On the Properties of the Orthocenter Group of Orthocenter Tetrahedron

Xingyuan Li

BOC credit Card (International) L.T.D, HongKong, China
Email: 742096830@qq.com

Received: Jun. 6th, 2020, published:Jun. 9th, 2020

Abstract

Proposed in paper [1]: in any triangle, three vertices and the orthocenter form a group of orthocenter. Any point in the orthocenter group is the orthocenter of the triangle formed by the other three points. In this paper, the properties of the orthocenter group are extended to the orthocenter tetrahedron.

Keywords

Orthocenter Tetrahedron, Orthocenter Group, Points Set, Similar

垂心四面体的垂心组性质初探

李兴源

中银信用卡(国际)有限公司，香港，中国
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年6月6日；发布日期：2020年6月9日

摘　要

文[1]提出：任意三角形的三顶点与垂心，这四点构成垂心组。垂心组中的任意一点都是其余三点所构成的三角形的垂心。本文将垂心组的性质推广至垂心四面体上。

关键词

垂心四面体，垂心组，点集，相似

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51013. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 June 2020, publ: 9 June 2020

1. 引言

定义：垂心四面体 $ABCD$ 中，H 为垂心，将点集 $\{A,B,C,D,H\}$ 称作一个垂心组。

2. 垂心组的基本性质

2.1. 垂心四面体的垂心组定理

垂心四面体 $ABCD$ 中，H 为垂心，则四面体 $ABCH$ 、 $ABDH$ 、 $ACDH$ 、 $BCDH$ 均为垂心四面体，且 A、B、C、D 分别为垂心四面体 $BCDH$ 、 $ACDH$ 、 $ABDH$ 、 $ABCH$ 的垂心。

证明：如图 1 所示，根据垂心四面体的性质，有：[2]

$$AH \perp 面BCD，\ BH \perp 面ACD，\ CH \perp 面ABD，\ DH \perp 面ABC；$$

因此

$$CD \perp BH，\ BD \perp CH。$$

故四面体 $BCDH$ 为垂心四面体。同理可证四面体 $ABCH$ 、 $ABDH$ 、 $ACDH$ 均为垂心四面体。

由于

$$BH \perp AC，\ BH \perp AD，\ CH \perp AB，\ CH \perp AD，\ DH \perp AB，\ DH \perp AC；$$

则

$$AB \perp 面CDH，\ AC \perp 面BDH，\ AD \perp 面BCH。$$

故 A 为垂心四面体 $BCDH$ 的垂心。同理可证 B、C、D 分别为垂心四面体 $ACDH$ 、 $ABDH$ 、 $ABCH$ 的垂心。命题已得证。

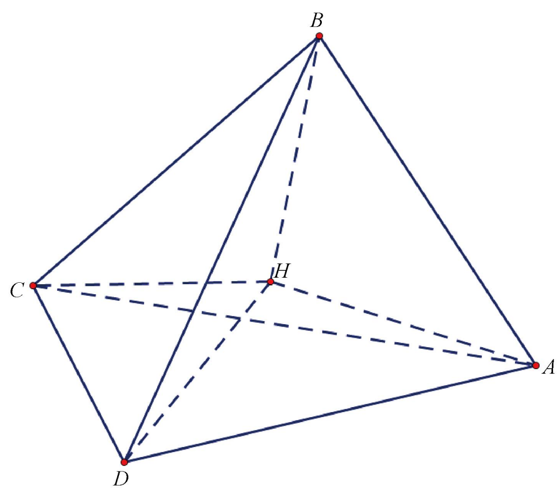

Figure 1. Orthocenter tetrahedron and its orthocenter
图 1. 垂心四面体及其垂心

2.2. 垂心组的重心定理

垂心四面体 $ABCD$ 中，H 为垂心，G、G_1 、G_2 、G_3 、G_4 分别为垂心四面体 $ABCD$ 、$BCDH$ 、$ACDH$ 、$ABDH$ 、 $ABCH$ 的重心，则四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，且点集 $\{G,G_1,G_2,G_3,G_4\}$ 构成一个垂心组。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51013. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 June 2020, publ: 9 June 2020

证明： 令 O 垂心四面体 $ABCD$ 的外心，则：

$$\boldsymbol{OG}_1=\frac{1}{4}(\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD}+\boldsymbol{OH})\text{；}\quad \boldsymbol{OG}_2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD}+\boldsymbol{OH})\text{。}$$

所以

$$\boldsymbol{G_1G_2}=\boldsymbol{OG}_2-\boldsymbol{OG}_1=\frac{1}{4}(\boldsymbol{OA}-\boldsymbol{OB})=\frac{1}{4}\boldsymbol{BA}\text{。}$$

同理

$$\boldsymbol{G_3G_4}=\frac{1}{4}\boldsymbol{DC}\text{，}\quad \boldsymbol{G_1G_3}=\frac{1}{4}\boldsymbol{CA}\text{，}\quad \boldsymbol{G_2G_4}=\frac{1}{4}\boldsymbol{DB}\text{。}$$

