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$

的展开级数中，项 $x^{12}z^3$ 的系数 7 是分拆函数 $p_3(12)$。它表示项 $x^{12}z^3$ 的系数来源于下面 7 种不同的 3 个因式的乘积：

$(1+x^1z)(1+x^2z)(1+x^9z)$，$(1+x^1z)(1+x^3z)(1+x^8z)$，$(1+x^1z)(1+x^4z)(1+x^7z)$，$(1+x^1z)(1+x^5z)(1+x^6z)$

$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^7z)$，$(1+x^2z)(1+x^4z)(1+x^6z)$，$(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)$

Euler 用下面分拆函数的等式表示上述意义。

$p_3(12)=1\cdot2\cdot9+1\cdot3\cdot8+1\cdot4\cdot7+1\cdot5\cdot6+2\cdot3\cdot7+2\cdot4\cdot6+3\cdot4\cdot5=7$（种）

这种用整数代替因式，用整数的分拆函数代替级数中系数来源的形式，Euler 称之为数的分拆，我们称为代数式和代数[9]，它与用字符代替数字的常规约定不会产生混淆。

5.3. 二元因子的代数

下面我们把这种表示方法推广到二元分拆函数。

尽管一元分拆函数的代数式对描述因式乘积展开为级数的过程非常好用，但这种表示方法对二元分拆函数不能直接使用。下面的方法可以解决 $p_k(n,m)$的表达式问题。

我们用 $r\geqslant m+\Phi$ 表示确定的列数，然后置因式（$1+x^n y^m$）于第 sn 行，第 t 列，记为数字 snr+t，$t\leq r$；再置不存在的因式（即因式 1+0z）为 Euler 偏序集中的 ϕ，并用它的对数值$\ln\phi=0$表示；由此形成二元因式的代数式。

例题 4.1：用代数的方法求解 p(5,3)。

为了求解 p(5,3)，不妨令 r=4。那么，在第 n=1 行中，我们用数字 4 表示因式(1+x)，用数字 5 表示因式(1+y)，不存在数字 6，7 的因式；在第 n=2 行中，用数字 8 表示因式$(1+x^2)$，用数字 9 表示因式(1+xy)，用数字 10 表示因式$(1+y^2)$，不存在数字 11 的因式；等等。表 3 列出这种因式与代数的关系如下：

[8] 有关 Ramsey 数的文献基本都是围绕着上述对应关系研究的。特别是概率方法的引入，给出了上限的良好估值。

[9] 我们在旧式的意义下使用"代数"这个词，其中包含幂级数以及无穷乘积的初等函数。"代数"的使用可以涉及极限的过程，就这个单词的严格意义来说，"代数"关系都是解析的

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

Table 3. Factors and Numbers Table of One-to-One Transformation（r=4）
表 3. 因式乘积的代数表（r=4）

	m=Φ	m=1	m=2	m=3
n=ϕ		1(1+0z)	2(1+0z)	3(1+0z)
n=1	4(1+xz))	5(1+yz)	6(1+0z)	7(1+0z)
n=2	$8(1+x^2z)$	9(1+xyz)	$10(1+y^2z)$	11(1+0z)
n=3	$12(1+x^3z)$	$13(1+x^2yz)$	$14(1+xy^2z)$	$15(1+y^3z)$
n=4	$16(1+x^4z)$	$17(1+x^3yz)$	$18(1+x^2y^2z)$	$19(1+xy^3z)$
n=5	$20(1+x^5z)$	$21(1+x^4yz)$	$22(1+x^3y^2z)$	$23(1+x^2y^3z)$
n=6	$24(1+x^6z)$	$25(1+x^5yz)$	$26(1+x^4y^2z)$	$27(1+x^3y^3z)$
n=7	$28(1+x^7z)$	$29(1+x^6yz)$	$30(1+x^5y^2z)$	$31(1+x^4y^3z)$
n=8	$32(1+x^8z)$	$33(1+x^7yz)$	$34(1+x^6y^2z)$	$35(1+x^5y^3z)$

说明：为了以后的拓展，我们用 m=Φ 替换 m=0；用 n= ϕ 替换 n=0。

因此，分拆函数 $p_k(5,3)$的代数式为：

$p_1(5,3)=35=1$（种）

$p_2(5,3)=4·31+5·30+8·27+9·26+10·25+12·23+13·22+14·21+15·20+16·19+17·18=11$（种）

$p_3(5,3)=4·5·26+4·8·23+4·9·22+4·10·21+4·12·19+4·13·18+4·14·17+4·15·16+5·8·22+5·9·21+5·10·20+$

$5·12·18+5·13·17+5·14·16+8·9·18+8·10·17+8·12·15+8·13·14+9·10·16+9·12·14+10·12·13=21$（种）

$p_4(5,3)=4·5·8·18+4·5·9·17+4·5·10·16+4·5·12·14+4·8·9·14+4·8·10·13+4·9·10·12+5·8·9·13+5·8·10·12=9$（种）

$p_{k\geqslant 5}(5,3)=0$（种）。

由此得到

$p(5,3)= p_1(5,3)+ p_2(5,3)+ p_3(5,3)+ p_4(5,3)=1+11+21+9=42$（种）

上面函数 p(5,3)的结果可以解释为，在不包含自然数 1,2,3,6,7,11 的条件下，拆数 35 的相异组合种数为 42。当不产生混淆时，可以去掉“相异”二字。

为了方便，存在因式的那一部分代数我们用复数的实部表示，不存在因式的那一部分代数用复数的虚部表示。这也和我们引言中对二元分拆的论述相一致。至此，我们给出了用代数式展开二元因式 XY 的乘积为级数的方法，它是整数分拆推广为代数数分拆的自然延伸。因此，展开一元因式 X 的乘积为级数的方法，都可以“移植”到展开二元因式 XY 的乘积。这种“移植”属于拓扑[10]。

4.3.二元因子代数的转置和拓扑性质

[10] “移植”是拓扑理论中，最简单的 Tietze 扩张[19]。为了简单明了，我们仅用分拆的语言描述“移植”的拓扑性质。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

为了简化整数分拆，可以把首项因式(1+xz)设定为代数 sr+t，并顺序写出其它因式的代数；式中 s,t 为确定的整数。显然，例题 4.1 给出的(r,s,t)=(4,1,0)或 (r,s,t)=(4,0,4)情形的代数式。

例题 4.2：求(r,s,t)=(4,0,1)情形的分拆函数 p(5,3)的值。

当(r,s,t)=(4,0,1)时，数字 1 表示因式(1+x)，用数字 2 表示因式(1+y)，不存在数字 3，4 的因式；在第 n=2 行中，数字 5 表示因式$(1+x^2)$，用数字 6 表示因式(1+xy)，用数字 7 表示因式$(1+y^2)$，不存在数字 8 的因式；等等。表 4 列出这种因式与代数的关系如下：

Table 4. Factors and numbers table of one-to-one transformation（r=4,t=1）
表 4. 因式乘积的代数表（r=4,t=1）

	m=Φ	m=1	m=2	m=3
n=1	1(1+xz)	2(1+yz)	3(1+0z)	4(1+0z)
n=2	$5(1+x^2z)$	6(1+xyz)	$7(1+y^2z)$	8(1+0z)
n=3	$9(1+x^3z)$	$10(1+x^2yz)$	$11(1+xy^2z)$	$12(1+y^3z)$
n=4	$13(1+x^4z)$	$14(1+x^3yz)$	$15(1+x^2y^2z)$	$16(1+xy^3z)$
n=5	$17(1+x^5z)$	$18(1+x^4yz)$	$19(1+x^3y^2z)$	$20(1+x^2y^3z)$
……				
n=8	$29(1+x^8z)$	$30(1+x^7yz)$	$31(1+x^6y^2z)$	$32(1+x^5y^3z)$

说明：为了以后的拓展，我们用 m=Φ 替换 m=0

分拆函数 $p_k(5,3)$的代数式为：

$p_1(5,3)$= 1（种）

$p_2(5,3)$=1·28+2·27+5·24+6·23+7·22+9·20+10·19+11·18+12·17+13·16+14·15=11（种）

$p_3(5,3)$=1·2·23+1·5·20+1·6·19+1·7·18+1·9·16+1·10·15+1·11·14+1·12·13+2·5·19+2·6·18+2·7·17+

2·9·15+2·10·14+2·11·13+5·6·15+5·7·14+5·9·12+5·10·11+6·7·13+6·9·11+7·9·10=21（种）

$p_4(5,3)$=1·2·5·15+1·2·6·14+1·2·7·13+1·2·9·11+1·5·6·11+1·5·7·10+1·6·7·9+2·5·6·10+2·5·7·9=9（种）

$p_{k\geqslant 5}(5,3)$=0（种）。

由此得到

$p(5,3)= p_1(5,3)+ p_2(5,3)+ p_3(5,3)+ p_4(5,3)=1+11+21+9=42$

上面的结果可以解释为，在不包含数 3,4,8 的条件下，拆数 29 为 2 部分的相异组合种数有 11 种，拆数 26 为 3 部分的相异组合种数有 21 种，拆数 23 为 4 部分的相异组合种数有 9 种。类比得到：$p_1(5,3)$表示拆数 32 为自身的种数只有一种。显然，把表 3 得到的代数式中的每个数字都减 3 就是由表 4 得到的代数式。

容易发现：例题 4.1 和例题 4.2 中，$p_4(5,3)$用到的因式个数都是 11 个，分拆种数也都是 9 种。这是一种平移映射，类似的，保持数组(r,s,t)中的 s,t；增加 r 的值类似于旋转映射。当然，我们可以（同时）

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

选取更大的正整数组(r,s,t)给出 $p_k(n,m)$的代数式；在这种情况下，函数 $p_k(n,m)$的代数式用到的因式个数和分拆种数仍然是不变的。

需要强调的是：**由哥德尔原理知道，我们可以把数视为一个函数，把分拆 $p_k(n,m)$视为 k 的导数；那么由数组(r,s,t)确定的代数表，给出的就是这个函数导数的加法表和乘法表（个位数的运算法则）。减少首项因式(1+xz)前面的代数属于加法；增加 r 值的代数属于乘法。这种广义的加法表和乘法表既可以是有限的，也可以是无穷的；这是一种映射[11]。明白了这一点，由此解决一些困难的问题就得心应手了[11]。**

把整数组推广为有理数组(r,s,t)的情形，属于拓扑研究的范围[9,20]，不属于我们讨论的内容。由于有理数是可数集合，因此除了需要给出这种推广的解释，它的正确性是毋庸置疑的[12]。

当$r > \min\{n, m\}$时，数组(r,s,t)唯一确定了 XY 的因式在代数表中的位置，因此整数数组(r,s,t)的变化规律是位置分析（Analysis situs）[13]。

