

Research on Paradox and its Related Problems(2)

Weiguo Shen

Distrect Heating, Beijing, China

Email: qygrswg@sina.com

Received: Jul. 6th, 2020, published: Jul. 9th, 2020

Abstract

This paper discusses the expression, definition, cause and solution of paradox. It involves Russell's paradox, liar's paradox, Richard's paradox, Berry's paradox, Greering's paradox, etc., and makes a systematic and thorough analysis of Cantor's diagonal method, diagonal lemma and Godel's theorem, which are closely related to the paradox. The paradox of essential implication is also discussed. At the same time, some comments are also made on the gains and losses of related paradoxical literature.

Keywords

Paradox, Russell's Paradox, the Liar's Paradox, Richard's Paradox, the Barber's Paradox, Berry's Paradox, Greering's Paradox, Definition of Paradox, Godel's Theorem, Cantor Diagonal Method, Diagonal Lemma

悖论及相关问题的研究(二)

沈卫国

区域供热编辑部, 北京, 中国

Email: qygrswg@sina.com

收稿日期: 2020年7月6日; 发布日期: 2020年7月9日

摘要

对悖论的表述、定义、成因、解悖等方面进行了深入探讨。涉及罗素悖论、说谎者悖论、理查德悖论、贝里悖论、格瑞林悖论等, 并对与悖论密切相关的康托对角线法、对角线引理、哥德尔定理等进行了系统、彻底的分析。对实质蕴涵悖论也进行了讨论。同时, 对相关悖论文献的得失也有所评论。

关键词

悖论, 罗素悖论, 说谎者悖论, 理查德悖论, 理发师悖论, 贝里悖论, 格瑞林悖论, 悖论定义, 哥德尔定理, 康托对角线法, 对角线引理

10. “烟民悖论” 引出的 “实质蕴涵” 问题、创造性思维本质的讨论

黄展骥先生文中提到的“烟民悖论”，与“实质蕴涵”有关。“烟民悖论”以及黄先生的解悖方案如下：

.....类似的例子有“烟民”悖论：“ a 戒烟了” (P)，如果假定 P ，则推出“ a 曾是烟民” (Q)；如果假定 $\sim P$ ，也推出 Q ，(P 、 $\sim P$ 必有一真)所以，仅从逻辑便证明实然句 Q 为真，是荒谬的。(如果从经验证明 Q 为假，则逻辑和经验携手便证明矛盾句“ $Q \wedge \sim Q$ ”为真!)怎么消解呢?原来孤零零的 P 预设 Q ，当把 P 的预设 Q 充分表示出来，便显露出复合句“ $P \wedge Q$ ”。当设“ $P \wedge Q$ ”为假时，它便等值“ $\sim P \vee \sim Q$ ”，推论不出 Q !前此的论证也是犯了“复合命题”谬误，悖论消解了。[4]我们认为，语言乃“约定俗成”，以上对“谎者”悖论的四种分析及消解方案均能成立，并不“互相排斥”!(黄展骥，前文)

黄先生的解悖方案我认为是正确的。但人为地把推理分为“逻辑的”、“经验的”，笔者则认为不必要也非事实。实际都是逻辑推理。比如，如果仅仅假定某人并未“戒烟”、从未“戒烟”，则严格讲是推不出“曾是烟民”或“不是烟民”的。因为既可能该人从不曾抽烟，不是烟民(从不抽烟，戒什么烟?无从谈起戒烟的事)，也可能该人是烟民，只不过没有戒烟而已。但在日常推理习惯上，往往在我们说某人“没有戒烟”，就理所当然地得到(推出、默认)他是抽烟的，否则何必多次一举说他没戒烟?这是默认的。不抽烟，当然谈不上什么戒烟，何必提戒烟的事?同时，如果我们说某人从不曾戒烟，则他也很可能或就是从从不抽烟的(非烟民)。这个推理在日常也是可以的，不能说错。事实上，笔者认为，此处牵涉到实质蕴涵的本质及其必要性、不可替代性了。按数理逻辑的实质蕴涵推理规则，这个“如果.....则.....”类型的推理是成立的。即无论“ $\sim P \rightarrow Q$ ”(从没有戒烟可推出是烟民)，还是“ $P \rightarrow Q$ ”(从戒烟了也可推出是烟民)，或者“ $\sim P \rightarrow \sim Q$ ”，甚至“ $\sim P \wedge P \rightarrow Q$ ”(即戒烟又不戒烟，矛盾，完全不合理、不成立，也不影响是烟民的事实。如果该人真是烟民或非烟民的话)总是成立的。也就是为“真”。因此笔者认为，“戒烟悖论”与其说是一个逻辑悖论，还不如说是一个“实质蕴涵怪论”。“怪论”之所以会产生，也就是之所以怪，是实际隐含(起码是“默认”。或虽然没有意识到，但实际必须要有)了一个假设“如果所有未戒烟的人指的是且仅仅是烟民，而并不包括那些从不抽烟的人”。如果有了这个假设，则该人如果未戒烟，就可以推出他抽烟(因为已经假设了所有未戒烟的人均如此，故可推出)。而所谓被认为是严格的“未戒烟就意味着是烟民或不是烟民”，实际也要依赖假设“并非全民都抽烟”或“全民都抽烟”。正因为这两个假设都不可能真的存在，因此被默认。对于“未戒烟”可以推出“不抽烟”(不是烟民)的情况，隐含假设显然是“如果从不抽烟，当然无须戒烟”。因此由“未戒烟”就可以推出“可能不抽烟”(不是烟民)，如果再隐含一条“所有的烟民都戒烟了”，则没有戒烟的，只能是非烟民(从不抽烟的人)。可见，很多(甚至某种意义上是全部)推导实际都需要或存在隐含的假设(没有名言甚至意识到的假设)。因此为什么实质蕴涵中可以有“假 \rightarrow 真”?就是由于后件如果确实为真的话，尽管前件为假，但如果有合适的假设，仍旧可以得到实际的“真 \rightarrow 真”。比如，一个推导“如果太阳西出，则太阳东升”，表面无道理，但实际可以是：如果当初把“西”叫“东”，则“西出”即现在的“东升”，得证。因此实质蕴涵的“假 \rightarrow 真”，这个前件假，但可以有预设条件使得最终成为实际的“真 \rightarrow 真”。如此，不写甚至没有意识到

这个预设的隐含假设，可以简写为“假→真”。也就是只要后件确实是真的，前件的任何“假”都可以“变为”“真”而已(找出预设的隐含条件即变假为真了)。又由于隐含假设随处可见，所以干脆为省事，就令一般地有“假→真”，以备随时可以添加、揭示那个或那些隐含条件，使得变回到实际的、真正成立的“真→真”来。比如前例实际还有隐含假设“太阳不南出”和“太阳不北出”。只不过这些都被当作“常识”而“忽略了”罢了。这也就是“假→真”的存在道理。也就是为何看似明显不合理，但却应该甚至必须保留它的理由。即：只要后件为真，前件真假并无所谓。笔者认为，更为根本的，实际是实质蕴涵中的不相关性，也就是只要后件为真(确实是真的)，那么，前件不但真假无所谓，就是与后件毫不相关(当然只是表现的)也无所谓。正是这种不相关性，才有的前件真假也不相关。因此前者更基本。

举一个例子：如果一个小孩在吃糖，则推出太阳东升。前后件表观毫不相关。怎么推导呢？小孩吃糖这个动作当然在某时刻进行，太阳东升也是在某时刻完成，于是，在小孩吃糖 24 小时内，太阳必然东升(只要太阳东升是个客观事实)。简称(实质蕴涵)：小孩吃糖，推出太阳东升。如果小孩吃糖为假，也就是小孩没有吃糖。也就是任何时刻他都没有吃糖，而太阳东升是在某时刻的，也包括在小孩没有吃糖的时刻之一。也就是太阳东升时小孩必没吃糖，小孩没有吃糖时太阳东升了。简称(实质蕴涵)：小孩没吃糖，推出太阳东升。还有比如说“孔子两千年以前死了，今日太阳升起”，前后件表观无关联。但可以这样补充条件“孔子两千年死了，但他死不影响地球自转，因此今日太阳仍旧升起”。

所以只要后件确实真，前件真假与否，相关与否，在实质蕴涵下都无所谓，都可以由补充条件、前提来完善推导，使之成为真正的、有关联的、有效的“真→真”推理。又正因为此，前件是什么，反倒无所谓了。为简便，才有实质蕴涵的存在。

可见，实质蕴涵的存在价值，或不得不然，不得不保留的理由，就是只要后件(推导结果)确实是真的，那么，任何命题无论真假还是相不相关，都可以充当其前件，也就是理由(严格而言是众多的理由之一)。此点之所以必须允许，是几乎所有推导都离不开它，因为我们不可能在每次推理中都能够一无遗漏地列出所有前提、假设、条件。无论是充分的，还是必要的。如果我们刻意这么做，也许严格地对任何推理而言，此种假设、前提或许可以有无穷种。比如前面那个“太阳东升”的例子，假设、条件还可以有什么地球的存在，太阳的存在，地球的自转、方向，太阳系的存在，“升”、“降”的含义，“太阳”一词的含义，运动的相对性(太阳未升，是地球在“降”)，云雾遮日看不见日升算不算升，在地球的一个地方日升了，另一个地方未升怎么算等等。这些，一般默认不影响推理，但在某些情况下，也会干扰推理的结果。既然如此，对一个确定为真的结果，自然也就可以由于这些条件、前提，把原本不相关的命题与结果关联起来，形成真正的、相关性的一个“真→真”推理。也就是真正有效地推理。

对于“假→假”为真的推理，实际是由逻辑规则从“真→真”推理由逆否命题得到的。这个众所周知。但有一点必须重视，为以往所未见披露的：由于“真→真”推理前件之“真”可以与后件之“真”表观毫不相关，因此其逆否命题“假→假”就必然相关，因为连带把“前后件不相关”这一点也给否了。这就杜绝了前件可以是在某条件、前提下的“假的假”成真，形成“真→假”的错误。至于其推理的合理性的实例，罗素当年给出的由“ $2+2=5$ 推出罗素与某主教是同一个人”的著名调侃式的推理就很有代表性：.....推出了 $2=1$ ，则罗素与某主教是两个人，两个人等于一个人，因此罗素与某主教是同一个人”。那么，在 $2=1$ 前提下，能推出太阳西出吗？当然可以。如果 $2=1$ 为真，则太阳西出与太阳东升为两种情况，它们无论与太阳东升还是与太阳西出，都是两种情况对一种情况，由 $2=1$ ，就是两种情况等于一种情况，而太阳西出是一种情况，于是得到太阳西出。

一个经常被人引用的实质蕴涵实例，是其推论“如果列车行驶在沪宁线上，它不是驶向南京，就是驶向上海”，可以推出“列车行驶在沪宁线上，就必然驶往南京。或者列车行驶在沪宁线上，就必然驶

向上海”。这个推理明显看起来荒谬。这个实质蕴涵怪论产生的原因，似乎莫衷一是。表面看，列车在沪宁线上，可以向南，也可以向北，怎么最后就成了必须向南或必须向北呢？实际上，这里一如笔者前面所论，其前提中实际隐含一个假设，没有被明确指出，也就是“列车行驶在沪宁线上，如果它没有驶向上海，就当然是驶向南京；反之，如果没有驶向南京，就必然驶向上海”。如此，我们推出的就是“列车行驶在沪宁线上，如果没有驶向上海，就必然驶往南京；或者列车行驶在沪宁线上，如果没有驶向南京，就必然驶向上海”。

对于“真 \rightarrow 假”为假也就是不可能为真的问题，由前述“假 \rightarrow 假”中的“假”必须是确定的讨论可知，由真假才能推出真假。“真 \rightarrow 假”中后件当然是“真假”，那么如果“真 \rightarrow 假”要想为真，则必然前件之“真”为“真假”，这是个矛盾，因此不能立，所以“真 \rightarrow 假”为假得证。

