# On the Distinguishing Method of Orthocentric Tetrahedron Inscribed in A Sphere

**Qi Zhang**

Zhang Qi Institute of Mathematics. Jiamusi
Email: 742096830@qq.com

Received: Apr.27th, 2020, published: Apr.29th, 2020

## Abstract

**When all four vertices of any tetrahedron are located on a three-dimensional sphere, this paper gives a method to judge whether the tetrahedron is a orthocentric tetrahedron.**

## Keywords

**Orthocentric Tetrahedron, Cosine Theorem, Vector**

# 关于球内接垂心四面体的判别法

**张　琪**

张琪数学研究所，佳木斯
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年4月27日；发布日期：2020年4月29日

## 摘　要

当任意四面体的四个顶点都位于某个三维球面上时，本文给出了判断该四面体是否为垂心四面体的判别法。

## 关键词

垂心四面体，余弦定理，向量


HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27 April 2020, publ: 30 April 2020

## 1. 引言

当任意四面体 $ABCD$ 内接于球面 $O$，设该球面半径为

$$|\boldsymbol{OA}| = |\boldsymbol{OB}| = |\boldsymbol{OC}| = |\boldsymbol{OD}| = R.$$

## 2. 垂心四面体的外心角余弦定理

### 2.1. 外心角余弦定理

当任意四面体 $ABCD$ 内接于球面 $O$，该四面体为垂心四面体的充要条件为：

$$\cos\angle AOB + \cos\angle COD = \cos\angle AOC + \cos\angle BOD = \cos\angle AOD + \cos\angle BOC.$$

### 2.2. 证明

根据垂心四面体的性质有 [1]：

$$|\boldsymbol{AB}|^2 + |\boldsymbol{CD}|^2 = |\boldsymbol{AC}|^2 + |\boldsymbol{BD}|^2 = |\boldsymbol{AD}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2. \quad (1)$$

再根据三角形的余弦定理有：

$$|\boldsymbol{AB}|^2 = |\boldsymbol{OA}|^2 + |\boldsymbol{OB}|^2 - 2|\boldsymbol{OA}||\boldsymbol{OB}|\cos\angle AOB = 2R^2(1-\cos\angle AOB);$$

$$|\boldsymbol{CD}|^2 = |\boldsymbol{OC}|^2 + |\boldsymbol{OD}|^2 - 2|\boldsymbol{OC}||\boldsymbol{OD}|\cos\angle COD = 2R^2(1-\cos\angle COD).$$

把上面两式代入(1)得：

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{AB}|^2 + |\boldsymbol{CD}|^2 = 2R^2(2-\cos\angle AOB-\cos\angle COD)\\ &=|\boldsymbol{AC}|^2 + |\boldsymbol{BD}|^2 = 2R^2(2-\cos\angle AOC-\cos\angle BOD)\\ &=|\boldsymbol{AD}|^2 + |\boldsymbol{BC}|^2 = 2R^2(2-\cos\angle AOD-\cos\angle BOC)\end{aligned}$$

消去 $R$ 并化简上式有：

$$\cos\angle AOB + \cos\angle COD = \cos\angle AOC + \cos\angle BOD = \cos\angle AOD + \cos\angle BOC.$$

命题充分性已得证。同理，命题必要性易证，从略。

## 3. 外心角余弦定理的向量形式

### 3.1. 球内接垂心四面体的向量式判别法

当任意四面体 $ABCD$ 内接于球面 $O$，该四面体为垂心四面体的充要条件为：

$$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OD} + \boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OC}.$$

### 3.2. 证明

由于

$$\cos\angle AOB = \frac{\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}}{|\boldsymbol{OA}||\boldsymbol{OB}|} = \frac{\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}}{R^2},$$

又根据垂心四面体的外心角余弦定理，有：

$$\begin{aligned}\cos\angle AOB + \cos\angle COD = \frac{\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}}{R^2} + \frac{\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OD}}{R^2} &= \cos\angle AOC + \cos\angle BOD = \frac{\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OC}}{R^2} + \frac{\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OD}}{R^2}\\ &= \cos\angle AOD + \cos\angle BOC = \frac{\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OD}}{R^2} + \frac{\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OC}}{R^2}\end{aligned}$$


HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27 April 2020, publ: 30 April 2020

对上式进行化简可得：

$$\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}\cdot\boldsymbol{OD}=\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OD}=\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OD}+\boldsymbol{OB}\cdot\boldsymbol{OC}.$$

命题充分性已得证。同理，命题必要性易证，从略。

### 3.3. 推论

若垂心四面体 $ABCD$ 内接于球面 $O$，则有：

$$\boldsymbol{OA}\cdot(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OC})=(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OC})\cdot\boldsymbol{OD},\text{即}\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{OD}.$$

## 致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

## 参考文献

[1] 万述波.四面体“垂心”的存在性问题及存在的充要条件[J].数学通报, 2002, 11(1): 20-21.