值得注意的是，在函数 $p_4(5,3)$的组合种数

$p_4(5,3)=1·2·5·15+1·2·6·14+1·2·7·13+1·2·9·11+1·5·6·11+1·5·7·10+1·6·7·9+2·5·6·10+2·5·7·9=9$

的代数式中，最大数是 15（项 1·2·5·15 中的最大数），不是分拆数 23。代数式用到的因式代数也不是连续的。

实际上，$p_4(5,3)$用到的因式代数只有：1,2,5,6,7,9,10,11,13,14,15；总共 11 个代数。每一个代数加 3 就是位置函数(r,s,t)=(4,1,0)情形下的代数。仅增加 r 值也有类似的结论。

比较代数表 3 和代数表 4，我们可以简单乏味的推出下面的命题 4.1，4.2。

命题 4.1： 当 r>m，(r,s,t)=(r,1,0)时，拆数 nr+m 为两部分，存在因式的那一部分代数的 k 项组合的种数等于分拆函数 $p_k(n,m)$的数值。

命题 4.2： 当 r>m，(r,s,t)=(r,0,1)时，拆数 (n+m)(1+m)+(1−k)m 为两部分，存在因式的那一部分代数的 k 项组合的种数等于分拆函数 $p_k(n,m)$的数值。

利用对称性 $p_k(n,m)= p_k(m,n)$，我们转换得到命题 4.2 的等价命题如下：

命题 4.3： 当 r>n，(r,s,t)=(r,0,1)时，拆数 (m+n)(1+n)+(1−k)n 为两部分，存在因式的那一部分代数的 k 项组合种数等于分拆函数 $p_k(n,m)$的数值。

对更一般的情形，合并命题 4.1、命题 4.2 和命题 4.3 我们得到

定理 4.1： 当 max{n,m}> r >min{n,m}时，对任意的有理数组(r,s,t)，可以拆整数为两部分，存在因式的那一部分代数的 k 项组合种数等于分拆函数 $p_k(n,m)$的数值。

命题 4.3 给出的是角阵的转置[21]，但是分拆函数 $p_k(n,m)$与 $p_k(m,n)$ 的代数及代数式的对应关系并不是显然的。因此，在命题 4.2 和命题 4.3 中，我们不能用代数表(r,s,t)=(r,0,1)或(r,s,t)=(r,1,0)说明分拆函数

11 本文作者在“超 Bell 多项式的一般性质”一文中，已经使用了这个原理。
12 我们在后面需要的时候，直接应用这种推广，不作说明。
13 位置函数本质上是一种单位由 sr+t 确定的 r 进制，因此代数表可以理解为 r 进制的广义乘法表。关于位置函数的更多理论可参看[25]

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p_4(7,3)$与 $p_4(3,7)$的代数式对应关系。而利用定理 4.1 却可以做到这一点，后面的许多重要结论都是定理 4.1 的变形。

6. 二元分拆函数 p(n,m)的递推计算

6.1. 线性递推

利用代数式求解二元乘积函数 XY 的展开，尽管简单了许多，但这种方法仍然属于枚举法，也不能程序化的计算出 XY 展开式中的高次项系数 p(n,m)。为了解决这个问题，我们下面介绍一种递推求解高次项系数的方法。

由于二元分拆函数和一元分拆函数的原理、方法和结论的证明过程几乎完全一致。因此对两者区别不大的结论，我们仅指出并用例题说明二元分拆函数的结论；对两者区别比较大的结论，我们仅证明两者不同的部分，完整的证明可参见一元情况的相关证明[1,2,3,4]。

我们首先考察分拆函数 p(n,m)和 $p_k(n,m)$这两种最简单的情形，容易发现分拆函数 p(n,m)的以下两个性质：

性质 5. 1：当 m=1 时，

$$p(n,1)=\sum_{k=0}^{n-1}p(n)$$

性质 5. 2：当 n>m 时，二元分拆函数 p(n,m)存在下面的关系式

$$p(n,m)=p(n-m-1,m)+p(n-1,m-1) \tag{4}$$

它是由性质 1 和一元分拆函数 $p_k(n)$的递推法则得到的。

例题 5.1: 列出 p(4,1)=p(0)+p(1)+p(2)+p(3)=1+1+2+3=7 的 7 种简单关系式

(Φ)○(4)

(Φ，1) ○(3，1)

(Φ，2) ○(2，1)

(Φ，1) ○(2，2)

(Φ，1，1) ○(1，1，2)

(Φ，3) ○(1，1)

(Φ，1) ○(1，3)

式中空集 Φ=1，且 7 种卷积的值都等于 4。

但是仅利用关系式(4)，我们不能通过简单的递推，得到所有 p(n,m)的值。因此我们需要对确定的 m，分别找出它们的线性递推关系。再利用下面的关系式求解 p(n,m)的值。

$p(n,m)=p_1(n,m) + p_2(n,m) + p_3(n,m) + p_4(n,m) + p_5(n,m) + \cdots$

6.2.分拆函数 pk (n,1)的计算

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

当 m=1 时，二元分拆函数存在与一元分拆函数非常相似的递推法则

$$p_k(n,1) = p_k(n-k+1,1) + p_{k-1}(n-k+1,1)$$

或

$$p_k(n+k-1,1) = p_k(n,1) + p_{k-1}(n,1)$$

由此很容易得到下面的表 3。

Table 5. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n,1)$
表 5. 分拆函数$p_k(n,1)$的递推计算表

n	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	K=7
Φ	1						
1	1	1					
2	1	2					
3	1	3	1				
4	1	4	2				
5	1	5	4				
6	1	6	6	1			
7	1	7	9	2			
8	1	8	12	4			
9	1	9	16	7			
10	1	10	20	11	1		
11	1	11	25	16	2		
12	1	12	30	23	4		
13	1	13	36	31	7		
14	1	14	42	41	12		
15	1	15	49	53	18	1	
16	1	16	56	67	27	2	
17	1	17	64	83	38	4	
18	1	18	72	102	53	7	
19	1	19	81	123	71	12	
20	1	20	90	147	94	19	
21	1	21	100	174	121	29	1
22	1	22	110	204	155	42	2
23	1	23	121	237	194	60	4
24	1	24	132	274	241	83	7
25	**1**	**12**	**40**	**54**	**30**	**5**	

表 4 告诉我们，对于已知的平凡初值 $p_1(n,1)=1$，分拆函数 $p_k(n,1)$的其它任意值都可以由它前面 k−1 行相邻两项的函数和推出。更一般的，我们定义这类递推如下：

定义 5.1: 已知分拆函数 $p_k(n,r)$的一些平凡初值；对确定的整数 r 和 c，若其它任意分拆函数均可以由公式递推得到

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p_k(n,r) = p_k(n-k+c,r) + p_{k-1}(n-k+c,r)$

那么，称这种递推为线性递推`，称函数 $p_k(n,r)$为线性分拆函数。

显然，c=0 是一元分拆函数的情形，c=1 是二元分拆函数 $p_k(n,1)$的情形。利用加法公式

$p(n,1)=p_1(n,1) + p_2(n,1) + p_3(n,1) + p_4(n,1) + p_5(n,1) +\cdots$

由表 5 就计算出 p(n,1)的值。

与 Euler 发现五角数定理类似的，由公式

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p_k(n,1)$$

得到的递推尺度为：

1,+1,0,−1,−1,−1,0,0,+1,+1,+1,+1,+1,0,0,0,−1,−1,−1,−1,−1,−1,−1,0,0,0,0,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,0,0,0,0,0,−1, −1,−1,−1,−1,−1,−1,−1, −1,0,0,0,0,0,0, +1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1,+1, +1,+1,⋯⋯

仔细观察可以发现：递推尺度的规律是，首项为全集 Φ=1，然后用自然数个数的 0，逐步分割连续的奇数个+1 或−1。去掉第一项全集 Φ=1 项以后，我们可以解读递推尺度为：一个+1，三个−1，五个+1，七个−1，九个+1，等等。

递推尺度非常类似于 Leibniz 公式[14]：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{+2}{1}+\frac{-2}{3}+\frac{+2}{5}+\frac{-2}{7}+\frac{+2}{9}+\frac{-2}{11}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^{2n}\cdot 2}{2n-1}$$

另一方面，我们知道 Wallis 公式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots$$

的乘积收敛的非常慢，为了得到更快计算形式，我们简单变形为下面的级数形式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\frac{1}{2^3 4^2}+\frac{3^2}{2^3 4^2 6^2}+\frac{3^2 5^2}{2^3 4^2 6^2 8^2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3 4^2}+\frac{3^2}{2^3 4^2 6^2}+\frac{3^2 5^2}{2^3 4^2 6^2 8^2}+\cdots$$

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^2 4^2}-\frac{3^2\cdot 5}{2^2 4^2 6^2}-\frac{3^2 5^2 7}{2^2 4^2 6^2 8^2}-\frac{3^2 5^2 7^2 9}{2^2 4^2 6^2 8^2 10^2}+\cdots$$

再利用两个恒等式的权重我们得到收敛快得多的级数，例如，我们取两个公式的权重为 3/4,1/4 时，可以得到收敛快得多的级数如下：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3 4^2}+\frac{3^2}{2^3 4^2 6^2}+\frac{3^2 5^2}{2^3 4^2 6^2 8^2}+\cdots\right)$$

[14] 它也给出 Leibniz 公式的另一种证明方法，篇幅原因，本文略去详细证明过程。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2^2}-\frac{3}{2^24^2}-\frac{3^2\cdot 5}{2^24^26^2}-\frac{3^25^27}{2^24^26^28^2}-\frac{3^25^27^29}{2^24^26^28^210^2}+\cdots\right)$$
$$=\frac{9}{16}+\frac{9}{8}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n-1)^2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2$$

再令：$\frac{1}{0}=-i^2=I_0,\left(\frac{1}{2}\right)^2=I_1,\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2=I_2,\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2=I_3,\cdots$，由此得到

定理 5.1: 圆周率存在如下的单向逼近的级数形式：

$$\frac{2}{\pi}=\frac{9}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_0\cdot I_n}{(n+1)(2n-1)^2}$$

它也是一个与递推尺度相似的形式。当然，我们用其它数值也可以替换权重 3/4,1/4，得到类似命题 5.1 的级数形式；但都过于复杂，后面再继续这个问题的讨论。

最后我们把 Leibniz 公式和命题 5.1 合并在一起，得到了有理数和有理虚数（它们统称为高斯整数）的关系式如下：

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}=\frac{9}{16}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i)^{2n}\cdot 2}{2n-1}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{I_0\cdot I_n}{(n+1)(2n-1)^2}=1$$