对比数理逻辑的实质蕴涵与形式逻辑的三段论推理，我们也可以看出二者之间的关联性。比如一个三段论推理：1) 所有的金属都导电(大前提)，2) 铜是金属(小前提)，3) 所以铜导电(结论)。如果用实质蕴涵来表述，则是：如果所有的金属都导电，则铜导电。属于“真 \rightarrow 真”型的。显然，这里是省略了“小前提”铜是金属。因为铜是金属广为人知，不说出来大家也知道，因此省略了。但实际上它是一个前提。如果我们把前面的“铜”改成“水银”，由于可能很多人不知道水银是金属，于是对他们而言，实质蕴涵“如果所有的金属都导电，则水银导电”，前件与后件就不相关。只有加上确定性的“小前提”“水银是也是金属”，这个推理对他们而言才是可信的，前件与后件才会相互关联。可见，实质蕴涵本质上就是形式逻辑三段论的简化表述，而一个三段论，或者多个连续的三段论，把其中的小前提(可多个)省略，只保留“大前提”与“结论”，就是数理逻辑实质蕴涵的表述。

对于上面的由“一般”到“特殊”的演绎推理是如此，对由“特殊”到“一般”的归纳推理也一样。如，1) 铜导电，2) 铜是金属，3) 所以所有的金属可能都导电。第三步的“猜测”可视为一个创造，起码是创造的基础。这个推理实际与前面的推理就推理本身而言并没有本质区别，只要我们把“可能导电”视为一个真命题。尽管导电与否是不确定的，不能看作一个真命题，但可能导电，本身是真的，也就是“真的可能”、“可能本身为真”。如此，它对应的数理逻辑实质蕴涵就是“如果铜导电，则所有的金属可能导电”。后件也可视为是“真”的。“真”的是可能性本身，即可能性为真，只要有可能存在，这个“可能”即为真。此时，三段论的小前提“铜导电”，就是我们前文揭示的实质蕴涵中往往是隐含的、或不言自明的、被当作常识的、或未被察觉的、被人忽略的那个或那些个前提。顺便提一句，由“特殊”到“一般”的创造性归纳思维、推理，在推理形式上与由“一般”到“特殊”的演绎推理没有本质的区别，唯一的区别就是演绎推理推出的是具体的为真的事实，而归纳推理推出的事一种“可能性”，这个可能性本身也是一个“真的事实”。如此而已。对这个可能为真的事物或概念，其真正的真或假，是需要客观地去验证的，不是思维、推理可以最终解决的。这就是所谓“创造性思维”的本质。作为一个推理模式而言，笔者坚信，它不可能是复杂无比的。换言之，所有的推理，在本质上是具有相同或相似的形态的。

以上论述，或许可以运用于人工智能理论及实践中。

11. 说谎者悖论剖析

悖论可以分为几种：

佯谬。与事实相悖，但从推理上一时看不出什么问题，不过肯定有错的。这其实不是真正意义的逻辑悖论。比如著名的芝诺悖论。明明阿克琉斯是可以追上乌龟的，这是事实，无须多言。但在芝诺著名的推导中，一时甚至逾千年居然挑不出错。但根据事实，可以肯定是错的，而且终将是可化解、解释清的；

悖论。众所周知，凡是悖论，很多都具有“自指否”的特性，也就是最终无论经过怎样复杂的推理过程(实际也不会太复杂，后面会详述)，最终都会归结为 $A := \neg A$ 类型。也就是 A 当且仅当 $\neg A$ ， $A \wedge \neg A$ ， $A \leftrightarrow \neg A$ 等等表示。但这里的 A 为一个变元，可以是任何命题。比如“张三”，形成“张三说自己不是张三”。又比如“马”，形成“马非马”。但这里面的“自指否”中的“自”，指的是“张三”，是“马”。实际严格而言是“他自指”、“它自指”。这种悖论(占绝大多数)的解悖，无非就是“没有这样的理发师”，因为悖论中的理发师是要满足具体限制条件的，所以不存在能满足那个特指的限制条件的理发师，于是解悖。而“马非马”，则不能说“没有这样的马”而解悖。因为“没有这样的马”就是“非马”，又会推出“有马”、“是马”，因此这里的否定，应该是“没有这样的生物”，即没有“又是马，又不是马”这样的生物存在。如此解悖。总之，这类悖论解悖容易。均可以按否定反证法预设(一般是隐含的)假设的方式解悖。因为这类悖论所涉及的命题本身是论题范围是可以被扩充的。通过否定这个扩充，就否定了悖论中所涉及的论题的存在性。甚至连“我说自己不是我”，实际也是“非牵句自指否”。这里的“我”，是指的作为人的“我”，而不是这个句子本身。这类悖论，都是可以化解或解悖的。最起码可以认为这个句子是“错”的、“假”的、“矛盾”的，也算解悖了。如理发师悖论，我们可以认为根本就没有这样的理发师。该悖论一开始说“有这样一个理发师.....”，首先预设了其“有”，使人受到诱导，产生困惑。实际上，如果一开始就说“假设有一个理发师.....”即知道这不过就是一个反证法，否定这个假设既可以了(文兰，悖论的消解)。甚至一开始就说“不可能有这样的理发师.....”，则这个悖论根本就不存在了。因此，具体这个悖论之所以存在的症结，就是预设了存在这样的理发师。这是该悖论之所以为悖论的前提条件。前面公式中的 A ，还可以代入“牵句”，此时形成的是“牵句自指否”命题，也就是强化说谎者悖论如“牵句错”、“牵句假”。这个悖论单独归为一类，是提出最早(2000年)，最为独特，通常被认为是难以解悖的。原因是这个句子是针对句子本身，同时又针对判断词“对错”、“真假”的、“矛盾与否”的，也就是句子中就含有这样的判断词。而“真假”、“对错”、“矛盾否”又是应该由外部来判断的。因此在这样的语句中(即“牵句假”之类的)，外部判断词与内部它自己说的判断词混为一谈，没有严格区分。即：说真假，是句子自己说的，还是别人说的？在论推导中未曾明确，致使产生了悖论，又讲不出什么原因，或不知道原因何在。本质上，就是悖论、矛盾需要真假的判断，而这里又是直接针对真假这样的判断词的悖论。本身就构成封闭的逻辑循环。比如，如果说“牵句错”为错的，显然，就可以推出牵句又对了。如果说“牵句假”为假，则也可推出牵句为真。如果按反证法的预设前提的解悖方案，“预设”这个“牵句”对错、真假为假设，都不行。悖论就是由此而起的，否定这个假设仍是悖论。无法这样解悖。那么，预设“有这样的句子”、“有这样的人”说此话、写此话，然后否定有这样的人，或没有人说这样的话，行吗？我们说，张三不说了，李四可说。都不说了，还可以在心理想。人类不存在了，当然这个悖论似乎可以自解了，但它也“曾经”存在过。就是把悖论改成“牵句不存在”，也还是悖论。因为这个说自己不存在的句子，已经客观存在了，否则怎么会知道它说自己不存在的？所以这类所谓的“解悖”，按反证法的预设假设的否定的思路，就是先“假设存在这样的句子”，最后推出悖论，否定前提，得到“不存在这样的句子”。不存在这样的句子，当然就不会有因为这个句子所产生的矛盾。这个谁都知道。但问题是偏偏就有这样的句子，不是吗？这种“解悖”，问题在哪里？实际上，“存在这样的句子”，不只是产生这个悖论的充分条件，而且是必要条件。而这个句子无论如何都是存在或已经存在或曾经存在的。

总之，仅仅说或知道这个特殊的句子会产生悖论，是不够的。仅仅不让人再说这样的话，当然就再无此悖论。但“曾经有人说过”，就不算数了？此种“解悖”，不蒂以闭目塞听为天下无事，是典型的削足适履“解决方案”。事实是，我们不但要知道由“牵句假”就可以“真可以推出假，假又可以推出

真”，而且应该知道究竟为什么可以，而不是到此止步。比如，我们说“假如此句为真”，当然会得到“假”，但我们凭什么可以进行这种假设？有什么根据？还是胡乱假设、就这么无根据地假设了？说“假如此句假”也一样。凭什么可以如此地假设？而为什么在如此假设后，又的确产生了悖论。而仅从“牵句假”三字，似乎并没有明显的悖论迹象，也就是说，它没有告诉人们，我就是个悖论、矛盾。悖论、矛盾是后来推导出来的。人们所欲知的，不止是这三字会产生悖论(这个大家都知道了)，而是产生悖论的原因。即，关键是要说出悖论产生的原因，才能算是真正的、令人信服的解悖。以往，笔者未见有人给出这样的解释。笔者经过思考认为，问题的关键是要对判断词“真”、“假”，进行外部对此句判断(真或假)和此句“对自己”的判断(真或假)进行区分。只有直接由“牵句假”这个三字命题本身直接推出的结论，才可以作为“外部判断其真假”的依据，否则这个外部随口一说的“此句是真的”(它自己明明说的是“牵句假”，你凭什么还硬说——或非要假设其“是真的”？这不明知与原句矛盾还要非这么说吗？道理何在？)或“此句是假的”，就是无根之木、没有根据的胡乱判断，尽管它确实可以导致悖论，但并没有把悖论产生的缘由讲清楚。实际上，“牵句假”中，“牵句”就指的是“牵句假”，因此代入，就有“牵句假”假，于是得到“牵句真”。这个“牵句真”不是从外部给出或从外部的假设推出的，而是由该句本身推出的，因此可以看成是该句“牵句假”隐含的一部分，只不过它没有明确说出来罢了。但是，可以由它直接推导出来。因此，“没有写全”的所谓“牵句假”，真正写全，就应该是“牵句真 \wedge 牵句假”，也就是“牵句真且假”、或“牵句既真又假”、“牵句真 \wedge 假”等等。这就是由外部评论(以假设的形式)“牵句假”为假、为真的依据：你自己的意思就是“牵句真且假”嘛，尽管没有直说，仅说了半截“牵句假”。我由外部评论你“真”，依据就是你自己都说“真”，起码是一半说“真”，我没有无根据地“瞎评论”；如果由外部评论你“假”，自然也如是，都有依据，也就是都有其道理。“真且假”当然是矛盾，都知道矛盾等价于一个悖论(二者可以互推)，而且矛盾、悖论的真值是“假”，因此“牵句真且假”为假。这就是强化说谎者悖论之所以会产生的原因。对于“牵句假”，如果作为前述不完全的表述(“半个表述”)，说其假，会产生众所周知的悖论。但如果作为“牵句真且假”的简化表述(因由前者自身的要素就可以直接推出后者)，则其真值为假。前一个“假”，会产生悖论；而后一个“假”，则是因悖论(矛盾)而得之。又如“牵句说的是谎话”，“牵句”就是“牵句说的是谎话”，代入得到“牵句说的是谎话”是谎话。即“牵句说的不是谎话”，既有“牵句说的是谎话”实际等值于“牵句说的不是谎话 \wedge 牵句说的是谎话”或“牵句说的既是谎话又不是谎话”。当然是矛盾并可以推出悖论。真值当然是“假”。

有人也许会说，假设“外部”判断“牵句真”(严格讲应该是“该句真”，“牵句其真”)，得到“假”；如何就不能“外部”判断其假，得到真？我们说，当然可以，这是个悖论，谁都知道。但悖论产生的缘由并不清楚。也就是，“外部”凭的什么可以去下这样的“真”、“假”结论作为假设(注意，不是作为推理的结果)，是不清楚的，没有讲清道理的。就算是外部假设其假，如果不说明缘由的话，当然也就必然是“不明缘由”的。这没有什么可说的。而我们前面说的，“牵句假”由其本身推出……，如果就是“外部推出”，也只有阐明这个推理是“依据于”该句本身的固有逻辑脉络(隐含的)再由“外部”来施行的这个推理，这实际可以认为是在“代替”这个句子本身也就是按照、依据“牵句错”的思路在进行推理，由此推出(此时无论是其“自己”，还是“外部”，都无所谓了)的“牵句真”，才可以算作这个悖论之所以会产生的确实的理论依据。总之，得到的“牵句真”，不是“牵句假”自己推出的，就是外部依据“牵句假”自己的逻辑内涵推出的，这才是有根据的、作为“牵句假”的“伴随语句”最终可以写成“牵句真 \wedge 牵句假”的确实理由。一句话，上来就说“假设牵句真，……”，或直接就是断语“牵句