由于四面体 $ABCD$ 是垂心四面体，因此

$$AB\perp CD\text{，}\quad AC\perp BD\text{，}\quad G_1G_2\perp G_3G_4\text{，}\quad G_1G_3\perp G_2G_4\text{。}$$

故四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 是垂心四面体，又垂心四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 的各棱分别与垂心四面体 $ABCD$ 的对应棱平行且成比例。所以垂心四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，相似比为 $1:4$。
由 H、G 分别为垂心四面体 $ABCD$ 的垂心和重心，可知：[3]

$$\boldsymbol{OH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD})\text{，}\quad \boldsymbol{OG}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD})\text{。}$$

$$\boldsymbol{AH}=\boldsymbol{OH}-\boldsymbol{OA}\text{，}\quad \boldsymbol{G_1G}=\boldsymbol{OG}-\boldsymbol{OG}_1=\frac{1}{4}(\boldsymbol{OA}-\boldsymbol{OH})=\frac{1}{4}\boldsymbol{HA}\text{。}$$

故 G 为垂心四面体 $G_1G_2G_3G_4$ 的垂心，点集 $\{G,G_1,G_2,G_3,G_4\}$ 构成垂心组。

2.3. 垂心组的外心定理

垂心四面体 $ABCD$ 中，H 为垂心，O、O_1、O_2、O_3、O_4 分别为垂心四面体 $ABCD$、$BCDH$、$ACDH$、$ABDH$、$ABCH$ 的外心，则四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，且点集 $\{O,O_1,O_2,O_3,O_4\}$ 构成一个垂心组。

证明： 因为 H 与 A 分别为垂心四面体 $ABCD$ 和垂心四面体 $BCDH$ 的垂心，所以

$$\boldsymbol{OH}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD})\text{，}\quad \boldsymbol{O_1A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{O_1H}+\boldsymbol{O_1B}+\boldsymbol{O_1C}+\boldsymbol{O_1D})\text{。}$$

将上面两式相减并整理可得：

$$\boldsymbol{OO}_1=\frac{3}{2}\boldsymbol{AH}\text{。}$$

同理

$$\boldsymbol{OO}_2=\frac{3}{2}\boldsymbol{BH}\text{，}\quad \boldsymbol{O_1O_2}=\frac{3}{2}\boldsymbol{BA}\text{。}$$

易证四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 的各棱分别与垂心四面体 $ABCD$ 的对应棱平行且成比例。故四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，相似比为 3:2。因此四面体 $O_1O_2O_3O_4$ 是垂心四面体，O 为垂心。所以点集 $\{O,O_1,O_2,O_3,O_4\}$ 构成一个垂心组。

2.4. 垂心组的欧拉球心定理

垂心四面体 $ABCD$ 中，H 为垂心，E、E_1、E_2、E_3、E_4 分别为垂心四面体 $ABCD$、$BCDH$、$ACDH$、

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51013. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 June 2020, publ: 9 June 2020

$ABDH$、$ABCH$ 的欧拉球心(垂心四面体的十二点球球心)，则四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，且点集 $\{E,E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 构成一个垂心组。

证明：令 O、O_1、O_2 分别为垂心四面体 $ABCD$、$BCDH$、$ACDH$ 的外心，有：[4]

$$\boldsymbol{OE}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}+\boldsymbol{OD})，\quad \boldsymbol{O_1E_1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{O_1H}+\boldsymbol{O_1B}+\boldsymbol{O_1C}+\boldsymbol{O_1D})。$$

将上面两式相减并整理可得：

$$\boldsymbol{E_1E}=\frac{1}{6}\boldsymbol{AH}。$$

同理

$$\boldsymbol{E_2E}=\frac{1}{6}\boldsymbol{BH}，\quad \boldsymbol{E_1E_2}=\frac{1}{6}\boldsymbol{AB}。$$

易证四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 的各棱分别与垂心四面体 $ABCD$ 的对应棱平行且成比例。故四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 与垂心四面体 $ABCD$ 相似，相似比为 $1:6$。因此四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 是垂心四面体，E 为垂心。所以点集 $\{E,E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 构成一个垂心组。

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 沈文选.垂心组的性质及应用[J]. 数学通讯, 2010, 2(2): 60-62.
[2] 万述波.四面体“垂心”的存在性问题及存在的充要条件[J]. 数学通报, 2002, 11(1): 20-21.
[3] 曾建国.垂心四面体的垂心的一个向量形式——兼谈四面体的垂心与欧拉球心之间的关系[J]. 中学数学研究(高中版),2009,2(1): 27-28.
[4] 曾建国. 再谈四面体的十二点共球定理[J].中学教研(数学), 2004, 6: 41-43.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51013. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 June 2020, publ: 9 June 2020