它表示的是复平面上面积为单位的格点三角形的性质，与 Ford 圆、Lucas 平衡数相关[22]。然而，现在无法用代数或几何语言给出这些结论的详细解释。在这里我们仅知道，递推尺度是级数公式中分母的一种组合形式。

顺便指出，当把命题 5.1 的圆周率级数表达式转换为积分的形式时[23]，积分函数在 n=1/2 处存在一个孤立奇点，是可去奇点；因此定理 5.1 中，可以简单的取 $I_0=1$ 来计算圆周率。容易发现，它与黎曼零点密切相关。

6.3. 分拆函数 pk (n,2)的计算

当 m=2 时，不存在简单的递推法则，但是下面的方法可以解决这问题。因为每一项的 y^2 有两种分拆方式:自身 y^2 和 $y\cdot y$，记为 $p_k(n;2)$和 $p_k(n;1,1)$。由于两种分拆方式[15]分别都存在系数为 1 的简单递推法则如下：

$$p_k(n;2)=p_k(n-2;2)+p_{k-1}(n-2;2)$$
$$p_k(n;1,1)=p_k(n-1;1,1)+p_{k-1}(n-1;1,1)$$

因此我们可以分别计算这两种形式的分拆函数。下面是它的计算过程：

Table 6. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n;2)$ and $p_k(n;1,1)$
表 6. 分拆函数 $p_k(n;2)$和 $p_k(n;1,1)$的递推计算表

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
	k=1	K=2	k=3	k=4	k=5
$p_k(\Phi;2)$	1				

[15] 注意两种分拆函数 $p_k(n,2)$和 $p_k(n;2)$的区别。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p_k(\Phi;1,1)$	ϕ				
$p_k(1;2)$	1	1			
$p_k(1;1,1)$	ϕ	1			
$p_k(2;2)$	1	2			
$p_k(2;1,1)$	ϕ	1	1		
$p_k(3;2)$	1	3	1		
$p_k(3;1,1)$	ϕ	2	2		
$p_k(4;2)$	1	4	2		
$p_k(4;1,1)$	ϕ	2	4	1	
$p_k(5;2)$	1	5	4		
$p_k(5;1,1)$	ϕ	3	6	2	
$p_k(6;2)$	1	6	6	1	
$p_k(6;1,1)$	ϕ	3	9	5	
$p_k(7;2)$	1	7	9	2	
$p_k(7;1,1)$	ϕ	4	12	8	1
$p_k(8;2)$	1	8	12	4	
$p_k(8;1,1)$	ϕ	4	16	14	2
$p_k(9;2)$	1	9	16	7	
$p_k(9;1,1)$	ϕ	5	20	20	5
$p_k(10;2)$	1	10	20	11	1
$p_k(10;1,1)$	ϕ	5	25	30	9
注：表中 ϕ=0					

合并同类项，得到表 7

Table 7. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n,2)$
表 7. 分拆函数 $p_k(n,2)$的递推计算表

n	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	K=7	K=8
Φ	1							
1	1	2						
2	1	3	1					
3	1	5	3					
4	1	6	6	1				
5	1	8	10	2				
6	1	9	15	6				
7	1	11	21	10	1			
8	1	12	28	18	2			
9	1	14	36	27	5			
10	1	15	45	41	10			
11	1	17	55	56	18	1		
12	1	18	66	78	29	2		
13	1	20	78	101	46	5		
14	1	21	91	132	68	9		

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

15	1	23	105	165	98	18		
16	1	24	120	207	136	29	1	
17	1	26	136	251	186	48	2	
18	1	27	153	306	245	72	5	
19	1	29	171	363	320	109	9	
20	1	30	190	432	409	165	17	
21	1	32	210	504	517	220	29	
22	1	33	231	589	644	299	48	1
23	1	35	253	677	794	406	74	2
24	1	36	276	780	967	534	113	5
25	1	12	40	54	30	5		

例题 5.1: 由表 6 和表 7 分别计算 p(4,2)的值

$$p(4,2)=p_1(4;2)+p_2(4;2)+p_3(4;2)+p_2(4;1,1)+p_3(4;1,1)+p_4(4;1,1)$$

$$=1+4+2+2+4+1=14$$

$$p(4,2)=p_1(4,2)+p_2(4,2)+p_3(4,2)+p_2(4,4)=1+6+6+1=14$$

由于表 6 把两个线性函数的掺合在了一起，因此我们不能直观上看出表 7 中数值的递推法则。但是我们简单计算可以发现，表 7 对应着定义 5.1 中的一个确定实数 c，且 1<c<2。尽管由函数的连续性可以判断这个结论是正确的，然而求解 c 值却是极其困难的。

顺便说，求解定理 5.1 的权重 3/4,1/4，替换为区间（1/4,3/4）中两个新的权重是求解 c 值的一个途径。实际上，求解 c 值，远远超出了本文的范围，也不是一篇论文可以说清楚的，不再赘述。

另一方面，也可以利用公式

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p_k(n,2)$$

求出产生级数的递推尺度为：

1，−1，−1，−1，0，+1，+1，+2，+1，+1，0，0，−2，−1，−2，−2，−2，−1，−1，0，0，+1，2，2，2，2，3，2，2，1，1，0，0，−1，−1，−3，−2，−3，−2，−3，−3，−3，−2，−2，−2，−1，0，0，⋯

显然，这些是由两种线性递推的和得来的。从这些递推尺度的数字中，容易发现，去掉第一项全集 Φ=1 以后，存在下面两个重要规律

A：递推尺度为 0 的个数是：1，2，2，⋯。我们可以解读为：有且仅有第

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{n^3-1}{n-1}\pm\frac{1}{2}=\frac{3n^2+3n+3\pm1}{2}$$

项的递推尺度为 0。它逐步分割连续的 3 个、6 个、9 个、12 个、以及更多不等于 0 的项。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

B：递推尺度的 0，分割出来的不等于 0 的每一类的代数和分别为 2^2，-3^2，4^2，-5^2，⋯。并且每一类的最大正值或最小负值分别为 2，−3，4，−5，6，⋯。它与文献[7]中 M 角数的映射性质非常类似，但沿用 M 角数的方法研究这个问题晦涩难懂，不在本文内讨论。

上述两个性质告诉我们，不等于 0 的每一类代数和又可以分拆为两组，每一组的最大正值或最小负值可以用代数和的开方来表示。

容易发现，递推尺度非常类似于 Euler 解决 Bernoulli 难题的公式[16]：

命题 5.1:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{-1}{(-1)^3}+\frac{+2}{(+2)^3}+\frac{-3}{(-3)^3}+\frac{+4}{(+4)^3}+\cdots$$

然而，对这个漂亮的结论，至今人们也没有给出代数上的或几何上的解释。在这里我们仅指出，递推尺度是上面的公式中分母的一种组合形式。

上面的两个规律深刻揭示了分拆函数 p(3,3)和 R(4,4;2)临界图的代数关系。由递推规律可以看出，p(3,3)的递推公式是由若干个线性递推公式的和组成的，属于三维空间的线性分拆函数。其中也包括了递推尺度是 Bernoulli 难题的微积分形式。

6.4. 对 m≥3 的分拆函数 pk (n,m)的计算

相同的，当 m=3 时，每一项的 y^3 有 3 种分拆方式:自身 y^3、$y^2\cdot y$ 和 $y\cdot y\cdot y$；当 m=4 时，每一项的 y^4 有 5 种分拆方式:自身 y^4、$y^3\cdot y$、$y^2\cdot y^2$ 、$y^2\cdot y\cdot y$、和 $y\cdot y\cdot y\cdot y$；等等。对于任意 m，有 $p_0(m)$种分拆方式。都可以采用上面的方法递推计算。下面是 m=3,4 时，二元分拆函数三种形式的计算及合并结果[17]。

Table 8. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n,3)$
表 8. 分拆函数 $p_k(n,3)$的合并递推计算表

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
$p_k(\Phi;3)$	1				
$p_k(\Phi;2,1)$	ϕ	1			
$p_k(\Phi;1,1,1)$	ϕ				
$p_k(\Phi,3)$	1	1			
$p_k(1;3)$	1	1			
$p_k(1;2,1)$	ϕ	2	1		
$p_k(1;1,1,1)$	ϕ				
$p_k(1,3)$	1	3	1		
$p_k(2;3)$	1	2			

16 它也给出 Euler 公式的另一种证明方法，篇幅原因，本文略去详细证明过程。

17 表 7 应用于代数求解 R(4,4,2)的临界图时，等价于 Ramannjan 提出的并由 Mordell 证明的本文第 2 节的公式。类似的，表 8 可以应用于代数求解 R(5,5,2)的临界图[24]，显然存在下面的ω(nm)的性质。但这种方法过于复杂,属于 ABC 猜想的一部分。不再赘述

$$xy\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n y^m)^{48}=\sum_{nm=1,n>m}^{\infty}\omega(nm)\,(xy)^{nm},\quad \sum_{nm=1}^{\infty}\omega(nm)(nm)^s=\prod_{(n,m)=1,n>m}(???)^{-nm}$$

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p_k(2;2,1)$	ϕ	3	3			
$p_k(2;1,1,1)$	ϕ					
$p_k(2,3)$	1	5	3			
$p_k(3;3)$	1	3	1			
$p_k(3;2,1)$	ϕ	4	6	1		
$p_k(3;1,1,1)$	ϕ		1			
$p_k(3,3)$	1	7	8	1		
$p_k(4;3)$	1	4	2			
$p_k(4;2,1)$	ϕ	5	10	3		
$p_k(4;1,1,1)$	ϕ		1	1		
$p_k(4,3)$	1	9	13	4		
$p_k(5;3)$	1	5	4	7		
$p_k(5;2,1)$	ϕ	6	15			
$p_k(5;1,1,1)$	ϕ		2	2		
$p_k(5,3)$	1	11	21	9		
$p_k(6;3)$	1	6	6	1		
$p_k(6;2,1)$	ϕ	7	21	13	1	
$p_k(6;1,1,1)$	ϕ		3	4	1	
$p_k(6,3)$	1	13	30	18	2	
$p_k(7;3)$	1	7	9	2		
$p_k(7;2,1)$	ϕ	8	28	22	3	
$p_k(7;1,1,1)$	ϕ		4	7	2	
$p_k(7,3)$	1	15	41	31	5	
$p_k(8;3)$	1	8	12	4		
$p_k(8;2,1)$	ϕ	9	36	34	7	
$p_k(8;1,1,1)$	ϕ		5	11	5	
$p_k(8,3)$	1	17	53	49	12	
注：ϕ=0						

Table 9. The Algorithm of Recursive with Partitions $p_k(n,4)$
表 9. 分拆函数 $p_k(n,4)$的递推计算表