真，.....”，没有讲清究竟为什么可以做这种假设或下这个断语，这个假设或断语的理由何在。只是一种盲目的、讲不出道理的假设或断语。自然，其充其量也就是个“假设”(或讲不出什么道理的“断语”)而已。而人们通常的另一半推理“假设”或“下断语”“该句为假”，该句讲的就是“牵句假”，因此又“真”，也没有讲清究竟为何可以做这样的假设或断语。只有“牵句假”中之“牵句”，就是指的“牵句假”，代入得到“牵句假”为假，进而有“牵句真”，才是依据“牵句假”之意直接推出的、有根据的“牵句真”(此时由谁去推出，不重要了，无论“外部”还是“内部”，只要是依据“牵句假”的本意即可)。注意，这里个推理是无须“假设”的，是“按其本意的推理”。这点当然很重要。这里的推理使用的实际是“因为.....所以.....”，而不是“假设.....才有.....”。这是跟以往推理的根本性区别。以往的，都知道是个悖论，但如何来的，没有解释清楚，因此众说纷纭。是个由“假设”引出来的悖论。而此时的，这个悖论是由“因为.....所以.....”直接得到的，是讲出道理的、解释清楚的了。

笔者之所以在此问题上如此“饶舌”啰嗦，就是生怕读者区分不了这里面的微妙差别。毕竟，这是一个这么多年都没有讲的很清楚的问题。

综上，强化说谎者悖论“牵句假”之所以会产生悖论的原因，至此应该很清楚了：它自己都说自己是悖论、矛盾的嘛。怎能还不是个悖论、矛盾？尽管它表面上只说了“半截”“牵句假”，而那个隐含的“牵句真”，是可以由“牵句假”不依靠外部其它因素推出来的。“牵句真且假”，才是真正表述完整的句子。它等价于“牵句矛盾”或“牵句可推出悖论”或“牵句就是悖论”。

还可以看出，这个悖论无论是用反证法假设“不是悖论”，还是直接证明用假设“是个悖论”，都会证明其就是个悖论。而且再也没有该悖论产生的其它隐含的前提、假设、条件，因此，这个悖论是一个真正意义的、不可消解的悖论、矛盾。因为很显然，其语句就等价于一个矛盾语句“牵句真且牵句假”，如此，还如何消解这个矛盾？它归根结底就是一个“牵句自指否”的矛盾。它自己都说自己是矛盾，谁还能有什么理由说它不是吗？

那么，如说“牵句产生矛盾”呢？可以有两种表述或解释。第一，如前面的方式可以得到“牵句产生矛盾”产生矛盾。后面的“矛盾”肯定了前面的“矛盾”，仍是矛盾，无问题；第二，后面的“矛盾”否定前面的“矛盾”，这样得到了“牵句未产生矛盾”(或“牵句不矛盾”)，仍旧与“牵句产生矛盾”矛盾，所以是悖论，仍旧是个矛盾或产生了矛盾。这里面的“矛盾”，是“牵句自指”的，也就是“牵句自指真且假”，仍旧不免悖论的结局。实际与“牵句自指假”效果等价。同时，众所周知，矛盾和悖论是可以互推的，因此等价。所以说“牵句是悖论”，本质上也还是“牵句自指否”，起码其由来是“牵句自指否”。也会进入针对这个“悖论”本身的“悖论推理循环”。如果说“是悖论”，则牵句说的就是自己是悖论，于是说对了，牵句就不该是悖论。矛盾；反之，如果说“不是悖论”，则与“牵句是悖论”矛盾，矛盾还是悖论，因此又是悖论，仍矛盾。两句仍旧形成悖论。如果说“牵句无解”呢？无解，那么牵句说的就是无解，说对了，对则有解(当然说牵句有解，则牵句说的是无解，矛盾，则无解，还是悖论)。而“牵句错”无解呢？也会一样：因为由“牵句错无解”，就可以推出“牵句错为错”，进而推出“牵句对”，对则有解，仍进入悖论循环。可见，强化说谎者悖论“牵句错”或“牵句假”，显然不是可以像文兰院士认为的那样以其逻辑代数(布尔代数)表达式“无解”或“无句解”就可以化解的(文兰，悖论的消解)。因为前面已经论证了，“无解”、“无句解”，作为“错”、“假”、“矛盾”等断语的等价命题，实际是同义反复(代数中的“无解”的定义是什么？还不是推出了矛盾、悖论？)。因此，这是一个重复定义、循环定义。用方程无解作为解悖或解悖的依据，不行。比如说“假设方程有解”，推出悖论、矛盾，于是否定反证法的前提，得到方程无解就算解悖的话，那么，“有解”实际等价于“无悖

论”、“无矛盾”，因此该假设等价于“假设不会产生悖论”，最终产生了悖论，于是得到“会产生悖论”（等价于方程无解），等于什么也没说。同义反复，不行。有人也许会说，那就不允许它出现。但“不允许”什么？不允许“牵句错”出现。这不“牵句错”已经又出现了？

从布尔代数(逻辑代数)的角度看也是如此。按“等于”的数学含义： $X=Y$ 当且仅当 X 和 Y 相等。两个数学对象相等，它们在各方面均相同。这就定义了一个二元谓词“等于”，写作“ $=$ ”。(百度)于是，我们可以推得“真=假，当且仅当真 \equiv 假=假”(莫绍揆，逻辑代数初步，P46)。也就是“ $1=0$ ，当且仅当 $1\equiv 0=0$ ”，这里的“ \equiv ”，表示逻辑上的同真假或“等价”概念。在只涉及真假值的二值布尔代数中，实际“ \equiv ”与“ $=$ ”是可以互换的(莫绍揆，逻辑代数初步)。显然，在(也仅在)布尔代数中如果得到或给出 $1=0$ 。即“真=假”或“真=非真”。它由其“非真即假”或“非0即1”的二值性，由其二值变量形式 $x=\neg x$ ，将0或1，真或假代入 x 而得【但应该确实注意(以往常被混淆) $x=\neg x$ 虽然是矛盾的一般形式，但不就必然是“牵句自指否”的谎者悖论。比如将“马”或“张三”代入变元 x ，虽然还是矛盾，但不是“牵句自指”类型的了。“马同时不是马”，“张三又不是张三”，当然是假命题。与说谎者悖论不同，这里说其“假”不会又进入悖论循环。这是应该特别注意的】。或也可以将“牵句”代入，得到“牵句 $=\neg$ 牵句”即经典强化说谎者悖论的“牵句假”(最简隐式)、“牵句 $=$ 牵句假”(显式)，显然这些都是等价的、以往被“公认”的、一般意义的“矛盾式”。起码表观上是如此。但仅此而已吗？在(当然，现在应该加上一个“也仅在”了。绝不是啰嗦)二值的布尔代数中，“ $1=0$ ”或“真 $=\neg$ 真”实际就是我们这里所说的强化说谎者悖论“牵句假”(牵句自指否命题，真当且仅当假，真 $=\neg$ 真，真 $=$ 假，真 \wedge 假，真 $=$ 假，布尔代数意义的 $1=0$ ， $1\neq 1$ ，真 \neq 真，等等)，二值布尔代数中，判断词只有“真、假”两个，对应于符号“1、0”，因此 $1=0$ 或真 $=\neg$ 真，其真值只能为假(=0)。“ $1=0$ ”或“真 $=\neg$ 真”当然也会像强化说谎者悖论中的语句“牵句假”一样导致悖论：假设1(真)(或“ $x=1$ ”，以下省略)，因为 $1=0$ ，则有0(假)，矛盾；假设0(假)，因为 $0=1$ ，则有1(真)，仍矛盾。或可以表示成： $1(\text{真})\rightarrow 0(\text{假})$ ； $0(\text{假})\rightarrow 1(\text{真})$ 。因为导出了“因果互推型矛盾”，因此就是个悖论。本来矛盾与悖论是可以互推的，这也没有什么可稀奇的。但值得注意的是这里的这个悖论是与自然语言系统的“牵句自指否”型的强化说谎者悖论(“牵句假”，就等价于二值布尔代数的“ $1=0$ ”或“真=假”，因为显然，说谎者悖论中的判断词也就只有“真、假”两个。一旦“牵句自指”，就是“真=假”或即“ $1=0$ ”。而反之，一旦在二值布尔代数中有“ $1=0$ ”，翻译成自然语言，必然就是“牵句自指否”。)等价的。因此与在强化说谎者悖论中一样，在这里的二值布尔代数中，很明确，因为“ $1=0$ ”或“真 $=\neg$ 真”就是个矛盾，而且推出了“牵句自指否”型的悖论，因此真值在现有布尔代数系统中只能规定为“假”(=0)。但这里的这个“假”(0)，是针对整个“ $1=0$ ”而言的，显然不是针对“ $1=0$ ”中的那个“1”或“0”的真值。这是需要特别强调的(可参考前面对强化说谎者悖论的讨论)。也就是说，也许我们应该写为“ $1=0$ ”=0。而不能写为“ $1=0=0$ ”。否则还是悖论。因为显然如果我们把真值“0”代入后，得到“ $1=0=0$ ”，或就算“ $1\equiv 0=0$ ”，它也仍旧是个悖论。明确说，就是由这里的“0”，因为 $0=1$ ，又会得到“1”。重新进入悖论循环。特别地，都知道布尔代数在计算机中的应用。这个悖论状态，如果计算机程序在解布尔方程时进入它，将会由“0”到“1”，再由“1”到“0”地无限循环下去。这不就是“死机”吗？不就是所谓图灵机的“停机问题”吗？这里算是找到问题的根源了。虽然莫绍揆敏锐地指出(但他没有给出更进一步的论述)，此时的真值“假”，并不是“简单的假，而是指 $p\wedge\neg p$ (见补元律)，这是“矛盾”，或“自相矛盾”。“自相矛盾”比简单的“假”要强的多”(莫绍揆，逻辑代数初步，P54)。笔者认为，莫先生指的“假”就是前面提到的“ $1=0$ ”=0，而不是“ $1=0=0$ ”。这是两种“假”(“0”)的区别。

特别提一下，笔者独立思考，曾经考虑用三值逻辑解决强化说谎者悖论的问题。并且颇有心得。但后来自己研究了所谓“非真非假”、“又真又假”的状态及其真值关系，如果经过反复代入，我们可以甚至不得不得出会有无穷值的问题。不仅系统无限复杂，而且悖论问题仍旧没有彻底解决。显然，就仅就其复杂性而言，其对解释悖论问题就是个失败。其解悖方案实际与罗素的类型论同构，只不过一个用之于形式系统，一个用之于自然语言系统罢了(顺便提一句，哥德尔定理得到的结果，实际与逻辑的类型论也不能不是大同小异的)。因此，笔者放弃了这一考虑，不得不重新思考强化说谎者悖论问题，并最终得到上述极其简单明快的结果。只是在最近(过去笔者对悖论问题虽然时有思考，但不是主攻方向，因此文献掌握、了解不够)，在随意翻看新购得的《矛盾与悖论新论》(张建军，黄展骥，P235~253)时，才得证笔者曾经考虑过的三值逻辑的解悖方案，早已有之，但大都与笔者所得结论一样，并不成功。因此无论是所谓“真值间隙论”，还是多值逻辑，还是“元语言”论，与笔者自己独立思考得到的结果基本一致，就是解决不了根本问题。正如英国学者哈克所言，皆是“跳出油锅又进火坑”(张建军，黄展骥，矛盾与悖论新论)。细节笔者这里不谈了，只是在此宣示一下：三值、多值，或真值空隙论等解悖路径此路不通，这是笔者很动过一些脑子得出的结论，而不仅仅是根据文献的人云亦云。

