Two Variables Combinatorial Identity of Retricted Bipartite Gaussian Polynomials

Zhicheng Guo[1], Jun Yang[2]

[1]Dept. Northern Design and Research Institute, Shijiazhuang, China
[2]Dept. Professor in Department of Weaponry and Control Engineering, Army Academy of Armored Forces, CPLA, Beijing, China
Email: 13833116000@139.com

Abstract

In this paper, a new combinatorial identity of retricted bipartite Gauss polynomials is given. It is essentially a combined fancy version of Fermat descent method.

Keywords

Gaussian Polynomials, Combinatorial Identity, Fermat descent method

基于双限制高斯多项式的二元组合恒等式

郭志成[1]，杨军[2]

[1]北方设计研究院，石家庄，中国
[2]中国人民解放军陆军装甲兵学院兵器与控制系教授，北京
Email: 13833116000@139.com

收稿日期：2018年11月30日；发布日期：2018年12月5日

摘　要

本文给出了双限制高斯多项式的一个新的组合恒等式。它本质上是组合形式的费马递降法。

关键词

高斯多项式，组合恒等式，费马递降法

1. 引言

高斯多项式（Gaussian Polynomials）是这样定义的[1]。令：

$$(a)_n=(a;q)_n=(1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{n-1})$$
$$(a)_\infty=(a;q)_\infty=\lim_{n\to\infty}(a;q)_n$$

$$(a)_0=1$$

对所有的实数，表达式$(a)_n$由下面的等式定义：

$$(a)_n=(a)_\infty/(aq^n)_\infty$$

高斯多项式$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}$的定义为：

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\begin{cases}(q)_n(q)_m^{-1}(q)_{n-m}^{-1} & \text{若 } 0\le m\le n\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

显然有

$$\lim_{q\to1}\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=\binom{n}{m}$$

人们又拓展定义为高斯多维系数（Gaussian Multinomial Coeffcients）

$$\begin{bmatrix}m_1+m_2+\cdots m_r\\m_1,m_2\cdots,m_r\end{bmatrix}=\frac{(q)_{m_1+m_2+\cdots m_r}}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\cdots(q)_{m_r}}$$

当$r=2$时，拓展的高斯多维系数表示分拆$p(m_1,m_2,n)$的生成函数。本文研究了二元的高斯多项式，得到了简单形式的组合恒等式。该恒等式既不同于代数范畴的范德蒙（Vandermonde）组合恒等式，也不同于线性分析范畴的李善兰（Shanlan Li）组合恒等式[2]。本文得到的恒等式属于非线性分析的范畴[3]。

本文沿用一元多项式的高斯符号，令$q=xy$或$q=x/y$，可以把二元组合恒等式[1]表示为

命题 1： 设：q 为正整数，ε为非负整数，则存在组合恒等式

$$\begin{bmatrix}q+\varepsilon\\q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lfloor q/2\rfloor+\varepsilon\\\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lfloor(q-1)/2\rfloor\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lfloor q/2\rfloor+\varepsilon-1\\\varepsilon-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lfloor(q-1)/2\rfloor+1\\1\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\lfloor q/2\rfloor+\varepsilon-2\\\varepsilon-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lfloor(q-1)/2\rfloor+2\\2\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}\lfloor q/2\rfloor\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lfloor(q-1)/2\rfloor+\varepsilon\\\varepsilon\end{bmatrix}$$

式中符号$\lfloor q/2\rfloor$表示向下取整。

2. 命题 1 的证明

命题 1 的证明： 不妨用二元齐次多项式的降阶排列表示出$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$如下的两列[2]：

[1] 这个组合恒等式是十年前发现的，当时误认为它的数值形式只是范德蒙（Vandermonde）组合恒等式的特例。如果不是前段时间重新使用到这个公式，它肯定会在我的记忆中丢失掉。

[2] 注意顺序不可改变。

$$
\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1,\quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1
$$
$$
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=x,\quad \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=x+y
$$
$$
\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=x^2,\quad \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=x^2+xy+y^2
$$
$$
\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=x^3,\quad \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=x^3+x^2y+xy^2+y^3
$$
$$
\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=x^4,\quad \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4
$$
$$
\cdots \qquad \cdots
$$

当 q 为偶数时，可以利用公式$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m-1\\n-1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}m-1\\n\end{bmatrix}$，递推的求出下一列。相同的，当 q 为奇数时，可以利用公式$\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m-1\\n-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}m-1\\n\end{bmatrix}$，递推的求出下一列。由此可以得到第三列和第四列的齐次多项式为

$$
\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=1,\qquad \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=1
$$
$$
\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=2x+y,\qquad \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}=2x+2y
$$
$$
\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=3x^2+2xy+y^2,\qquad \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=3x^2+4xy+3y^2
$$
$$
\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=4x^3+3x^2y+2xy^2+y^3,\qquad \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}=4x^3+6x^2y+6xy^2+4y^3
$$
$$
\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=5x^4+4x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4,\qquad \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}=5x^4+8x^3y+9x^2y^2+8xy^3+5y^4
$$
$$
\cdots \qquad \cdots
$$