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	K=6
$p_k(\Phi;4)$	1					
$p_k(\Phi;3,1)$	ϕ	1				
$p_k(\Phi;2,2)$	ϕ					
$p_k(\Phi;2,1,1)$	ϕ					
$p_k(\Phi;1,1,1,1)$	ϕ					
$p_k(\Phi,4)$	1	1				
$p_k(1;4)$	1	1				

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

p_k (1;3,1)	ϕ	2	1			
p_k (1;2,2)	ϕ	1				
p_k (1;2,1,1)	ϕ		1			
p_k (1;1,1,1,1)	ϕ					
p_k(1,4)	1	4	2			
p_k (2;4)	1	2				
p_k (2;3,1)	ϕ	3	3			
p_k(2;2,2)	ϕ	1	1			
p_k(2;2,1,1)	ϕ		2			
p_k(2;1,1,1,1)	ϕ					
p_k(2,4)	1	6	6			
p_k (3;4)	1	3	1			
p_k (3;3,1)	ϕ	4	6	1		
p_k(3;2,2)	ϕ	2	2			
p_k(3;2,1,1)	ϕ		4	3		
p_k(3;1,1,1,1)	ϕ					
p_k(3,4)	1	9	13	4		
p_k (4;4)	1	4	2			
p_k (4;3,1)	ϕ	5	10	3		
p_k(4;2,2)	ϕ	2	4	1		
p_k(4;2,1,1)	ϕ		6	7	1	
p_k(4;1,1,1,1)	ϕ					
p_k(4,4)	1	11	22	11	1	
p_k (5;4)	1	5	4			
p_k (5;3,1)	ϕ	6	5	7		
p_k(5;2,2)	ϕ	3	6	2		
p_k(5;2,1,1)	ϕ		9	13	3	
p_k(5;1,1,1,1)	ϕ					
p_k (5,4)	1	14	34	22	3	
p_k (6;4)	1	6	6	1		
p_k (6;3,1)	ϕ	7	21	13	1	
p_k(6;2,2)	ϕ	3	9	5		
p_k(6;2,1,1)	ϕ		12	22	8	
p_k(6;1,1,1,1)	ϕ			1		
p_k(6,4)	1	16	48	42	9	
p_k(7;4)	1	7	9	2		
p_k(7;3,1)	ϕ	8	28	22	3	
p_k(7;2,2)	ϕ	4	12	8	1	
p_k(7;2,1,1)	ϕ		16	34	16	1
p_k(7;1,1,1,1)	ϕ			1	1	
p_k(7,4)	1	19	65	67	21	1
p_k (8;4)	1	8	12	4		
p_k (8;3,1)	ϕ	9	36	34	7	

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$p_k(8;2,2)$	ϕ	4	16	14	2	
$p_k(8;2,1,1)$	ϕ		20	50	30	3
$p_k(8;1,1,1,1)$	ϕ			2	2	
$p_k(8,4)$	1	21	84	104	41	3

更一般的，每一种二元分拆函数 $p_k(n;\ m_1,m_2,\cdots,m_r)$都有简单的递推法则。因此，我们只需要计算几个简单的函数初值，就可以递推的得到其它的函数值，进一步也就得到了向量 A，B，C，D，…。第 3 节给出的$(XY)_{z=1}$的角阵就是用这种方法计算得到的。不再赘述。

当 r≥4 时，由分拆函数 $p_k(n;\ m_1,m_2,\cdots,m_r)$求和可以得到的 $p_k(n,m)$，但不存在简单的递推尺度。进而言之，当 r≥4 时，递推尺度中 0 的个数是有限的。在这里我们只作为结论给出，不阐述它的原理。

7. 二元分拆函数的 pk(n;m1, m2,⋯, mr)的向量计算

可以利用二元函数的角阵对称性，把分拆函数 $p_k(n;\ m_1,m_2,\cdots,m_r)$更进一步的细分或插值，公式(6)给出了这种细分的顺序。也就是说，我们给出了线性的求法，使得角阵列的数值逐步加密。在这个过程中，尽管代数表起着关键的作用，但是种数又是与代数表无关的量。

下面我们用例题来说明这个性质，先看一个简单的例子

例题 6.1: 求函数 XY 展开式中的项 $x^5y^3z^3$ 的系数 $p_3(5,3)$，要求其表达形式与代数表的选取无关。

显然，我们分别求出 3 种分拆方式 $p_3(5;3)$, $p_3(5;2,1)$, $p_3(5;1,1,1)$的种数，再把它们加在一起，就是 $p_3(5,3)$。$p_3(5;3)$的分拆由下面的四种情形：

$(1+y^3z)(1+x^4z)(1+x^1z)$，$(1+y^3z)(1+x^3z)(1+x^2z)$，$(1+y^3x^1z)(1+x^3z)(1+x^1z)$，$(1+ y^3x^2z)(1+x^2z)(1+x^1z)$

用代数表 4 表示为代数式如下：

12·9·5+12·13·1

+16·9·1

+20·5·1

把分拆种数按行数的种数记为向量的形式

(1+1+1)○(2+1+1)=4

相同的，$p_3(5;2,1)$的分拆的代数式为

7·2·17+7·6·13+7·10·9+7·14·5+7·18·1

+11·2·13+11·6·9+11·10·5+11·14·1

+15·2·9+15·6·5+15·10·1

+19·2·5+19·6·1

+23·2·1

它的向量形式为

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$(1+1+1+1+1)\circ(5+4+3+2+1)=15$

同理，$p_3(5;2,1)$的分拆向量为

$(1+1)\circ(1+1)=2$

由此得到 $p_3(5,3)$与代数表无关的向量表达式

$p_3(5,3)= p_3(5;3)+ p_3(5;2,1) +p_3(5;1,1,1)$

$= (1+1+1)\circ(2+1+1)+ (1+1+1+1+1)\circ(5+4+3+2+1)+ (1+1)\circ(1+1)$

$=21$

它的重要性在于这种形式可以做如下的推广

$p_3(6,3)= p_3(6;3)+ p_3(6;2,1) +p_3(6;1,1,1)$

$= (1+1+1+1)\circ(3+2+1+1)+ (1+1+1+1+1+1)\circ(6+5+4+3+2+1)+ (1+1+1)\circ(2+1+1)$

$=7+21+4=33$

$p_3(7,3)= p_3(7;3)+ p_3(7;2,1) +p_3(7;1,1,1)$

$= (1+1+1+1+1)\circ(5+3+2+1+1)+ (1+1+1+1+1+1+1)\circ(7+6+5+4+3+2+1)+ (1+1+1+1)\circ(3+2+1+1)$

$=12+28+7=47$

……

式中的每一个代数向量都是 $p_1(n,m)$, $p_2(n,m)$中相邻的值。

再看一个复杂一点的例题

例题 6.2: 函我们可以不太困难的得到函数 $p_5(n;2,2,1,1,1)$的向量表达形式如下：

$p_5(1;2,2,1,1,1)=(1) \circ(1)=1$

$p_5(2;2,2,1,1,1)=(1+1) \circ(1+1)=2$

$p_5(3;2,2,1,1,1)=(1+1+2) \circ(2+1+1)=5$

$p_5(4;2,2,1,1,1)=(1+1+2+2) \circ(3+2+1+1)=9$

$p_5(5;2,2,1,1,1)=(1+1+2+2+3) \circ(4+3+2+1+1)=16$

$p_5(6;2,2,1,1,1)=(1+1+2+2+3+3) \circ(5+4+3+2+1+1)=25$

$p_5(7;2,2,1,1,1)=(1+1+2+2+3+3+4) \circ(6+5+4+3+2+1+1)=39$

$p_5(8;2,2,1,1,1)=(1+1+2+2+3+3+4+4) \circ(7+6+5+4+3+2+1+1)=56$

……

式中前面的向量顺序取自表 1 的 k=2 列的相邻数，后面的向量反向顺序取自表 1 的 k=3 列的相邻数。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

上面两个例题给出的向量表达式，都可以回溯到乘积因式 XY 展开为级数那里得到解释和证明。但证明过程枯燥乏味，不再赘述。

最后，我们利用类似的原理和性质 5.1，给出一个比较复杂的向量递推公式

例题 6.3: 保持代数向量都是 $p_1(n,m)$, $p_2(n,m)$中相邻的值的条件下，给出函数 $p_5(n,3)$的向量表达形式。

$p_5(5,3)= (1) \circ (1)=1$

$p_5(6,3)=(1+1) \circ (2+1) =3$

$p_5(7,3)=(1+1+2) \circ (3+2+1) =7$

$p_5(8,3)=(1+1+2+3) \circ (4+3+2+1) =14$

$p_5(9,3)=(1+1+2+3+4) \circ (5+4+3+2+1) =25$

$p_5(10,3)=(1+1+2+3+4+5) \circ (6+5+4+3+2+1)=41$

$p_5(11,3)=(1+1+2+3+4+5+7) \circ (7+6+5+4+3+2+1)=64$

$p_5(12,3)=(1+1+2+3+4+5+7+8) \circ (8+7+6+5+4+3+2+1)=95$

$p_5(13,3)=(1+1+2+3+4+5+7+8+10) \circ (9+8+7+6+5+4+3+2+1)=136$

……

式中前面的向量顺序取自表 1 的 k=3 列的相邻数，后面的向量反向顺序取自表 5 的 k=2 列的相邻数。

上面 3 个例题都是对线性递推表格的合并。我们仅知道 $p_k(n,m)$和 $p_k(n;m_1,m_2,\cdots)$存在与代数表无关的向量表达式就可以了。

顺便说， 寻找向量形式的递推过程，需要用到 n, m 是否互素的性质。对于较大的指数 m_k，这种计算并不比表格的计算简单。

然而，它揭示的下面的两个性质是非常重要的。第一，两个向量是可以交换的；第二，任意分拆函数 $p_k(n_1,n_2,\cdots,n_r; m_1,m_2,\cdots,m_r)$都可以表示表 2 或表 5 中列向量的乘积（可以是多个向量的乘积）形式。这两个性质来源于下面的定理：

Carlitz 定理: 分拆函数 $\pi_1(n,m)$可以由下面的表达式确定。

$$\sum_{n,m\geq 0} \pi_1(n,m)x^n y^m = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2n}y^{2m})(1-x^{n-1}y^m)(1-x^n y^{m-1})}$$

式中 $\pi_1(n,m)$表示(n,m)分拆为所有形为(2a,2a)，(a−1,a)，(a,a−1)的种数。

第一个性质是由 Carlitz 定理中(2a,2a)，(a−1,a)，(a,a−1)的三种形式可交换性质得到的。第二个性质是 Carlitz 定理的推论。

至此，除了没有把 $p_I(n)$推广到 $p_I(n,m)$，我们把其它一元分拆函数的计算方法怎样推广到了二元分拆函数 XY 都讲清楚了。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