补遗：1) 也许有人会质疑：既然可以将“牵句假”代入“牵句假”中的“牵句”，那么，我们不是可以反复使用这种代入，只要有“牵句”出现的地方，就行代入，不是会产生无穷的“牵句假为假为假为假……”吗？的确如此。但这其实只不过会得到无穷个“牵句真 \wedge 牵句假 \wedge 牵句真 \wedge 牵句假……”而已。其等价于“牵句真 \wedge 牵句假”。所谓“重要的话只说一遍”就够了，再重复多少遍也不改变什么。于是其它结论不变。

2) 有人说，任何命题都是说自己为真的。而且说这是人们的一项“共识”。(张建军，黄展骥，矛盾与悖论研究，P152)。不论这究竟是不是一个“共识”，就算是，严格而言，其与“牵句假”也构不成严格意义的悖论。这是因为如果这是“共识”，或客观事实，那“牵句假”本身无论是外部无理由地断定、评论其为真，还是客观真理性其为真，还是说“牵句假”的人说的此句“客观事实为真”，这都构不成悖论。因为“牵句假”是“牵句自判为假”，不是客观事实为假，因此它是违反客观事实的，因此就是一句真正意义的假话。就算“牵句假”说的就是“牵句的客观事实就是假”，它也与“牵句的客观事实就是真”构不成真正意义的悖论。因为不是说了吗？“牵句的客观事实就是真”，不是人们的“共识”吗？也就是真理，不可动摇的。无论谁再说什么。于是，只能是“牵句假”否定了这个“共识”，必然是真正意义的假。而无论说“牵句假”的人自己承认不承认、知道不知道这个“牵句的客观事实就是真”：承认，他就是“故意”说假话；不承认或不知道，他就是“无意”说了假话。总之，客观事实和“人们的共识”，与自己说自己“牵句假”不是一回事。因此仔细分析，此前提下推出的悖论，是假悖。只有“牵句真”是从自己的“牵句假”直接推出是，才是真正的悖论。因为此时无论“牵句假”和“牵句真”，都是他自己说的或由他所直接推出的，也就是等于是他自己说的。等于他说了“牵句既真又假”。这才可以构成严格意义的、无瑕疵的真正的悖论。此即强化说谎者悖论的本质。也就是，此悖论与客观上是否“任何命题都说自己为真”无关。它只是取决于说“牵句假”的人自己说的话及其推论。

3) 因为我们最终确定，“牵句真 \wedge 牵句假”因其是个矛盾，所以其真值就是“假”，但会不会又出现由于其说的就是“牵句假”，重新又导致悖论？不会。尽管“牵句真”是直接由“牵句假”导出的，是“牵句假”所隐含的一个与其自身直接矛盾的句子，但它毕竟是“牵句假”之外的另一个句子，它是“牵句假”的一个赋义，是由“牵句假”推出的，是其所包含的(隐含)一个“牵句假”并未明确涉及的，但却在赋义上必然会被包含的一个“未曾明说”一项内容、含义。也就是“言外之意”，具体到这里就

是“牵句假”的“句外之意”。因此，“牵句假”的“牵句”，只涉及“牵句假”自身，与“牵句真”无关。尽管后者是由前者直接推出的。因为如果 A 可以推出 B ，不就是 $A = B$ 。充其量也就是 $A \wedge B$ 。因此，如果我们设 $C := B \wedge A$ ，其中 A 为“牵句假”； B 为“牵句真”； C 为“牵句真 \wedge 牵句假”。那么，只是由 A 本身可以不借助外部判断直接推出 B ，而 A 与 B 共同构成 C ，因此 C 假，与 A 的说“牵句假”不是一个概念，不能重新代入 A 中。也就是不会形成新的悖论。

注：笔者虽然过去就对悖论问题有所思考，但始终不是研究重点，因此文献掌握的很不够。特别是悖论方面的文章、著作可以说是汗牛充栋。只是在最近，笔者在随意翻看相关文献时，偶然并吃惊地发现，黄展骥先生，早就得到了与笔者类似的对说谎者等悖论的解悖方案(张建军，黄展骥，矛盾与悖论新论，P338~P341)。黄先生认为，此类悖论产生的原因，是话只说了一半，补充没有明说，但实际可以由那半句推出的另一半后，就是一个矛盾句，这当然构成悖论。这是典型的“复合命题谬误”。由于我是经过相当思考，否定了自己很多方案后才得到现有解悖方案的，因此对黄先生的论述，一眼就明白其意了。如果只是泛泛一读，不可能有什么深刻体会，也不可能对黄先生这里的贡献和能力有切实的理解与评价。笔者愿意利用这个机会，对已经仙逝多年，一生追求学问，但似乎一直怀才不遇的黄展骥先生，致以深深的敬意。

12. 悖论的定义与种类

由上面对强化说谎者悖论的分析可知，悖论就是一个先后由假设 A 、 $\neg A$ 时，因果性互推出了最终的等值式 $A \wedge \neg A$ ，也就是一个矛盾(通常说是“谬误”)。但我们知道，分别由 A 及 $\neg A$ ，是并不一定会推出矛盾的。按逻辑规则，“真 \rightarrow 假”为假，不成立。因此只有“假 \rightarrow 假”才为真。于是，由 $A \vee \neg A$ ，是推不出矛盾 $A \wedge \neg A$ 的($A \wedge \neg A \rightarrow \neg(A \wedge \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$ 可以，但反过来推不行)。只有矛盾，才可推出矛盾。也就是 $(A \wedge \neg A) \rightarrow (A \wedge \neg A)$ 。当然，此式与 $A \leftrightarrow \neg A$ 当然可以互推。而矛盾即假，因此就是“假 \rightarrow 假”，才可能得到“真”。强化说谎者悖论(其它悖论实质也一样)解悖的本质，就是找到单独的作为假设的 A 、 $\neg A$ ，如何得到可以作为推理依据(而不是作为结果)的 $A \wedge \neg A$ 。强化说谎者悖论究竟如何做到此点的，上节已经详细讨论过了。因此本来推导中的这个“假设该句真”，就成了“因为该句可真”。因为它是命题“牵句假”排除了外部无根据的断言直接推出的结果，因此这里当然可以作为推理的出发点之一。以往，只知道通过两个互逆的假设，可以推出悖论得到矛盾。而现在知道这是为什么了：这个悖论的推导的出发点，本身实际就是一个矛盾句。它当然要推出悖论、矛盾了。同时，这个悖论并没有其它说得过去的、可以被悖论作为反证法否定的假设前提。比如说“没有这样的说谎者”或“没有人讲这种话”，“以后不许讲这种话”等等，都没用。因为这句话已经出来了，存档了，写在书里了。最起码它也是“曾经”存在过。因此，这个悖论的解悖，就是知道了、明白了其产生的原因和其作为由本身表述“本句假”直接推出的矛盾而存在。因此，这个矛盾“牵句真 \wedge 牵句假”是其表述所固有的、不可消除的。这个或这种悖论特殊就在这里。它本身就是一个矛盾或隐含有一个矛盾(作为推理的出发点)，而不是由于作了其它假设而得到的矛盾。其它悖论，则还算可以通过推出悖论否定反证法的假设前提来解悖，或作为解悖方案之一(当然也许并不是最好的)。比如理发师悖论。其经典陈述一上来就说“有这样的一个理发师，……”，把这当作一个事实来陈述，结果推出悖论、矛盾，使人困惑。把人们的注意力引向了如何为这个理发师“打圆场”的方向去了(文兰，悖论的消解)。实际上，如果把“存在这样的一个理发师”当成一个假设(实际也只能是一个假设)，则通过推出悖论，否定这个假设，立即就得到“没有这样的理发师”的结论。这就是这个悖论的解悖方案之一。

有人也许会问：凭什么“没有这样的理发师”就是解悖，而“没有这样的说谎者”就不说解悖？可

以这样看：这样的理发师从来不会出现，也永远不会出现。而这样的说谎者就算没有了，这句话也已经有了、存世了。也就是存在或曾经存在了。这是由于理发师悖论中，悖论的推理中本身就有理发师给什么样的人理发这样的表述，所以要否定这个悖论，起码充分条件是不存在这样的理发师。而强化说谎者悖论，其悖论的表述中没有说谎者本人什么事，它只是说“牵句假”如何如何，因此，就算这个说谎的人不存在或不许存在了，这个句子也早就有了，因此悖论还在。可见，理发师悖论如果该理发师不存在或不可能存在，矛盾就没有了，就算解悖了。而强化说谎者悖论不行，没有了说谎的人，这个句子还在。

由以上分析我们应该能够得到悖论的一个定义：悖论，就是由一个隐蔽的、不易察觉的矛盾，或矛盾虽然明显，但其前提假设隐蔽的矛盾推出一个明显的矛盾推理过程。而解悖的定义，无非就是找出这个“隐蔽的、不易察觉的“矛盾”，或找出产生这个明显矛盾的隐蔽的前提、假设，而否定之。前者对应于矛盾是与悖论表述句外部无关的、不可消除的强化说谎者悖论；后者对应于矛盾是与外部因素有关的，可以消除的理发师悖论。

简单地，悖论就是一个被误以为或一时挑不出矛盾的“真 \rightarrow 假”推理。但实际上是“假 \rightarrow 假”推理的推理过程。当然这个假，就是一个矛盾或其等价式。无论前件、后件都如此。而找出前件那个“真”（当然是“伪真”）究竟是如何可以成为“假”（一个矛盾）的，就是“解悖”。当然这个解悖也不是说说而已的，它应该是充分必要的，条件太宽或太窄，都不行。太宽不必要，太窄不充分。比如说说谎者悖论，这个说谎者需要呼吸才能活，而活着才能说此话。那么，把解悖方案设定为不该他供氧，他必死，也就无此话了。如此之解悖，算解悖吗？

众所周知，悖论与反证法是密切相关的。很多逻辑大家都有此议，甚至杨熙龄说，两千多年，都是如此（杨熙龄，奇异的循环——逻辑悖论探析）。文兰院士说，悖论是反证法的“掐头去尾”，并作为他的一个创新点提出来（文兰，悖论的消解），但实际上，前面已经提到，此议古已有之，前辈提出者大有人在。但是，我们都知道，反证法不是一个十分牢靠的法则，陶哲轩就有相关论述（陶哲轩实分析，P435）。就以他提的那个 $x \geq 2$ 的例子为例，我们可以进一步引申为：设，一人自称他吃过饭后做了一道题，其结果为 $x \geq 2$ ，但突然发现或论证出根本就没有这个结果，从而由反证法，否定前提。但究竟是得到他做题的结果是 $x < 2$ 呢？还是他根本就没有吃饭？或他虽然吃了饭，但根本就没有做题，而是玩儿去了？无论哪个结果，都是符合这里的反证法的，也就是它们都是 $x \geq 2$ 的否定命题。但人们真正想得到的结论应该只有一个，也就是说有一大堆不相干的结论，不会使人满意。但由反证法，这里列出的任何结果在逻辑上都有其可能。对于与反证法密切相关的悖论解悖，也有这个问题。以说谎者悖论而言，你说没有这样的人，这样的谎者，这个人虽有，但没有说此话。不许再说此话，此话就是矛盾（不说为什么产生的），等等，都可以马马虎虎算是解悖。因为其中每一个，都可以起码暂时做到没有了这句话。但显然，这里面各种解悖方案理由都未能讲出明确的道理。有如理发师悖论，我们说解悖方案就是“没有这样的理发师”。说不说的通？当然可以。但这个句子为什么会导悖论，没有揭示。实际上，说“理发师给所有那些不给自己理发的人理发”这个条件，是表意不全的。实际上，它的完整的意思实际是“理发师给所有那些（包括他自己）不给自己理发的人（包括自己）理发”。如果把其他人排除，就成了“理发师给自己不给自己理发的自己理发”，直接矛盾，当然会推出悖论。笔者认为，这才是真正意义的解悖，也就是说出悖论深层次成因而非仅仅表面成因的解悖方案。