继续上述过程，可以使得等式右边每一项的系数对应着唯一的两组合之积。由此就证明了命题 1[3]。

令$x=y=1$，我们很容易的可以写出熟悉的数字组合$\binom{7}{3}$的右边第一项$\binom{5}{4}\binom{1}{0}$，并顺序写出其它项如下：

$$
\binom{7}{3}=\binom{5}{4}\binom{1}{0}+\binom{4}{3}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}\binom{3}{2}+\binom{2}{1}\binom{4}{3}+\binom{1}{0}\binom{5}{4}=35
$$

3. 双限制高斯多项式与命题的关系

本文命题 1 的公式尽管非常简洁，但原理并不是简单的，属于双重递推。为了说明这一点，我们推广高斯多项式为二元的定义如下：令：

$$
\begin{aligned}
(a)_{n,m}=(a;xy)_{n,m}&=(1-x^{\varepsilon}y^0)(1-ax^1y^0)(1-ax^0y^1)(1-ax^2y^0)(1-ax^1y^1)(1-ax^0y^2)\\
&\times(1-ax^3y^0)(1-ax^2y^1)(1-ax^1y^2)(1-ax^0y^3)(1-ax^4y^0)\cdots(1-ax^{n-1}y^m)
\end{aligned}
$$
$$
(a)_{\infty,m}=(a;xy)_{\infty,m}=\lim_{n\to\infty}(a)_{n,m}
$$
$$
(a)_{n,\varepsilon}=(a;xy)_{n,\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}(a)_{n,\varepsilon}\begin{cases}\text{如果 }\varepsilon\neq 0,\text{则}y^{\varepsilon}=0\\ \text{如果 }\varepsilon=0,\text{则}y^{\varepsilon}=1\end{cases}
$$

对所有的实数组，表达式$(a)_{n,\varepsilon}$由下面的等式定义：

$$
(a)_{n,\varepsilon}=\frac{(a)_{\infty,\varepsilon}}{(ax^ny^m)_{\infty,\varepsilon}}\qquad(\text{式中}\infty\cdot\varepsilon\neq 0)
$$

[3] 我们回望证明初始给出的两列，它也是符合命题 1 要求的。

显然，在这种广义的定义下，当$y^m = 1$时，就退化成可交换（无穷大 p 和无穷小ε可交换）的高斯多项式。高斯多项式的递推过程如下：

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^{n-m}\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^{m}\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$$

它不同于命题 1 的递推过程，因此命题 1 也不是高斯多项式的简单推广。

关于高斯多项式系数$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 + \cdots m_r \\ m_1, m_2 \cdots, m_r \end{bmatrix}$的一些深奥分拆结论------例如关于双限制分拆的种类数的公式[1]

$$\sum_{n,m\geq 0} \pi(n,m)x^n y^m = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n y^{n-1})^{-1}(1-x^{n-1}y^n)^{-1}(1-x^{2n}y^{2n})^{-1}$$

和

$$\pi(q,\varepsilon) = \pi_1(q,\varepsilon)$$

可以利用本文的命题 1 得到简单直观的证明。

由于命题 1 的公式满足条件$\lfloor q/2 \rfloor + \lfloor (q-1)/2 \rfloor = q-1, q \to \infty$，因此命题 1 本质上属于费马递降法，它可以广泛的应用于分拆函数的递推计算、默比乌斯函数的插值运算、交错级数的分析等。更重要的是，本文命题 1 在代数与分析之间建立了一种紧密的联系。

参考文献

[1] Grosswald E. Topics from the theory of numbers[M]// Topics from the Theory of Numbers. 1984: 17-35, 207-209

[2] 曹汝成. 组合数学. 第 2 版[M]. 华南理工大学出版社, 2012: 43

[3] Mansour T, Schork M. The commutation relation xy = qyx + hf (y) and Newton's binomial formula[J]. Ramanujan Journal, 2011, 25(3): 405-445.

[4] Lint J H V . 组合数学教程(原书第 2 版)[M]. 机械工业出版社, 2007.

[5] 史济怀. 组合恒等式.2 版[M]. 中国科学技术大学出版社, 2001.

[6] 南基洙. 组合数学(高等学校教材)(BZ). 高等教育出版社, 2008.