特别需要指出的是，当 m=n 时，是推广的一个特例；并且与 p(n,n)= p_f(n,n)等价的性质给出的是拉姆赛数 R(n,n;2)的临界图。由此可以得到最简单的未知拉姆赛数 R(5,5;2)=p(5,5)+1=46+1=47。实际上，如果把无穷因式的乘积

$$Z=(1+x^a y^\alpha z)\left(1+x^b y^\beta z\right)(1+x^c y^\gamma z)\cdots$$

中的 a,b,c,⋯视为面积的增量，把$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$视为幅角的增量；那么，对有限个 Gauss 整数，利用反向的过程求解 R(5,5;2)的临界图已经不存在困难了。即使如此，其计算过程的复杂和计算量的巨大仍然是计算机无法胜任的。令人欣慰的是，一方面，文献[11]中 M 角数格点在椭球面上的拓扑映射为我们提供了凸曲面分割的直观解释；另一方面，引言中的例题 1.1 已经为我们求解 R(5,5;2)的临界图，演示了一个新方向。

8. R(5,5;2)=47 的简单计算

8.1 R(5,5;2)=47 的证明原理

为了给出 R(5,5;2)的代数求法，我们需要研究数组(p(4,0),p(4,1))之间的插值。为此，我们首先建立同类项 $x^4y^4z^k$ 系数和 $y^4x^4z^k$ 系数共用的代数表。显然，$(XY)_{z=1}$ 展开式中项 $x^4y^4z^k$ 的系数等于因式(1+ x^4y^4z)的代数分拆的种数。由 $x^4y^4z^k$ 系数和 $y^4x^4z^k$ 系数的对称性，我们列出$(XY)_{z=1}$ 和$(YX)_{z=1}$ 共用的的代数表如下：

Table 10. Factors numbers $(XY)_{z=1}$and $(YX)_{z=1}$ table of one-to-one transformation
表 10. 因式$(XY)_{z=1}$ 和$(YX)_{z=1}$ 的共用代数表

	m=ϕ	**m=1**	**m=2**	**m=3**	**m=4**	**m=5**	**m=6**	**m=7**	**m=8**	**m=9**	**m=10**
n=Φ	ϕΦ	1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$	$\boxed{10}$
n=1	11	12	13	14	15	16	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$
n=2	22	23	24	25	26	27	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	$\boxed{30}$	$\boxed{31}$	$\boxed{32}$
n=3	33	34	35	36	37	38	$\boxed{39}$	$\boxed{40}$	$\boxed{41}$	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$
n=4	44	45	46	47	48	49	$\boxed{50}$	$\boxed{51}$	$\boxed{52}$	$\boxed{53}$	$\boxed{54}$
n=5	55	56	57	58	59	60	$\boxed{61}$	$\boxed{62}$	$\boxed{63}$	$\boxed{64}$	$\boxed{65}$
n=6	66	67	68	69	70	71	72	$\boxed{73}$	$\boxed{74}$	$\boxed{75}$	$\boxed{76}$
n=7	77	78	79	80	81	82	83	84	$\boxed{85}$	$\boxed{86}$	$\boxed{87}$
n=8	88	89	90	91	92	93	94	95	96	$\boxed{97}$	$\boxed{98}$
n=9	99	100	101	102	103	04	05	06	07	08	Φϕ

表 10 中 11 表示因式(1+xz)，12 表示因式(1+yz)，22 表示因式($1+x^2z$)，23 表示因式(1+xyz)，24 表示因式($1+y^2z$)，33 表示因式($1+x^3z$)；等等。数字 92 既可以表示的因式($1+x^4y^4z$)，又可以表示同类项 x^4y^4 来源于因子($1+x^4y^4z$)乘若干个(1+0)的因子。通常可以用第一行第一列的 ϕΦ 作替换表示($1+x^4y^4z$)自身的分拆。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

我们用表 11 的代数表列出 p(4, 4)的代数式可以解释为：由表 11 中正常数字 11, 12, 22, 23, 24, 33, … 相加（用符号·连接）为 92 的种数，ϕΦ 自身也是一种。例如：11·12·23·46 表示$(XY)_{z=1}$的展开式中有一项 $x^4y^4z^k$ 来源于四个因式(1+xz)，(1+yz)，(1+xyz)，$(1+x^2y^2z)$的乘积。

由此，我们得到 p(4, 4)的代数式如下：

同类项 $x^4y^4z^k$ 分拆种数代数式= p(4, 4)=

ϕΦ+11·81+12·80+22·70+23·69+24·68+33·59+34·58+35·57+36·56+44·48+45·47

+11·12·69+11·22·59+11·23·58+11·24·57+11·33·48+11·34·47+11·35·46+11·36·45+12·22·58+12·23·57+12·24·56

+12·33·47+12·34·46+12·35·45+12·36·44+22·23·47+22·24·46+22·34·36+23·24·45+23·33·36+23·34·35+24·33·35

+11·12·22·47+11·12·23·46+11·12·24·45+11·12·33·36+11·12·34·35+11·22·23·36+11·22·24·35+11·23·24·34

+11·24·33·34+12·22·23·46+12·23·24·33+11·12·22·23·24=46（种）

式中每一项乘积求和都等于 92。例如：乘积 11·12·33·36 求和 11+12+33+36=92。

我们还可以交换 x 和 y，用 109 减 $\boxed{X}$ 中的数字写出$(YX)_{z=1}$的展开式中新的同类项 $y^4x^4z^k$ 的分拆种数代数式。例如：乘积 11·12·33·36 的分项为 ϕΦ −11=109−11=$\boxed{98}$，109−12=$\boxed{97}$，109−33=$\boxed{76}$，109−36=$\boxed{73}$；因此乘积可以表示为 $\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{73}$。由此得到：

同类项 $y^4 x^4z^k$ 分拆种数代数式= p(4, 4)=

$\phi\Phi+\boxed{98}\cdot\boxed{28}+\boxed{97}\cdot\boxed{29}+\boxed{87}\cdot\boxed{39}+\boxed{86}\cdot\boxed{40}+\boxed{85}\cdot\boxed{41}+\boxed{76}\cdot\boxed{50}+\boxed{75}\cdot\boxed{51}+\boxed{74}\cdot\boxed{52}+\boxed{73}\cdot\boxed{53}+\boxed{65}\cdot\boxed{61}+\boxed{64}\cdot\boxed{62}$

$+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{40}+\boxed{98}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{50}+\boxed{98}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{51}+\boxed{98}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{52}+\boxed{98}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{61}+\boxed{98}\cdot\boxed{75}\cdot\boxed{62}+\boxed{98}\cdot\boxed{74}\cdot\boxed{63}+\boxed{98}\cdot\boxed{53}\cdot\boxed{64}+\boxed{97}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{51}$

$+\boxed{97}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{52}+\boxed{97}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{53}+\boxed{97}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{62}+\boxed{97}\cdot\boxed{75}\cdot\boxed{63}+\boxed{97}\cdot\boxed{74}\cdot\boxed{64}+\boxed{97}\cdot\boxed{73}\cdot\boxed{65}+\boxed{87}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{62}+\boxed{87}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{63}+\boxed{87}\cdot\boxed{75}\cdot\boxed{73}$

$+\boxed{86}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{64}+\boxed{86}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{73}+\boxed{86}\cdot\boxed{75}\cdot\boxed{74}+\boxed{85}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{74}+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{62}+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{63}+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{64}+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{73}$

$+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{75}\cdot\boxed{74}+\boxed{98}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{73}+\boxed{98}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{74}+\boxed{98}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{75}+\boxed{98}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{76}\cdot\boxed{75}+\boxed{97}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{63}$

$+\boxed{97}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{85}\cdot\boxed{76}+\boxed{98}\cdot\boxed{97}\cdot\boxed{87}\cdot\boxed{86}\cdot\boxed{85}=46$（种）

在这个表达式中，$\boxed{98}$ 表示因式(1+yz)，$\boxed{97}$ 表示因式(1+xz)，$\boxed{76}$ 表示因式$(1+y^3z)$，$\boxed{73}$ 表示因式$(1+x^3z)$。这种交换 x, y 得到的新的代数式，类似于余弦三角函数变成了正弦三角函数。

我们知道，Euler 最初用余弦函数的无穷个根证明了

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

本文仿照着类似的方法，给出 R(5, 5; 2)=47 的简单但不够严密的证明。

8.2 代数基本定理的对偶定理简介[18]

[18] 作者直接引用和说明了作者发现的几个简单结论。在涉及无穷的复数域，利用表 10 我们很容易直观的想象这些结论，并直接验证它们成立。由于证明非常困难，对这些结论的证明另文给出。可参见后续论文“代数基本定理的对偶定理”。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

Euler 在文献[1]中得到了：对于由前面相邻的连续两项确定的递推级数，可以找到方法 ，使得每项都可以由它的前一项，而不是前面连续两项推出 ，这是递推级数的一条重要性质。根据这条性质，从任何一项 P 都可推出其下一项 Q，若递推级数的前面两项为 A, B；且的递推尺度为 α,β，那么递推公式为：

$$Q=\frac{1}{2}\alpha P+\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta)P^2+(B^2-\alpha AB+\beta A^2)\beta^2}$$

虽然式中有根号，但不会得到无理数，因为递推级数的项都是有理的。

我们把“由前面邻近的连续两项确定的递推级数”推广为：“由前面不一定连续的两项确定的递推级数”并反过来研究这个问题，**发现了等价于定理 4.1 的递推结论：**

命题 7.1（代数基本定理的对偶定理）： 若递推级数由前面的第 m 项和第 n 项确定（不妨假定 m≤n），那么递推得到的极值可能不只一个，但最多有 n 个极值；并且极值的最多个数与前面有限项的取值无关。

为了得到比命题 7.1 更进一步的结果，我们给出项数 m, n 为有理数的递归定义如下：

定义 7.1: 令：n=max{m, n}，任意给定 2n 个有理数（有限项，有些可以是 0）

$$A_{-n},B_{-n},A_{-n+1},B_{-n+1},\cdots,A_{-1},B_{-1}$$

和确定的位置函数x_1,y_1,x_2,y_2；这里x_1表示前面第 m 项的分子位置，y_1表示前面第 m 项的分母位置，x_2表示前面第 n 项的分子位置，y_2表示前面第 n 项的分母位置；并且它们都是有理数[19]。