而所谓的“佯谬”，其定义在其它方面与悖论一致，但其推出的矛盾或谬误，是明显与纯客观的事实相悖的。其一眼就可以看出是错的，但在逻辑上错在何处一时是模糊或解释不通的。

有人说悖论就是矛盾，因为矛盾都可以因果互推，而悖论就是因果互推的。这种讲法不确切。因为如果一眼看出就是一个矛盾，或人为制造的一个矛盾，或因果互推的逻辑结构，它就是一个“谬误”、

“错误”，没什么可说的，所悖为何呢？“悖”应该说是一个违背常理的结论或命题。而一个明显、明确的矛盾，就正是“按常理”它就是一个明摆着的矛盾或“按常理”推出的矛盾。因此，虽然应该说悖论最终都可以推出一个矛盾，但一开始是不容易看出来的，或明明似乎没有问题，却推出了问题。这才叫悖论。一旦解悖，这个悖论就算解决了，严格讲就不再是悖论了。但考虑到它原先是悖论，因此在这个意义上，也可以仍旧称其为悖论。当然，此时严格意义上它是一个“曾经的”悖论，已经被解决了的、解悖了的、不再悖下去的“悖论”。举个例子：“一道数学难题，被解出之前，它是一道难题。但一旦被解出来，还难吗？对解题人而言，它成其为一道“题”吗？但对别人，或在历史上，它还是道题。之所以对此微不足道的问题啰嗦几句，就是连这样的问题，也会实际引起争议。比如张铁声与黄展骥两位悖论专家就曾经各自发文对这个问题进行辩论。

笔者上面给出的悖论定义，可以认为不仅是特性描述型定义，也是本质揭示型定义。而以往仅就笔者所见的定义，恐怕并未揭示悖论的本质，只是一些特性描述型的、现象揭示型的定义。此种定义比比皆是(陈波，悖论研究)。比如，“在符合逻辑推理的前提下，悖论是推出矛盾但原因不明的推理”(文兰，悖论的消解)。其它还有说“由看似正确的前提”如何如何。实际上，大同小异。当然，这些定义都不错，但都是描述性的。至于究竟为什么会“原因不明”，会“看似正确”但实际不正确，不正确在哪里，都没有说。本文提出的定义要明确的多。直接提出悖论的结果，就是实际地“由假推出假”，更明确说是“由矛盾推出矛盾”。但因为这个前件矛盾很隐蔽，因此被当成了“由真推出假”，“由非矛盾推出矛盾”。仅就此点而言，没有什么“原因不明”(原因很明)，而“看似正确”实际不正确，也很模糊。起码要想得到一个矛盾，前提当然必须是个矛盾(真值当然为假)。此点没有什么不正确的。

总之，以往笔者所见的悖论定义，描述悖论的外特性有余，而揭示悖论的本质不足。

这里引一段冯·赖特对悖论的论述：“矛盾律和排中律是思维的基本规律和最高准则。假如使用某个短语或词去表示、指称某个事物导致矛盾，这就是不能如此使用这个词或短语。理由：假如从某个悖论性语句或命题能够推出矛盾，这就是该语句或命题不成立的理由。……悖论并不表明我们目前所知的“思维规律”具有某种疾患或者不充分性。悖论并不是错误推理的结果。它们是从虚假前提进行正确推理的结果，并且它们的共同特征似乎是：正是这一结果即悖论，才使我们意识到(前提的)虚假”。

笔者比较认可冯·赖特的观点。但这里也必须指出，如果我们使用了错误的假设(前提)去进行了推理，那么这种推理本身，是不是就算正确的，是值得商榷的。事实上，如果如果一个推理是建立在错误的前提上的，我们也就有充分的理由将这个推理本身看成是错误的。只能说，这个推理在其它方面无错。但在其所依赖的前提方面，由于使用了错误的前提，因此推理不仅其结果为错，就是其推理本身也可以认为是错的。一个错误的结论，不可能是从正确的推理得到的。总之，从这里可以看出，有时候对一个概念的讨论是及其微妙的，其中的含义，远非那些符号、公式可以涵盖。

13. 悖论与哥德尔定理

因为布尔代数(逻辑代数)建立的目的是为了研究自然语言系统中的逻辑关系的，那么自然语言中的矛盾、悖论，自然应该在布尔代数中有对应表达。这是显然的。按这个思路，与之同构的哥德尔命题，实际也是导致悖论的(牵句自指否悖论，与强化说谎者悖论一回事)。其分析完全可以仿效对强化说谎者悖论“牵句假”思路。无论什么人进行怎样的辩解，二者实际在本质上就是一回事。实际上，哥德尔当年是推出这个结果的，明确说，就是得到了一个系统内的悖论。只是不愿意看到或没有觉察到或还是不相信形式系统中会有什么矛盾，因此把此结论(即系统产生了悖论)轻易地否定、放弃了(经常有人说什么哥德尔定理不是悖论，没有得到悖论，是在“悖论的边缘绕着悖论走”什么的。事实上，哥德尔是得到了

一个悖论，但不被他采用。请记住：是得到了而不采用，而不是没有得到或根本没有！很多盲从的“专家”，硬是连这个也没搞清)。由此才有后来的叠床架屋，繁复拗口，争议不断的什么系统内的不可判定、但又为真的哥德尔定理。即不是定理，也无法证明的那个“真”(非假)命题，其“真”究竟是如何得到的？没有证明，也不可能证明的东西，如何能确定其真？反之，真的东西不要证明了吗？于是，没辙了，回答不了了，就扯什么“系统外的证明”，“元数学意义的证明”，“心智的领悟”等一听就是强词夺理的说辞。由于笔者根据对强化说谎者悖论的分析，得到布尔代数(逻辑代数)的同构模型，因此，如果仿照哥德尔定理，强行认为布尔代数没有内在矛盾(悖论)，而是系统不完备，也就是 $1=0$ ($1:=0$ ，真=假，真并且假，真当且仅当假， $x=-x$ 等等)并不认为是系统内得到的“假”(=0)命题，而是一个系统内的不可证的真命题(非定理)。如此，是否在这个布尔代数外，还有实际上只能是无穷多的“元布尔代数”？当然，在这个布尔代数的命题并没有“牵句自指否”的陈述，但其逻辑“真、假”值与前者一致，而且句子或式子中都包括否定判断词“假”或“0”，也都是由“真 \rightarrow 假”，同时“假 \rightarrow 真”。它们二者无论是否“牵句自指否”，在句子中除“牵句”(布尔代数中是“1”)之外出现而且唯一地只出现“假”一个字(或布尔代数中的“0”。作为“否定判断词”)，因此命题本身都是直接针对句子中已经存在的判断词“真假”、“对错”、“是否”、“矛盾不矛盾”再次进行同样的真假判断的。这方面二者是本质一致的。只不过布尔代数更直接、明显而已。但在悖论性方面，布尔代数反倒是隐含的。不经笔者发掘，到现在也似乎无人领悟。只是莫绍揆先生似有所悟。提出这里的“假”不是一般意义的“假”，而是指的更强的“自相矛盾”。它所针对的二值布尔代数中的式子(包括形式系统中那个著名的哥德尔命题)、自然语言系统中“牵句自指否”的句子，甚至笔者前文指出的，最为“浓缩”的“一字悖论”“假”或“错”甚至二值布尔代数中之“0”(说此字“假”(错，0)，则“真”(对，1)；说此字“真”(对，1)，则此字为“假”(错，0)，不对，即错)，实际是更本质的应该是“关于自相矛盾的矛盾”)。

哥德尔定理产生的问题，以一个如此怪异的哥德尔命题(也是牵句自指否的“牵句不可证”、“牵句非定理”。与谎者悖论“牵句假”同构)，得到一个普遍的多的结论，又产生了如此多使人困惑的问题。就连哥德尔本人，也承认需要解决。笔者的解决方案上面都有了，就是重拾被哥德尔本人实际上早就推出，但由于当时看来理由不足而草率放弃的系统内的悖论，将其与谎者悖论、二值布尔代数一起分析(本来它们就是一回事)，并得出前述统一的结论，给出前述一致的解决方案。

这个所谓的“解悖”方案，说白了就是明快地认识并承认现有系统中会出现“牵句自指假(否)”类的悖论。但必须注意且要强调的是，这个悖论并不是一般认为的由系统推导出来的，而是人为构造的一个特殊的语句(内格尔，纽曼，哥德尔证明，P73)，因此不会对系统的协调性产生任何影响。而此点恰恰为哥德尔本人与以往论者所忽视。如，哥德尔命题“牵句不可证”，也就是“牵句非定理”，不过是人为构造的(说是“硬造”更贴切些)，与任何人利用系统语言、算符、公式，去构造一个矛盾、悖论完全一样。这不说明系统有矛盾。因为这些都是不是系统定理。不是从公理推导出来的。哥德尔命题也一样。“牵句非定理”，“牵句”就是“牵句非定理”，代入，得到“牵句非定理”非定理，也就是“牵句是定理”。而它又是由这个人设置的语句(不是根据系统公理直接推出的)“牵句非定理”为前提自己推出来的，二者等价，因此有“牵句是定理 \wedge 牵句非定理”，或“牵句既是定理也非定理”，“牵句是定理当且仅当非定理”等等，都可看成认为设定的而不是由系统公理推出的。这当然是个人为设定的矛盾(等价于悖论)，因此其真值为“假”，也就是不是系统定理。因为其不是由系统公理推出的，因此与系统协调性无关。就如可以认为构造任何矛盾的“ $A \wedge \neg A$ ”命题一样。这样的矛盾命题，影响系统协调性吗？当然不会。

综上，我们可以得到如下确定结论：

1) 由于哥德尔命题“本命题不可证(不是定理)”是人为制造的,而不是直接由系统公理推导出来的,因此与系统本身的公理系统的协调性无关。由这个特殊的人设命题推出的结论,比如一个矛盾或悖论,也不是基于系统公理系统直接推出的,因此当然与系统协调性也同样无关。因为在任何系统中(包括自然语言系统),都可以人为地制造任何真值为假的矛盾命题。但这不会影响系统的协调性。不是系统公理直接推出的矛盾,不会推出任何命题,也就是这里不会有什么“爆炸律”。

2) 就算按哥德尔的说法,在系统内得到了一个不可判定(一个命题与其逆命题都不是定理也就是都“不可证”)命题,也就是这个不可判定命题必然已经为“真”(否则怎么“判定”这个不可判定?),也就“可以判定”了,但又不能是系统内的“真”或“可判定”,而是“元数学”意义上的,也就是系统外的结论。如此,在这个元数学意义上,或系统外意义上,不是“可以判定(为“真”的)正是这个“不可判定”吗?于是,在所谓“元数学”意义上(系统外的系统),仍旧不免有悖论、矛盾“可判定 \wedge 不可判定”(可判定当且仅当不可判定)。往上推,无用,仍旧是悖论。此外,元数学外,不是还有元元数学吗?如此,可以一直“元”下去,以致无穷个“元”。这像话吗?无穷个“元”,不是等于没有真正的“元”吗?