我们把递归的过程做如下定义：

$$A_0=x_1A_{-n}+x_2B_{-m},\quad B_0=y_1B_{-n}+y_2A_{-m}$$

$$A_1=x_1A_{-n+1}+x_2B_{-m+1},\quad B_1=y_1B_{-n+1}+y_2A_{-m+1}$$

$$A_2=x_1A_{-n+2}+x_2B_{-m+2},\quad B_2=y_1B_{-n+2}+y_2A_{-m+2}$$

$$\dots\dots,\quad \dots\dots$$

$$A_i=x_1A_{-n+i}+x_2B_{-m+i},\quad B_i=y_1B_{-n+i}+y_2A_{-m+i}$$

由此得到

$$K_0=\frac{A_0}{B_0}$$

$$K_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{x_1A_0+x_2B_0}{y_1B_0+y_2A_0}$$

$$K_2=\frac{A_2}{B_2}=\frac{x_1A_1+x_2B_1}{y_1B_1+y_2A_1}=\frac{(x_1^2+x_2y_2)A_0+(x_1x_2+x_2y_1)B_0}{(y_1^2+y_2x_2)B_0+(y_1y_2+y_2x_1)A_0}$$

$$\dots$$

[19] 为了简单明了，一般情况下假定为正有理数，

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$K_i = \frac{A_i}{B_i} = \frac{x_1 A_{-n+i} + x_2 B_{-m+i}}{y_1 B_{-n+i} + y_2 A_{-m+i}}$$

$$\lim_{i=\infty} K_i = K$$

此过程我们称为 m 阶 n 次有理递归，K 称为有理递归的极值。

在定义 7.1 的情形下，命题 7.1 推广为

命题 7.2: m 阶 n 次有理递归如果有一个极值，那么最多有 n 个极值；并且极值的最多个数与前面有限项

$$A_{-n}, B_{-n}, A_{-n+1}, B_{-n+1}, \cdots, A_{-1}, B_{-1}$$

的取值无关。

在递归过程中，$K_i = \frac{A_i}{B_i}$没有约分的计算过程，这一点与连分数的 Padé逼近不同。

代数基本定理可以解释为：首项为 1，其它系数（最多有 m 个）为整数，最高次数为 n 的多项式方程最多有 n 个根，且最多相异根的数量与项的系数无关。重根的情况由 m 个系数确定。

在命题 7.2 中，若我们用 m 表示可交换变量 x^k 的整数倍，用 n 表示变量 x 的最高次数；那么，命题 7.2 就与代数基本定理形成了对偶关系。显然，有理递归的前面有限项

$$A_{-n}, B_{-n}, A_{-n+1}, B_{-n+1}, \cdots, A_{-1}, B_{-1}$$

与多项式方程的 m 个复系数形成了对偶关系，由此导致了有理递归极值的最多相异个数与 n, m 两者相关，记为函数 ζ（m, n）。ζ（m, n）的值由下面的定理确定：

定理 7.1: m 阶 n 次有理递归如果有一个极值，那么极值的最多不同个数由下表确定

Table 11. Results of ζ（m, n）Number
表 11. 函数 ζ（m, n）的数值表

	n=Φ	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14
m=ϕ		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m=1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
m=2	4	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1
m=3	6	1	2	1	2	1	6	1	2	1	2	1	6	1	2
m=4	8	1	1	1	1	1	1	1	8	1	1	1	1	1	1
m=5	10	1	2	1	2	1	2	1	2	1	10	1	2	1	2
m=6	12	1	1	1	4	1	1	1	4	1	1	1	12	1	1

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

m=7	14	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	14
m=8	16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m=9	18	1	2	1	2	1	6	1	2	1	2	1	6	1	2

式中 ϕ 行和Φ 列是按其它数值的计算法则补充上的, 函数 ζ（m, n)数值由 m 和 n 共同控制[20]。

特别是，当定理 7.1 中的 n 为奇数时，ζ（m, n)=1。我们去掉 n 为奇数的列，简化为

Table 12. Results of ζ（m, n) number only n is a even number
表 12. n 为偶数时，函数 ζ（m, n)的数值表

	n=Φ	**n=2**	**n=4**	**n=6**	**n=8**	**n=10**	**n=12**	**n=14**	**n=16**	**n=18**	**n=20**	**n=22**
m=ϕ		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m=1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m=2	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1
m=3	6	2	2	6	2	2	6	2	2	6	2	2
m=4	8	1	1	1	8	1	1	1	8	1	1	1
m=5	10	2	2	2	2	10	2	2	2	2	10	2
m=6	12	1	4	1	4	1	12	1	4	1	4	12
m=7	14	2	2	2	2	2	2	14	2	2	2	2
m=8	16	1	1	1	1	1	1	1	16	1	1	1
m=9	18	2	2	6	2	2	6	2	2	18	2	2

我们发现，如果将直线 n-2m=0 视为对称轴, 那么在表 12 中, 行的 ζ（m, n)数值从零到对称轴是一个整周期, 列的 ζ（m, n)数值从零到对称轴是半个周期; 并且列的 ζ（m, n)数值关于对称轴也是对称。

仅利用上述行及列的对称性质，我们可以逐步构造出表 12 的数值。添加 n 为奇数的列就得到了表 11。

如果只用行来构造或者只用列来构造表 12 稍微麻烦一些. 但是正是由于这种复杂性, 对极值公式 ζ（m, n)的研究可以解决很多困难的问题。

定理 7.2: m 阶 n 次有理递归如果有一个极值，那么每一个极值都与前面有限项

$$A_{-n}, B_{-n}, A_{-n+1}, B_{-n+1}, \cdots, A_{-1}, B_{-1}$$

的取值无关。

8.3 R(5,5;2)临界图的顶点个数来源

我们由表 5 我们可以得到 n≤4, m≤4 情形下的函数 ζ（m, n)的值如下：

ζ（1, 1)=1，ζ（2, 1)=1，ζ（1, 2)=2，ζ（2, 2)=1，ζ（1, 3)=1，ζ（3, 1)=1，ζ（2, 3)=1，ζ（3, 2)=2，

ζ（4, 1)=1，ζ（1, 4)=2，ζ（4, 2)=1，ζ（2, 4)=4，ζ（4, 3)=1，ζ（3, 4)=2，ζ（4, 4)=1

[20] 给出了莫比乌斯函数 μ(n)的插值计算方法。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

求和得

$$\sum_{m,n\leq 4}\zeta(m,n)=\sum_{n,m\leq 4}\zeta(n,m)=23$$

$$\sum_{m,n\leq 4}\zeta(m,n)+\sum_{n,m\leq 4}\zeta(n,m)=46$$

假如 R(5,5;2)=47；观察上面的求和公式和它的对称性质，发现上面的数字 46 和 p(4,4)以及 R(5,5;2)-1 的性质高度的一致，以至于由此找到 R(5,5;2)临界图的画法也就不足为奇了。**根据上面的论述和现有大量的文献支持，可以说我们猜想 R(5,5;2)=47 是合理的。**

实际上，它给出的是 p(4,4)= $p_I(4,4)$等式的对应关系。如果我们再证明出 R(5,5;2)≤47，那么，解决下面的问题也就找到了方向。

p(4,4)= p_I(4,4) ↔ R(5,5;2)−1 =相应的临界图 ！！！

顺便说，R(4,4;2)=18 的临界图画法和 Ramanujin 的二次 Euler 积均可来源于公式

$$\sum_{m,n\leq 3}\zeta(m,n)=\sum_{n,m\leq 3}\zeta(n,m)=11$$

的研究。

9. 高维分拆函数简介

9.1 高维分拆角阵和分拆向量概述

令：

$\bar{Z}=(1-z)^{-1}$

$(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}$

$(1-x^2z)^{-1}(1-xyz)^{-1}(1-y^2z)^{-1}$

$(1-x^3z)^{-1}(1-x^2yz)^{-1}(1-xy^2z)^{-1}(1-y^3z)^{-1}$

$(1-x^4z)^{-1}(1-x^3yz)^{-1}(1-x^2y^2z)^{-1}(1-xy^3z)^{-1}(1-y^4z)^{-1}$

……

$X\bar{Y}=(1-xz)^{-1}(1-yz)^{-1}$

$(1-x^2z)^{-1}(1-xyz)^{-1}(1-y^2z)^{-1}$

$(1-x^3z)^{-1}(1-x^2yz)^{-1}(1-xy^2z)^{-1}(1-y^3z)^{-1}$

$(1-x^4z)^{-1}(1-x^3yz)^{-1}(1-x^2y^2z)^{-1}(1-xy^3z)^{-1}(1-y^4z)^{-1}$

……

它的表达式为

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$X\bar{Y}=\frac{\bar{Z}}{1-z}=(1+xz+x^2z^2+x^3z^3+\cdots)(1+yz+y^2z^2+y^3z^3+\cdots)$$
$$\times(1+x^2z+x^4z^2+x^6z^3+\cdots)(1+xyz+x^2y^2z^2+x^3y^3z^3+\cdots)(1+y^2z+y^4z^2+y^4z^3+\cdots)$$
$$\times(1+x^3z+x^6z^2+x^9z^3+\cdots)(1+x^2yz+x^4y^2z^2+x^6y^3z^3+\cdots)(1+xy^2z+x^2y^4z^2+\cdots)\cdots$$
$$\times(1+x^4z+x^8z^2+x^{12}z^3+\cdots)(1+x^3yz+x^6y^2z^2+x^9y^3z^3+\cdots)\cdots$$

如果每个因式只取前 2 项，就是我们讨论过的XY和$(XY)_{z=1}=(X\bar{Y})_{z^\infty=1,\ z\le 1}$情形，我们定义为线性的，每个因式我们取三项以上时，变量 z 是非线性形式。这种形式的展开函数我们称为高维分拆。最简单的高维分拆是每个因式取前 3 项，记为$XY_2=(X\bar{Y})_{k\le 2}$。

我们沿用展开 XY 为级数的表示法，把XY_2的表示为

$$XY_2=(1+xz+x^2z^2)(1+yz+y^2z^2)$$
$$\times(1+x^2z+x^4z^2)(1+xyz+x^2y^2z^2)(1+y^2z+y^4z^2)$$
$$\times(1+x^3z+x^6z^2)(1+x^2yz+x^4y^2z^2)(1+xy^2z+x^2y^4z^2)\cdots$$
$$\times\cdots$$

$=\mathbf{I}_0+zP_2\circ\mathbf{I}_1+z^2Q_2\circ\mathbf{I}_2+z^3R_2\circ\mathbf{I}_3+\cdots$

$=1+z\mathbf{P}_2+z^2\mathbf{Q}_2+z^3\mathbf{R}_2+\cdots$

式中

$\mathbf{I}_0=1$

$\mathbf{P}_2=P_2\circ\mathbf{I}_1=x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+x^3y+\cdots$

$\mathbf{Q}_2=Q_2\circ\mathbf{I}_2=(x^2+xy+x^2)+(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)+(2x^4+3x^3y+3x^2y^2+3xy^3+2y^4)$

$+(2x^5+4x^4y+5x^3y^2+5x^2y^3+4xy^4+2y^5)+\cdots$

$\mathbf{R}_2=R_2\circ\mathbf{I}_3=(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)+(2x^5+2x^4y+3x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4+2y^5)$

$+(x^6+2x^5y+4x^4y^2+2x^3y^3+4x^2y^4+2x^2y^4+x^6)+(3x^7+3x^6y+5x^5y^2+5x^4y^3+5x^3y^4+5x^2y^5+3xy^6+3y^7)$

$+(3x^8+3x^7y+6x^6y^2+5x^5y^3+7x^4y^4+\cdots$

展开式的首项为 1，z 项的系数角阵 $\mathbf{P}_2=\mathbf{P}$；z^2 项的系数角阵 $\mathbf{Q}_2=\mathbf{Q}+\Delta\mathbf{Q}_2$；$z^3$ 项的系数角阵 $\mathbf{R}_2=\mathbf{R}+\Delta\mathbf{Q}_2$；⋯。它们的一部分数值为

$$\mathbf{P}_2=\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&\cdots\\1&1&1&1&\cdots&\\1&1&1&\cdots&&\\1&1&\cdots&&&\\1&\cdots&&&&\\\cdots&&&&&\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{Q}+\Delta\mathbf{Q}_2$$

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$
= \mathbf{Q} + \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & & \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & & & \\
2 & 4 & 7 & 9 & 12 & & & & \\
2 & 5 & 8 & 11 & & & & & \\
3 & 6 & 10 & & & & & & \\
3 & 7 & & & & & & \dots\dots & \\
4 & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

$$
\mathbf{R_2} = \mathbf{R} + \mathbf{\Delta R_2}
$$

$$
= \mathbf{R} + \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\
0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 5 & & & \\
1 & 2 & 4 & 5 & 7 & & & & \\
2 & 2 & 5 & 5 & & & & & \\
1 & 3 & 6 & & & & & & \\
3 & 3 & & & & & & \dots\dots & \\
3 & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 & 12 & \\
0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & & \\
0 & 2 & 6 & 10 & 18 & 26 & & & \\
1 & 4 & 10 & 18 & 28 & & & & \\
2 & 6 & 15 & 26 & & & & & \\
2 & 9 & 21 & & & & & & \\
5 & 12 & & & & & & \dots\dots & \\
6 & & & & & & & &
\end{array}\right)
$$

显然，角阵 $\mathbf{P}_2$ 可以利用已知的角阵 $\mathbf{P}$ 简化求解，角阵 $\mathbf{Q}_2$ 可以利用已知的角阵 $\mathbf{Q}$ 简化求解。更进一步，可以利用已知的角阵 $\mathbf{Q}_2$ 递推计算 $\mathbf{Q}_3= \mathbf{Q_2}+\mathbf{\Delta Q_3}$；利用已知的角阵 $\mathbf{R}_2$ 递推计算 $\mathbf{R}_3= \mathbf{R_2}+\mathbf{\Delta R_3}$；等等。一般的，我们可以记

$\mathbf{Q}_2= \mathbf{Q}+\mathbf{\Delta Q_2}$ 为 $XY_2z^2=XYz^2+\Delta XY_2z^2$，$\mathbf{Q}_3= \mathbf{Q_2}+\mathbf{\Delta Q_3}$ 为 $XY_3z^2=XY_2z^2+\Delta XY_3z^2$，…；

记

$\mathbf{R}_2= \mathbf{R}+\mathbf{\Delta R_2}$ 为 $XY_2z^2=XYz^2+ \Delta XY_kz^2$，$\mathbf{R}_3= \mathbf{R_2}+\mathbf{\Delta R_3}$ 为 $XY_3z^3=XY_{k-1}z^3+ \Delta XY_kz^3$，…；

沿用展开 XY 为级数的表示法。令 XY_k 的基为：

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} x^0 & +y^1 & +y^2 & +y^3 & +y^4 & \cdots \\ +x^1 & +x^1y^1 & +x^1y^2 & +x^1y^3 & \cdots & \\ +x^2 & +x^2y^1 & +x^2y^2 & \cdots & & \\ +x^3 & +x^3y^1 & \cdots & & & \\ +x^4 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix}$$

由此，XY_k 的展开公式可以表示为

$XY_k=\mathbf{XY}_{k-1}\circ\mathbf{I}+\mathbf{\Delta XY}_k\circ\mathbf{I}$

$=1+\mathbf{P}z+\mathbf{Q}_2z^2+\mathbf{R}_3z^3+\mathbf{T}_4z^4+\cdots$

$=1+XYz+(XY+\Delta XY_2)z^2+(XY+\Delta XY_2+\Delta XY_3)z^3+\cdots++(XY+\Delta XY_2+\Delta XY_3+\cdots+\Delta XY_k)z^k$

式中角阵 $\mathbf{\Delta XY}_k$ 是对称角阵；ΔXY_k 是相应 z^n 项的齐次向量，ΔXY_k 也存在对称性。

例如：在上面的角阵 $\mathbf{R}_2$（或 ΔXY_2z^3）中，次数为 4 的项的向量 ΔXY_2 表示的(1,1,2,1,1)，次数为 6 的项的向量 ΔXY_2 表示的(1,2,4,2,4,2,1)。为了方便，我们也可以把次数为 4 和 6 的项的指数放到 Y 的指数上，记为

$$\Delta XY_2^4=(1+1+2+1+1)\circ(x^4+xy^3+x^2y^2+xy^3+y^4)$$

$$\Delta XY_2^6=(1+2+4+2+4+2+1)\circ(x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6)$$

或简记为

$$\Delta XY_2^4=(1,1,2,1,1)\text{；}\Delta XY_2^6=(1,2,4,2,4,2,1)$$

类似的，$\mathbf{R}_3$（或 ΔXY_3z^3）中，次数为 4,6 的项的向量 ΔXY_3 表示的(0,0,0,0,0)，次数为 4,6 的项的向量 ΔXY_3 表示的(1,0,0,1,0,0,1)。即：

$$\Delta XY_3^4=(0,0,0,0,0)\text{，}\Delta XY_3^6=(1,0,0,1,0,0,1)$$

向量中的每一个数字都表示一定条件下的分拆种数。

例如，向量(1,2,4,2,4,2,1)中的第一个 4 表示来源于因式的第三项 $x^ny^mz^2$ 且展开形式为 $x^4y^2z^3$ 的种数。由于至少需要因式中的一个二次项，因此它们只能来源于二次项和一次项的乘积（下划线的乘积）。它们是

$$\left(1+xz+\underline{x^2z^2}\right)\left(1+\underline{x^2y^2z}+x^4y^4z^2\right)\text{，}(1+yz+\underline{y^2z^2})(1+\underline{x^4z}+y^8z^2)$$

$$\left(1+xyz+\underline{x^2y^2z^2}\right)(1+\underline{x^2z}+x^4z^2)\text{，}\left(1+x^2z+\underline{x^4z^2}\right)\left(1+\underline{y^2z}+y^4z^2\right)$$

相同的，向量(1,2,4,2,4,2,1)的中间项 2 表示来源于因式的第三项 $x^ny^mz^3$ 且展开形式为 $x^3y^3z^3$ 的种数。它们是

$$\left(1+xz+\underline{x^2z^2}\right)\left(1+\underline{xy^3z}+x^2y^6z^2\right)\text{，}\left(1+yz+\underline{y^2z^2}\right)\left(1+\underline{x^3yz}+y^6y^2z^2\right)$$

类似的，向量 ΔXY_3=(1,0,0,1,0,0,1)的中间项来源于因式$\left(1+xyz+x^2y^2z^2+\underline{x^3y^3z^3}\right)$的第四项，种数为 1。这种来源于自身因式的项是重要的一类，它的展开项具有 $x^ky^kz^k$ 的形式。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

用这种方法可以逐步求出$XY_\infty = X\overline{Y}$的展开式。但是，继续用这种方法，也就是通过角阵 $\mathbf{XY}_{k-1}$ 和 $\mathbf{\Delta XY}_k$ 计算 $\mathbf{XY}_k$，将变得太过繁琐，因此我们必须寻找其它的途径才能继续这种计算[21]。对于 $\mathbf{\Delta XY}_k$ 或ΔXY_k^n，尽管我们可以发现并证明角阵中某些行（或列）系数的组合性质，但从这些数值上很难找出它们的一般规律。

9.2 高维分拆函数 p0Φ(n,m)的概述

按照线性分拆函数 p(n,m)的定义，把不限制乘积因式$(X\overline{Y})_{z=1}$中的项数的展开可以记为 $p_{0\Phi}(n,m)$。或简记为 $p_0(n,m)$或 $p_\phi(n,m)$。它是一个对称角阵。

我们知道了：如果不限制每个因式的项数，我们可以像计算一元分拆函数那样，分项计算出$X\overline{Y} = \lim_{k=\infty} XY_k$的系数$\overline{P},\overline{Q},\overline{R},\overline{S},\cdots$，。这种系数角阵是受限制的角阵，也属于递推计算。随着 k 的增大，它使得系数角阵中数值不再增加的项变得越来越多。

另一方面，我们如果令 $z=e^{2\pi iq}$，并用$(xy)^n$表示次数为 n 的所有齐次项。那么，我们可以把$(X\overline{Y})_{z=1}$表示为如下形式：

$$(X\overline{Y})_{z=1} = 1 + \overline{A} \circ (xy) + \overline{B} \circ (xy)^2 + \overline{C} \circ (xy)^3 + \overline{D} \circ (xy)^4 + \overline{E} \circ (xy)^5 + \cdots$$

公式中的项$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ ...都是向量的形式，且只有有限项。它的前面几项是

$\overline{A}$=(1,1)，$\overline{B}$=(2,2,2)，$\overline{C}$=(3,4,4,3)，$\overline{D}$=(4,7,7,7,4)，$\overline{E}$=(7,11,13,13,11,7)

其中$\overline{E}$是通过计算

$$\overline{E} = XY^5 + \Delta XY_2^5 + \Delta XY_3^5 + \Delta XY_4^5 + \Delta XY_5^5$$

$$= (3,7,9,9,7,3) + (2,2,3,3,2,2) + (1,1,1,1,1,1) + (0,1,0,0,1,0) + (1,0,0,0,0,1)$$

$$= (7,11,13,13,11,7)$$

得到的，其它亦然。

我们可以沿用 XY 的分拆定义，把因式只有两项的展开式

$$(XY)_{z=1} = 1 + A \circ (xy) + B \circ (xy)^2 + C \circ (xy)^3 + D \circ (xy)^4 + E \circ (xy)^5 + \cdots$$