3) 哥德尔得到的“本质不可完全性”,意味着用扩展公理、系统的方式,仍旧会得到新的系统内的不完全性。如此以致无穷,因此谓之“不可完全”。但是,怎么就没有人想到,上论看似有理,但却是有问题的。我们说,就算系统内是不完全的,扩展系统后,新系统内仍旧不完全。即如果我们有不断的扩展系统 $S, S+1, S+2, S=3, S+4, \dots$,在 S 中不完全的,在 $S+1$ 中完全了,但 $S+1$ 中又产生了新的不完全,在 $S+2$ 中又完全了,但又产生了新的不完全,.....。这在哥德尔叫“本质不可完全性”。但是,我们怎么就不能反过来思考?在 S 中不完全的,不是在 $S+1$ 中完全了?在 $S+1$ 中不完全的,不是在 $S+2$ 中完全了?.....按这个思路,不是反过来,只要有无限的系统+1,不就可以使得当前系统的不完全可以在扩展系统中被完全吗?至于新产生的不完全,在再一个扩展系统中不是还可以完全吗?如此,不是总可以完全的吗?因之,这说到底还是一个悖论:无论你怎么扩充系统,仍旧免不了系统“又完全又不完全”。具体说就是“本质不可完全性 \wedge 本质可以完全性”。

4) 笔者曾经指出,要想判断一个命题究竟是不是在系统内不可判定的,根本就是不可能的。因为任何命题,如果还不是系统定理(被证明为真),也不是“非定理”(其逆命题为定理),那么任何人是无法判断这个命题是不是在系统内是“永远”也不可判定的。因为这涉及无穷种证明路径、方法,无法一一穷举。只能说,现在还没有证明,现在不知道以后会不会被证明,无法确定是否永远这个命题与其逆命题都不能被证明为定理。(沈卫国,数学基础若干问题的创新性思考,理论数学,汉斯出版社)

最近笔者无意中了解到,实际上哥德尔应该早就得到这个结果了,不过未解其意而已。在前述内格尔、纽曼的《哥德尔证明》一书的第78页上,作者在“ G 可证,当且仅当, $\neg G$ 可证”的注释中指出,“这不是哥德尔实际上证明的;文中是借用并改写了罗瑟与1936年得到的一个较强的结果,为的使阐明更简明。哥德尔实际上所证明的是,如果 G 可证,则 $\neg G$ 可证(因而 PM 不一致);而如果 $\neg G$ 可证,则 PM 是 ω -不一致的”。而所谓 ω -不一致的,就是 $\neg(\exists x)P(x)$ 不是定理。也就是无法对无穷个 x 的每一个确定这个命题。尽管对其中可以列出的(只要列出来了)每一个如 $\neg P(0), \neg P(s0), \neg P(ss0), \dots$ 等等应该都可确定。这实际上已经就是笔者指出的结果了。显然,哥德尔是知道这一情况的。但究竟为什么哥德尔居然选择忽视这个十分明显的问题,不得而知了。也许是没有意识到问题,也许是不愿意承认系统有内部矛盾(不协调,实际上由前面笔者的分析可知,不存在这种不协调,不得已打了马虎眼。罗瑟的这个所谓的强化结果,实际是越俎代庖,替哥德尔掩盖矛盾,起到了一个改写哥德尔证明,误导读者的作用。实际上,现在绝大多数对哥德尔定理的解读,都是以这个所谓的哥德尔定理的“强化结果”为蓝

本的。因此显然，这不是真正意义的哥德尔定理，是人为改动过的、与其说是“强化”、还不如说是误导的“所谓的”哥德尔定理。或干脆就叫“罗瑟定理”。况且我估计，它还肯定有错。

总之，哥德尔本人(而不是后人的附会)得到的“ ω -不一致”，在笔者看来，等于宣告了其证明的失败。没有证明其宣称得到的结论。要想得到，必须完成无穷的操作，而这是不可能的。后人的所谓“强结果”，可以直接视为篡改。

凡此种种，我们可以极其轻松地化解以往由哥德尔语句进而“哥德尔定理”所产生的所有问题。

14. 与强化说谎者悖论等价的多变量布尔代数方程组及其解的问题讨论

文兰院士对此问题作为重点推出(文兰, 悖论的消解)。布尔代数就是逻辑代数, 其发明、发现的目的, 就是为了或用来研究逻辑问题的, 其中当然要或可以包括悖论问题, 这个毫不奇怪。但文兰院士在与强化说谎者悖论等价的“单卡悖论(单句自指)”、“双卡悖论(双句之间直接互指)”的基础上, 独立地提出“三卡悖论(三句之间非直接地、隐蔽地互指, 并且涉及其它更复杂的逻辑关系)”, 同时总结出实际上这个“卡”(也就是与布尔代数变量所对应的方程组)可以无限地扩展下去, 它们都与说谎者悖论同构。这个提法与陈波书中提到的“转圈悖论”等价(陈波, 悖论研究), 不过后者更简单些。“三卡悖论”比之“双卡悖论”(更不用说“单卡悖论”了)更其隐蔽, 是不容易一眼参透的。当然, 笔者认为, 这些悖论之所以可以被称之为悖论, 其本质还是万宗归一, 要转化成一言形式的“单句假”类型的说谎者悖论才可。比如双卡悖论等于是 $a = b, b = \neg a$ 。把第二式的 b 代入第一式, 就立刻得到 $a = \neg a$ 。“三卡悖论”(以致任意“卡”)情况也一样。最后推出一个 $a = \neg a$ 才能算数。它是这些悖论成其为悖论的必要条件。当然, 如果把第一式的 a 代入第二式, 则可以得到 $b = \neg b$ 。也是自指性质的自相矛盾。可见, 矛盾句不是特指的, 而是“如果其它卡对, 则此卡错”的意思。总之, 这类悖论如果就是一句话, 只能“单句自指否”。如果是多句, 则不需要自指, 甚至不能自指, 而是“他指”、“互指”。这只是指的这个悖论的直观表述。如果要证明其是悖论, 则又必须推出矛盾, 而这个矛盾如何体现出来? 又需要推出那个著名的“单句自指假(否)”的句子来予以证明, 也才能够证明。一句话: 与说谎者悖论属于一类的“多卡悖论”的表述是“互指”的, 不需要或没有“单句自指否”了, 但证明其是悖论还是需要推出自指否。也可以就此认为是“隐性单句自指否”、“潜在单句自指否”、“最终必须归于、推出单句自指否”。强化说谎者悖论或单卡悖论可以表示成 $A \leftrightarrow \neg A$ 。而多卡悖论则可表示成 $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \cdots \leftrightarrow \neg A$ (此悖论一般形式为笔者前些年所独立提出, 当时还并不知道早有双卡悖论。后来发现, 其与多卡悖论及文兰院士提出的一般意指方程组是等价的), 最终还是“推出”了 $A \leftrightarrow \neg A$ 。但一开始却并不是它。把简单的单句的、双句的说谎者悖论、双卡悖论扩展到了甚至无穷地多下去的句子或变元的情况, 加深了我们对这个悖论的理解。当然, 这里也必须提及, 究竟哪些矛盾在“计算”之始并不明了的多变量布尔代数方程算不算悖论, 符合不符合悖论的定义, 是值得商榷的。比如“三卡悖论”, 就明显的“不明显”。只是我们实际地推导、计算之后, 才知道这个方程组或其语言表述如文兰院士所言“无解”或“无句解”。也就是说, 这个“悖论”不是我们一眼看出的, 或简单推出的, 而是经过比较复杂的推导才“解”出来的。那么同理, 如果我们有一个 1000 个变量的 1000 个布尔方程的方程组, 最后经过复杂运算得到矛盾也就是所谓的方程组“无解”或“无句解”, 我们也称这个“无解”的 1000 变元的方程组或其对应的语言表述叫悖论吗? 它符合我们惯常的悖论定义或认识吗? 当然, 无疑地, 在矛盾的结构上, 它与简单的单句说谎者悖论是一致的。但在形态上, 又是很不同的。这里可以打个比方: 我们说“糖”有“单糖”、“双糖”、“多糖”之分。而多糖有了去了。淀粉、纤维素都是多糖。在理论上, 这些“糖”的分子结构基元都一样, 只是分子链的长度不同而已。但通常我们仅仅会将单糖的葡萄糖, 双糖的蔗糖、果糖, 麦芽糖等称为是糖, 也就

是甜的，才称之为糖。否则就是什么淀粉、纤维素了。但学术上，以分子结构划分，又都是糖。我想，类比于说谎者悖论(对应于单糖)，双卡悖论(对应于双糖)，三卡以上的“悖论”或无解的方程，就对应于多糖，是可以的。明确讲，就是从悖论的结构上，可以都叫悖论。但从习惯上，对悖论的狭义理解上，又不同。这里自然与“糖”这个概念一样，有一个对“悖论”概念的理解、定义问题了。

文兰院士认为悖论就是布尔方程组无解或无句解，但他没有进一步说明这个所谓的“无解”、“无句解”，究竟意味着什么。当然，文兰院士是明确地给了“解”、“句解”以定义的，“即取代未知数的位置后，使方程两边相等的常数、句常元”。但究竟什么是“不相等”、“无解”、“无句解”？似乎没有严格的说明，当成了想当然的、无须解释的一个概念了。但从其行文可以看出，他是以导出矛盾为方程组“无解”、“无句解”的。比如在该书 P36 页，有“三卡悖论的推理隐蔽地假设了该句方程组有句解。就是这一假设导致了矛盾”等语。可见，正如前文笔者所言，“无解”、“无句解”只是产生了“矛盾”、“悖论”的等值语，因此是同义反复，循环论证。与其说产生悖论是由于方程无解，还不如说方程无解是由于产生了矛盾(悖论)，这等于是说“产生悖论就是由于产生了悖论”。因为假设“无悖论”(无矛盾)，由反证法否定前提假设，得到“有悖论”而已。是没有实质意义同义反复。

悖论的解悖问题新解——反证法、隐含假设及其它

根据很多前辈(甚至古人)的看法(当然包括文兰院士)，悖论的解悖实际是由隐含的预设假设，致使产生悖论，由反证法，既然推出了矛盾，就否定了隐含假设，得到否定后的命题，即解悖。因此，找出这个隐蔽的预设假设，就是解悖的过程。当然，有时候它的确隐蔽很深，不像想象的那么好得到。但无论如何，思路如此。

还有一个“细微”但也许重要的问题需要讨论。在经典二值布尔代数(逻辑代数)的一般矛盾式 $x = \neg x$ 中，将“牵句”代入，得到“牵句 = \neg 牵句”，即“牵句=牵句假(或“错”)”。应该注意的是，无论在一般矛盾式 $x = \neg x$ 中，还是在“牵句 = \neg 牵句”中，都只有“假”符号“ \neg ”出现，并没有表示“真”的符号出现，除非把“真”或与其等效的“1”直接代入一般矛盾式 $x = \neg x$ 中，得到“真 = \neg 真”(真=假)或“ $1 = \neg 1$ ”或“ $1 = 0$ ”。也就是说，在“牵句 = \neg 牵句”、“牵句=牵句假”一类的表述或式子中，“真”(“1”)或具体说“牵句真”，是隐含在公式或表述中的，并没有以“显式”的方式出现。但它当然是默认此点的。而且由其可以推出一个悖论，而悖论等价一个矛盾或说可以互推(二值布尔代数的定理)的结论，这个在原始表述中“被缺失”的“真”或“牵句真”可以由这个悖论直接得到。这也可以算是从悖论推导得到的、确实的证明结果。为什么要强调这点？因为这正是这个强化说谎者悖论使人困惑的地方。人们往往只知道这是一个悖论，但究竟为何仅仅由“牵句假”三字就会产生这个悖论，不知其所以然。既然“牵句 = \neg 牵句”作为“显式”都如此，那么“牵句假”(\neg 牵句)作为“隐式”就更不必说了。我们说，由悖论的推导在“理论”上算是“证明”了此点。这当然是在(也仅在，前面说了)二值布尔代数意义上的。而在直观上，我们说“牵句假”这个句子或三个字一经写出、说出，其目的就是为了别人“正确地”(也就是“真正地”)理解其意的，否则写它为何？因此任何话语只要一经写出、说出，实际就“真的”已经存在了，或已经存在“真的”这个句子了。当然这里的“真”，与这个句子所表达的意思无关，也就是与句子所陈述的内容的真假(真值)无关。具体到这个强化说谎者悖论，只要一说出、写出“牵句假”这个三字句，这个句子当然就存在于世了，也就是“真正地、现实地存在在纸上、话语中了。比如本文这里写出“牵句假”三字，不仅就“有了”(存在了)，而且三字为真的、此句为真的，尽管它说它自己是“假的”也罢。即有“牵句假”或“自己说自己为假”这样的句子本身是真的。简称还不就是“牵句真”？如果有谁还不承认此点，那你不是“真真切切的”在这里看到这句“牵句假”

了吗？这还不真吗？这还有假吗？不真、有假，你能看见它吗？能认出、读出它吗？你怎么没有读出一个“现在正在吃饭”呢？可见，“牵句真”三字，是隐含地存在于说谎者悖论中的。即有或不得不有“牵句真 \wedge 牵句假”。而不仅是只有“牵句假”。后者只是一个简化、省略，甚至忽略。是没有意识到或“参透”在哪里还有或实际上必须有这个隐含的“牵句真”。

在二值布尔代数中，如果把“真、假”或表示真值的“1、0”直接代入一般矛盾式 $x = \neg x$ 中，意味着什么？如果是 $x = \text{马}$ ，也就是“马 = 非马”，与“ $1 = 0$ ”只是真值一致，但毕竟含义不同，不是一回事。即“马 $\neq 1$ ，非马 $\neq 0$ ”。当然，把“马”赋予真值“1”后，其真值当然是“ $1 = 0$ ”了，但仅仅是真值。对于“牵句 = \neg 牵句”的强化说谎者悖论呢？将“牵句”赋值为“真”，则得到“牵句真 = \neg 牵句真”，即“牵句真 = 牵句假”。如果我们将“真”、“假”；“1”、“0”等还原其判断词的本意，则“真”不就是“本词为真”（简称“本词真”），“假”不就是“本词假”；“1”不也是“本字符之意为真”（简称“本符真”），“0”为“本符假”。因此从这个意义上可以说，“牵句真=牵句假”与“真=假”、“ $1 = 0$ ”是等价的。进而与“牵句 = 牵句假”以及“牵句假”也等价。不过“真=假”、“ $1 = 0$ ”是“显式”，而“牵句假”是“隐式”而已。毕竟，笔者已经论述过，极端而言，即使一个“假”字、“0”符，都可以导致悖论：存在个表示“假”的“0”，真是0吗？当然真是，即0是真的，而真为“1”，则0为1，矛盾；如又说0为假，则0当然就表示假，说对了，对则必真，又矛盾。因此是悖论（与谎者悖论等价的）。如果用“本符假”（即“0”，见前述）来论证这是个强化说谎者悖论，则几乎与说谎者悖论一样的推理。此处省略。

文兰院士认为，悖论就是反证法的“掐头去尾”，解悖无非就是找出这个被隐蔽的假设，然后把原先的悖论当成反证法推出的矛盾，进而否定这个假设，得到一个可以解悖的命题。这个看法的问题前文已经仔细分析了。当然，也不能说是一无是处，自有其一定的道理在。但也必须说明，此类观点是“古已有之”的，前人早就论述过大致一样的思路。仅就笔者的孤陋之闻，悖论专家张铁声、杨熙龄都在自己的文章、著作中提到过此点。“……按照归谬法，一遇到这一点矛盾，即可推翻前提或前提之一，至于矛盾本身则无须深究。这种证法已经流行两千多年了。康托用了这种证法得到了一连串的定理，可见这种证法是很有道理的。但是对矛盾不看仔细，只把它当作反证的手段，用完就拉倒，这样，矛盾又会冒出头来“反证”理论有矛盾了。罗素悖论的出现说明集合论的基本概念都包含着矛盾。”（杨熙龄，奇异的循环——逻辑悖论探析，P22）。张铁声文章中也提到弗雷格亦有此议。而哈特则明确说：“要解决一个悖论，只有用归谬法把它变成一个证明，证明某种新奇的真理”（张铁声）。冯·莱特也提到“悖论与反证法的关联”，等等。悖论文献古往今来浩如烟海，难免挂一漏万。不知者不为怪。但一旦了解了，笔者就自然应该提出来，这是规矩，无须饶舌。

用提出一个悖论的隐含假设，然后把悖论当作反证法的证明过程，达到否定隐含假设，承认其否命题，进而解悖的方法，很经典，但也不是那么容易的。正如前面杨熙龄所言，如果对矛盾不求甚解，一知半解，那么这种所谓的解悖方案，很可能出错、不恰当（见笔者对理查德悖论与贝里悖论的分析及前文的讨论）。此外，只知其然而莫知其所以然的“解悖”方案，究竟算不算真的解悖了，还要另说着了。

比如说谎者悖论。有人说“要想不产生矛盾，就别说这种话；反之，如说这种话，则必产生矛盾”。对不对？当然对。用法律禁止？把说这种话的人全处死，更对。更极端地，如果说只要有人，就有可能还有人说这种话，那么，就此消灭人类，就不会再有人说这种话了，就此解悖。行吗？更有甚者，如果说世上只要有生物，就可能再产生新人类，就此消灭所有生物以求彻底解悖？可否？那么，生物又是如何产生的？再往下我就不说了，没意思了。笔者举这些极端的、无厘头的例子，并非只是调侃、抬杠之意，而是说过度解悖之不可取。这不是真正的、让人心服口服的、完备的解悖方案。某些条件下某具体

悖论是会消失或“被消失”，但如果这个条件是大而无当的、非必要的，则“悖虽消，但心不服”。即这类“解悖”是否让人就此踏实了，明白究竟为什么了？没有。不说这种话，当然是解悖了，无话，自然无悖。大家变成哑巴如何？能如此解悖吗？正如其它任何错话都不要说了，自然世上再无错话，错话只要说，就是错话。这算是让大家不说错话的好办法吗？大家能就此知道什么是错话，为什么错吗？还有前面笔者提到的，如果没有此话，也就没有了此悖。但此话不是已经有了吗？可见反证法(悖论)的前提、假设也是不能乱提的。否则极可能出错或不合适。因为什么？一个论证也好，悖论也好，往往需要很多隐含的假设的，否定哪个是有讲究的。正如一个人活着，是需要很多条件的。比如空气、水、食物、合适的温度、气压等等。如果其它的都很容易满足，比如空气，那么食物就是首要条件。其它可以忽略。比如有个人快死了，我们给出一个“假设”：人没有空气可以活着。最后反证法论证后否定了这个前提，得到结果“人没有空气不能活”。于是就让此人呼吸好了。这算治病吗？空气他从来不缺的。缺的是药。这个“解悖”就是不合适的。此外，有时解悖方案又可以不止一个。比如，一个人病了，可以吃药治疗，也可以理疗，还可以休息自愈等等。目的都是治病，也都是让病痊愈的充分条件。有一即可。类比悖论，它们都是解悖方案。

文兰院士说，多卡悖论与单卡的说谎者悖论都是等价的，因此解悖方案自然也一样。就是意指方程“无解”或“无句解”，都一样。但这里文兰院士显然有所疏漏。理由很简单：对于单卡悖论(强化说谎者悖论)，无句解的真实含义笔者前面所论甚详，这里不重复了。提出反证法的假设也没用(见前文)。它的解悖，是无解之解。多卡悖论，比如十卡，作为悖论，其可以归于一个单卡的说谎者悖论，此点，它们是等价的。解悖方案自然也一样。但是，要注意了：十卡悖论(对应于十元意指方程组)，九个卡及其所言，就是形成悖论的必要条件，也就是独立的假设。要形成悖论，每一个卡及其所言，都是必须的。不是吗？如此，我们就可以把其中任何一个，几个，九个作为悖论的反证法的前提假设提出来，其总是由排列组合公式是可以算出来的。由此把悖论当成反证法，否定了该卡的所言，于是悖论就不存在了。这不就是一种解悖吗？也就是，除了和单卡悖论相同的解悖方式(不解之解)，还有其它很多各自独立的解悖方案。十卡悖论也许复杂了些，我们就用双卡悖论再说明一下：除了与单卡悖论一样的一种方法解悖外，可以分别用假设第一卡为悖论必须；假设第二卡为悖论必须；假设两卡为悖论必须。其中每一种，当然都导致双卡悖论。于是，由等价的反证法，可以分别否定上述前提假设，通过改动原卡内容的方式来使悖论不再形成，也就是达到解悖的目的。这当然是可以的。因此，由此观之，多卡悖论与单卡悖论在解悖方式上有实质性的不同。笔者前面提出的与多卡悖论(也就是文兰院士提出的“意指方程组”)等价的 $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \cdots \leftrightarrow \neg A$ ，其中每一个 B 、 C 等等变元，都可以分别单独或联合形成与悖论等价的反证法的“假设”，通过否定它而达到解悖的目的。与这个悖论形式相似，但与双卡悖论更接近的是陈波提到并命名的“转圈悖论”(陈波，悖论研究，P477~478)，其结构应是 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \cdots \rightarrow \neg a \rightarrow a$ ，实际形成一个单向的闭环，所有命名为“单向转圈悖论”似更合适。它对应于双卡悖论的 $a \leftrightarrow \neg a$ 。这里可以看出并得出结论，单卡悖论(说谎者悖论)与双卡悖论的区别，其实不大。双卡悖论实际是具体展示推理关系的单卡悖论(说谎者悖论)，而单卡悖论(说谎者悖论)是先把悖论推理形式隐蔽起来，“浓缩”成一句话的形式而已。严格讲，单卡悖论要用 $a = \neg a$ 之类表示，而双卡悖论要用 $a \leftrightarrow \neg a$ 表示。但实际上，二者当然可以互推，因此一般而言，可以把二者看成一回事。

文兰院士在其“三卡悖论”基础上提出的“多卡悖论”及“意指方程组”，实际上范围要宽泛的多。这从其给出的具体“三卡悖论”的实例就可以看出(文兰，悖论的消解)。它涉及全部逻辑运算关系，与(\vee)、或(\wedge)、非(\neg)，而不仅仅是“非”(\neg)了。但既然是“意指”，显然就仍旧是与单卡悖论(说谎者悖论)的“牵句自指”，双卡悖论(可看成“明确推理型”的说谎者悖论)的两句“互指”，一样，也是“多句互

指”的。也就是意指方程中的变元范围很明确，就是“你指我，我指你”，或“你指我，我指他，他指张三，张三又指我”之类。其次，它也是二值的，只涉及“真、假”，“对、错”这样的判断词。这些悖论，实际是一类，再复杂也是说谎者悖论的等价形式。

笔者在这里提出一个更一般性的悖论形式，也就是把变元的论题扩大化，不止是让其“互指”、“牵句自指”，而是可以是任何命题。比如 $x = \neg x$ (或 $x \leftrightarrow \neg x$, x 当且仅当 $\neg x$ 之类的等价形式)，这里的 x 变元可以是任何名词。比如“马”、“张三”。为什么特别用一个代数里面通常表示更广变元的 x ，就是让其不止表示“互相指或自指”、“真、假”、“0、1”之类，还可以表示任何概念、命题、名词。比如前述“马”概念，“马不是马”、“马当且仅当不是马”、“又是马又不是马”，不也是悖论吗？前面也讨论过了，就是“我不是我”，虽然可以归于“自指型悖论”，但都不是“牵句自指型悖论”。后者需要单独处理，更本质；而前者可以和“张三不是张三”统一处理。当然，我们可以想见，仿照多卡悖论或文兰院士提出的意指方程组的形式，这个更广泛的悖论形式，当然也可以表达成类似的“广义命题逻辑方程组”。

由以上讨论可以看出，这个所谓“更一般性的悖论形式”，当然就超出了牵句自指型的说谎者悖论及其本质等价形式多卡悖论、意指方程组的范围了，但仍旧是悖论，而且更广泛。有人认为悖论最终都会归化强化说谎者悖论，可以看出，这个看法不对。悖论还要广泛的多。