的系数向量

A=(1,1)，B=(1,2,1)，C=(2,3,3,2)，D=(2,5,5,5,2)，E=(3,7,9,9,7,3)，…

定义为分拆函数XY^{n+m}，它的指数 m+n 由项$(xy)^k$的指数 k 确定，与数组(n,m)的顺序和取值无关。

对于$(X\overline{Y})_{z=1}$，显然存在$\overline{A} = A$；我们前面已经讨论过了。类似的，我们把$\overline{B}$定义为ΔXY_2^k，把$\overline{C}$定义为ΔXY_3^k，等等。在这种定义下，ΔXY_q^k（或者$XY_\infty = X\overline{Y}$）表示三角形面积上的允许重复格点的分拆种数的向量（或者角阵），至此我们把一元分拆函数完全推广到了二元函数。

[21] 在以后的有理递归理论中，我们再解决这个问题。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

分拆函数ΔXY_n^k或者$X\overline{Y}$也存在代数表达式。需要说明的是，在这里用数表示因式的形式，必须扩充整数为有理数。但是，继续用有理数的加减法研究分拆的种数将变的非常复杂。

对这类问题的研究，最早可追溯到 Wallis 时代。他讨论过用分子分母更小的分数去近似给定的分数。但这类问题的（限定了分子分母为整数）的研究，止步于 Euler 的连分数理论和 Ramanujan 形式的连分数理论。更进一步，用更小的普通有理数去近似给定的有理数，可以归类为拓扑学、概率数论、分数微积分、数的几何理论等数学领域的问题。这些领域给出了无穷小的各种定义；都属于分析学。显然，本文讨论的二元分拆理论是更一般的情形：怎样（或是否可以）用更小的代数数去近似（拆分为）给定的代数数。显然，Ramsey 数 R(n,m;2)的计算就是这类问题。

因此，二元分拆函数与 Ramsey 数 R(n,m;2)高度关联的性质，应该引起我们的重视。

10. 命题 3.1 的通俗说明

为了讲清楚命题 3.1，我们继续讨论最简单的分拆函数 $p_0(n)$的性质。

多项式幂$(a+b+c+\cdots+h)^n$ 的通项公式为：

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots s!}a^p b^q c^r\cdots h^s$$

式中 $p+q+r+\cdots+s=n$

由此我们可以得到

$(a+b+c)^3=1\cdot(a^3+b^3+c^3)+3\cdot(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6\cdot abc$

$(a+b+c)^4=1\cdot(a^4+b^4+c^4)+4\cdot(a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b)+6\cdot(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12\cdot(a^2bc+b^2ca+c^2ab)$

$(a+b+c+d)^4=1\cdot(a^4+b^4+c^4+d^4)+4\cdot(a^3b+a^3c+a^3d+b^3a+b^3c+b^3d+c^3a+c^3b+c^3d+d^3a+d^3b+d^3c)$

$+6\cdot(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)+12\cdot(a^2bc+a^2cd+a^2da+b^2ac+b^2cd+b^2da+c^2ab+c^2bd$

$+c^2da+d^2ab+d^2bc+d^2ca)+24\cdot abcd$

当 $a=b=c=d=|e^{\theta i}|=1$ 时，上面的等式我们用卷积的形式表示如下：

$3^3=1\cdot3+3\cdot6+6\cdot1=$（1+3+6）○（3+6+1）

$3^4=1\cdot3+4\cdot6+6\cdot3+12\cdot3=$（1+4+6+12）○（3+6+3+3）

$4^4=1\cdot4+4\cdot12+6\cdot6+12\cdot12+24\cdot1=$（1+4+6+12+24）○（4+12+6+12+1）

更一般的，我们定义整数的幂 p^q 的卷积长度为函数 L(p,q)，由上面的结果我们得到

L(3,3)=3，L(3,4)=4，L(4,4)=5

特别是：对于整数 p=q=n，n=1,2,3,…，函数 L(n,n)形成的数列为

1,2,3,5,7,11,15,22,30,42,56,77,101,135,…

容易发现，函数 L(n,n)形成的数列恰等于 n 拆成整数之和且允许重复的种数 $p_0(n)$，n=1,2,3,…。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

这个结果可以做如下简单的解释。

按照定义，函数 L(n,n)的数列是由因式的幂展开得到的，它表示的是置换群的种类数。例如,在 $(a+b+c+d)^4$ 的展开式中，我们可以用 x^4 置换 a^4,b^4,c^4,d^4 中的任何一个；用 x^3y 置换 $a^3b,a^3c,a^3d,b^3a,b^3c,b^3d$，$c^3a,c^3b,c^3d,d^3a,d^3b,d^3c$ 中的任何一个，等等。显然，它的指数项就是我们给出的分拆函数 $p_0(n)$的递推计算过程。在分拆理论中，使用“允许重复”替换了上述的“置换”。

这样就使得不超过 4 个元素的 4 次表达式只有 x^4,x^3y，$x^2y^2,x^2yz,xyzu$ 这 5 种不同形式。它可以用数的分拆解释为：整数 4（置换的变量 a,b,c,d 的数量为 4）分为 4 个整数（变量的指数和为 4）之和且允许重复（任意置换）的种数 $p_0(4)$。即：

$p_0(4)=L(4,4)=5$

类似的，其它的一元或二元分拆函数也都有相应离散概念（或术语）的解释。但是，把多项式幂 $(a+b+c+\cdots+h)^n$ 中的 a,b,c,…推广为 Gauss 整数，用来解释二元分拆函数更为通俗和直观。

综上所述，数（包括有理数）的分拆理论，研究的是实变量可置换的种类（置换群的种数）问题。我们已经看到，这个简单的结论可以帮助我们了解数（哥德尔数）的性质，其应用之广泛，无论怎样说都不过分。

二元分拆理论深刻的揭示了置换群的性质，其中的一个应用就是给出了 Ramsey 数

$$p(4,4)+1=R(5,5;2)=47$$

为了消除人们对此结论的疑惑，我们用通俗的语言，等价的描述这个结论如下：

拉姆赛数 R(5,5;2)=47 的等价定理： 根式法（或公式法）求解复系数 4 次方程，最多需要 47“步”。这里的每一“步”是指求解复系数二次方程一次。当复系数 4 次方程简化为首项系数为 1 的 4 次多项式方程时，根式法求解只需要 46“步”。

类似的通俗描述是，第 7 节的内容给出了求解 R(5, 5;2)临界图的一种方法。也就是给出了求解首项系数为 1 的 4 次多项式方程的路线图。

上述的等价定理中，“步”数有限是众所周知的。至此，我们很容易建立起 R(5, 5;2)与根式法求解四次方程之间的一一对应关系[11,12]。尽管详细的完善过程仍然是需要的[22]，但其只是步骤已经确定的复杂计算而已。

参考文献 (References)

[1] Euler L. Introduction to Analysis of the Infinite[M]. SPRINGER-VERLAG, 1988.

[2] MACMAHON, P. A. Combinatory analysis, vol. 2 (Cambridge, 1916; reprinted Chelsea, New York, 1960).

[3] Atkin, A. O. L., & Bratley, P. (1967). Some computations for, m-dimensional partitions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 63*(4), 1097-1100.

[4] Koch H. Andrews, G. E. The Theory of Partitions. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications) 2. London-Amsterdam-Don Mills-Sydney-Tokyo, Addison-Wesley Publ. Company 1976. XIV, 255 S. $ 16.50[J]. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1979, 59(6):285-285.

[22] 定理 7.1 的证明包含着等价定理 R(5,5;2)=47 的详细证明和计算过程。论文的副标题，我们使用了“注记”这个词，而没有使用证明这个词；是因为本文由于篇幅的问题，没有给出定理 7.1 的证明。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017

[5] Suresh Govindarajan (IIT Madras, & Inde). (2014). Aspects of higher-dimensional partitions.

[6] Destainville, N., & Govindarajan, S. (2015). Estimating the asymptotics of solid partitions. *Journal of Statistical Physics, 158*(4), 950-967.

[7] Farkas, H. M. (2006). Sums of squares and triangular numbers. *Online Journal of Analytic Combinatorics, 1*(1).

[8] Amen, J. (2006). Farey sequences, ford circles and pick's theorem.

[9] Ferrara, S., & Fronsdal, C. (2000). *CONFORMAL FIELDS IN HIGHER DIMENSIONS*. *The Ninth Marcel Grossmann Meeting:On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories(In 3 Volumes)*.

[10] Agustin, M. C. (2008). On sums of figurate numbers by using techniques of poset representation theory. *Eprint Arxiv*.

[11] MInghao.G,Zhicheng.G,Pure Mathematics Vol.07 No.04(2017), Article ID:21265,7 pages 10.12677/PM.2017.74032.

[12] MInghao.G,Zhicheng.G,Pure Mathematics Vol.07 No.04(2017), Article ID:21265,7 pages 10.12677/PM.2017.74033.

[13] K. G ̈odel. Uber formal unentscheidbare S ̈atze der Principia Mathemat ̈- ica und verwandter Systeme I. Monatshefte f ̈ur Mathematik und Physik, 38:173–198, 1931.

[14] K. G ̈odel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls. Ergebnisse Math. Kolloq., 4:39–40, 1933. English translation in [4], pages 301–303

[15] Kato K, Kurokawa N, Saito T. Number Theory 2: Introduction to Class Field Theory[M]. 2011.

[16] Stanley, R. P. (2012). *Enumerative Combinatorics -- Volume 1*. Cambridge University Press.

[17] Lávička, R., O'Farrell, A. G., & Short, I. (2007). Reversible maps in the group of quaternionic möbius transformations. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 143*(1), 57-69.

[18] Radziszowski, S. P. (2011). Small ramsey numbers. *Electronic Journal of Combinatorics, 1*(4), 28.

[19] Pąk, K. (2014). Tietze extension theorem for n-dimensional spaces. *Formalized Mathematics, 22*(1), 11-19.

[20] Huisgenzimmermann, B. (2014). Fine and coarse moduli spaces in the representation theory of finite dimensional algebras. *Macromolecules,29*(17), 5539-5545.

[21] 邱懿. (2002). Mobius 交错偏序集. *数学年刊*(5).

[22] Kumar, P. (2014). Some congruences for balancing and lucas-balancing numbers and their applications. *Integers, 14*(14).

[23] Cappelli, A., Guida, R., & Magnoli, N. (2001). Exact consequences of the trace anomaly in four dimensions. *Nuclear Physics, 618*(3), 371-406.

[24] Fahr, P., & Ringerl, C. M. (2008). A partition formula for fibonacci numbers. *Journal of Integer Sequences, 11*(11), 2-3.

[25] 李文林. (2000). *数学珍宝*. 科学出版社.p627-634

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 10 November 2017, publ: 14 November 2017