此种悖论的解悖方案，倒是更符合否定反证法的隐含前提的方法。比如，理发师悖论，就是先实际假设了有这么样的理发师存在，最后推出矛盾，形成悖论，否定了理发师的存在。马非马悖论，也是无此种生物存在即可解悖。因为“非马”，可以是猪。仅仅说没有这种马不行。因为“非马”就是没有这样的马。如果结论也是“没有这样的马，则与谎者悖论一样又会进入悖论循环。前文已经讨论了，否定的范围，要比悖论本身描述的事物范围应该大才可解悖。说“张三不是张三”，也会导致悖论。解悖就是无此人。总之，此类悖论由于所涉命题宽泛而具体，因此所涉范围更小，因此解悖较易。而强化说谎者悖论，竟然纷纷扰扰逾两千年，显然更其困难。其公开的表述“牵句假”，不完全，明确地表示出它是一个矛盾句。只有在按其本意推出其“伴随命题”“牵句真”后，才使人恍然大悟：这不过就是典型的矛盾句，如何能不产生悖论？这这个解释下，才能得到真正意义的解悖。也就是，讲出悖论之所以会产生的、令人信服的道理来。单单不叫人再说这样的话了，能算令人信服的解悖吗？此外，由于这个悖论是直接针对二值系统的判断词“真假”的(真 \wedge 假)，因此在二值系统中无法消除这个矛盾也就是悖论。前文所谓“不解之解”，就是这个意思。既然有“系统中无法消除的矛盾”、“不可化解的矛盾”这样词和概念存在，那么，自然也会有与之对应的事物或具体概念表示。这并不奇怪。

以上，也可以看成是对悖论的一种分类方式。

此处，笔者希望再明确一下，悖论有“习惯理解”和“学术理解”之别(这里暂时不提悖论的定义，因为这个更复杂一些，下面再专门讨论)。所谓习惯理解，就是悖论的表现形式一般要求简单、明确。就必然前面的类比例子，它对应于“单糖”、“双糖”，最多也得是能吃的“多糖”——淀粉吧？把纤维素归于糖类，学术上当然如此，但习惯上，“糖”总是要甜的，起码也是能吃的吧？把根本不能消化的纤维素成为糖，习惯上总有些过分，甚至造作了(再说一遍，学术上当然不但可行，甚至还是必须的)。把一个在计算机中成千上万个变量的方程组运算很多天才解出来，知道此大型方程组“无解”的代数方程组“命名”为悖论，当然会给人以“不真实”的、强行派发概念的感觉。当然，在学术上，方程再复杂，本质上与最简单的什么单卡、双卡、三卡等等简单悖论是同结构的。譬如纤维素的多糖链与单、双糖的关系。就是文兰院士提出的三卡悖论，其实形式上已经够复杂了，在推导上的复杂性，已经“不太像”传统意义的悖论了。只是在经过了不太直观的推导后，才明白它还是一个“悖论结构”。当然，文兰院

士也许并不同意此议，他可能会认为这个推导没什么复杂的，很简单。这里只能说仁者见仁了。譬如不甜的淀粉算不算糖的问题了，大概很难争出一个结果的。

16. 从涉及悖论的“对角线引理”的角度看康托对角线法的悖论本质

汤姆逊根据康托对角线法，证明了一条“对角线引理”。提出用所谓“对角线引理”来解释、说明、证明悖论(陈波，悖论研究)。换言之，很多甚至全部悖论，都符合这个对角线引理，实际与其是等价的关系。于是，具体到康托对角线法证明实数可数与否的这个问题，可以归结于这样的悖论：如果假设实数可以排成可数的一列，则由于可以新产生一个实数，因此实数不能排成可数的一列；而如果实数不能排成可数的一列，则把这个新产生的实数重新加进实数表，则实数又可以排成可数的一列。因此构成悖论。简单说，就是：可数 \rightarrow 不可数；不可数 \rightarrow 可数。总之，如果对角线引理成立(对角线法会导致悖论，即矛盾)，则它证明不了实数不可数。也就是如果对角线法真的证明了实数不可数为真，则它不构成悖论、矛盾。而这个结论本身与对角线引理就是矛盾的(本身就构成悖论)。即康托对角线法与对角线引理不相容。

对角线引理(定理)是(陈波，悖论研究)：

设 S 是任一集合， R 至少在 S 上有定义的任意关系，则 S 中不存在这样的元素，它与且仅与 S 中所有那些与其自身没有 R 关系的元素具有 R 关系。

用集合论非语言表述，就是

$$\neg(\exists y)(y \in S \wedge (x)(y \not R x) \rightarrow (x \in S \rightarrow (R(y, x) \leftrightarrow \neg R(x, x))))$$

由于集合可以用相应的谓词来刻画，可以把集合论语言“ $y \in S$ ”翻译成一阶谓词语言“ $S(y)$ ”，于是，对角线引理的一阶逻辑表达式为

$$\neg(\exists y)(S(y) \wedge (x)(S(x) \rightarrow R(y, x) \leftrightarrow \neg R(x, x)))$$

事实上，这个定理已经很明确地告诉了我们，如果 S 是实数集合， R 是全部实数与小数的每一位的一个一一对应关系，那么， S 也就是实数集合中不应该再包括由对角线求异得到的那个对角线元素。否则就会产生悖论。也就是说，你既然已经假设了全部实数都可数，也就是可以排成一列，并且与小数的位数一一对应(作为假设)了，那么，凭什么又改变假设条件，允许用对角线法逐位求异的方式去得到一个不在原先假设的关系 R 中的元素？这就相当于重新又提出了一个与原假设矛盾的假设，从而构成悖论。即得到结论：想由康托对角线法证明实数不可数无效。

是否还可以有另外的解释，也就是康托对角线法证明了实数不可数的解释？如，设实数可数，也就是可以排成一列。最终由对角线法推出一个“悖论”也就是矛盾，也就是全部实数不能排成一列。于是否定原前提，实数不可数。

于是，问题归结为，1) 究竟是假设了实数可数，由对角线法推出了矛盾(悖论)，因此否定原假设，证明了实数不可数。还是 2) 既然假设了实数可数，就不应该再使用由对角线引理表达的、最终可以导致悖论产生的那个“对角线逐位求异操作”，得到按原假设本不再应该有的元素，也就是对角线引理中会产生悖论的、即悖论产生根源的“ S 中不存在这样的元素，它与且仅与 S 中所有那些与其自身没有 R 关系的元素具有 R 关系”。

也就是，1 的理由，是康托对角线法无问题，问题出在假设实数可数；2 的理由，当然是按对角线引理，康托对角线法是有问题的，其本身就是会产生悖论的，就是与悖论息息相关的，因此产生悖论的原因在它，而不在假设。除非我们这样看，假设康托对角线法无错，对角线引理有错，推出矛盾，否定康

托对角线法无错的前提假设，得到康托对角线法有错的结论。也就是，康托对角线法本身，成了证明其不行的依据。这当然是符合对角线引理精神的。由此也可以得出一个结论：反证法的使用，的确要十分小心。不是任意做了一个假设，得到了一个表面的否定结论，就完事大吉了。在证明过程中是否使用了隐含的假设，方法本身是否没有矛盾(此点本身就是一个隐含假设)，都是必须要考虑的。

仔细分析，第一，就算这二者都有道理，1 也没有证明实数不可数。原因就是证明必须否定、排除 2 的可能，而这是不可能的。于是，并不能确定 1 就证明了实数不可数。理由，由于存在 2，使得 1 有了不确定性。既然不确定，也就是其证明结果是不确定的。也就是没有确定地证明实数不可数，也就是没有证明实数不可数。

第二，1 的论据，当然是康托对角线法本身是准确无误的，也就是它自身不会产生悖论。如此才可以用它去证明其它的论题。也就是由它导出的悖论、矛盾，不是它本身的原因，而是其它论题引进的悖论、矛盾。但是，由对角线引理(如果其正确的话)可知，由前述对角线逐位求异操作直接就会导致悖论。这正是对角线引理所要告诉我们的。于是，1 根本就不对，它是用一个会产生悖论的原理即对角线法来证明实数不可数，因此它所得到的或产生的，只能是一个悖论。除非对角线引理是错的。

对角线引理与康托对角线法证明实数不可数，二者绝对不相容。

于此特别值得一提的是，在《陶哲轩实分析》中，竟然绝口不提康托对角线法一句，连书后名词索引中竟然都没有对角线法四字。这绝对不正常。对一个几乎所有有关教材都有的，而且被几乎所有人大加赞誉的方法，如此地漠视，我想，不会是无心之失。就是有意回避。但第一，他所采用的康托定理，不也是拐弯抹角地利用了康托对角线法吗？第二，不用简单直观的康托对角线法，而用繁复而不易理解的康托定理，舍简而就烦，作为一本教材，合适吗？笔者猜想，他是知道康托对角线法所可能引起的争议和问题的。比如这里会引起悖论的(与悖论等价)的对角线引理。因此他吃不透，干脆为了慎重，不提了。而作为一本教材，又不宜展开讨论，如此而已。当然只是猜想。反正无论怎么解释，都极不正常。如果他认为康托对角线法无问题，绝无理由不用之于一本入门级的教材。

17. 从强化说谎者悖论的另一种解悖方式看悖论问题解悖方案对词义解释的依赖性

对于强化说谎者悖论“本句假”，我们还可以有另一种全新的认识。而基于这种认识，说谎者悖论的解悖，是可以将该悖论归于一个非矛盾句。也就是在这种解释下，该悖论终归只是一个“佯谬”，不是真正意义的悖论。当然，这个解释不是唯一的，它是依赖于对“本句假”的词义的解释方式的。

我们知道，任何句子、词，都是基于某种符号的“编码”、“定义”的。比如“本句假”三字，如果不去定义这三个“符号”，不去“编码”(当然是广义的)，就会根本不知其意。它就是三个无意义的符号。因此问题来了，“本句假”中的“本句”，究竟是指仅仅是这三个无词义符号，还是被定义、赋值、“编码”以后的、实际可看作是对符号翻译后有了词义表达进而“句义”的“本句子的意思不是假的(或是错的)”？实际上这两种理解都是允许的。因为仅凭“本句假”三字，是无法区分的。当然，一般而言，既然语言系统就是为了传递信息的，也就是就是为了交流有实质内容的信息的，而绝对不是仅仅为了传递这些本身并无含义的、可以作为但本身并不是信息载体的声音、符号的。因此，通常我们显然是默认“本句假”就是按其词义、句意理解的，否定的也是这个句意。我们的语言系统创立的目的，显然不是为了仅仅传递毫无意义的声音或符号(当然可以作为信息载体)的。但是，我们在学术意义上，是不能排除“本句”指的就是这些无意义的符号的。因为显然，任何句子，任何词、字，都首先是符号(特别强调，是无意义的符号)。把“本”、“句”、“假”三字看成符号，或许理解起来稍微费点劲。因为它们的词义已经很明显了，已经跟我们的经验融为一体了。我们早已不是不识字的小孩子了。我们可以以二进制

编码来代换这三个符号。这样，那些“0101010”之类的字符串，不经解释翻译，是没有意义的，除了让你知道这是一些无意义的字符串外。于是，事情就很明白了：如果“牵句”指的就是这些尚无意义的、还未经翻译的字符串(包括“本”、“句”、“假”三个尚无意义的字符)，那么，说“牵句假”就不会形成悖论。因为它就是一句错话、假话。因为它相当于该字符串是假的、错的。这当然不是事实。因为它已经“真的”存在了，它是真的、实实在在的字符串，而不是假的字符串。因此说它是假的，本身只能是错的、假的，也就是说的错话。明确说，就是这里的“牵句假”，指的是表示牵句的那些无意义的字符串是假的，而不是指的经过翻译后的、这些字符串的“解释”后的有含义的(有词义、句意的)句子“牵句假”。因此，这些字符串当然是真的，那么指它为假就是错(假)的，于是经过解释后的、有句意的“牵句假”就是“假”(错)的(他说无意义的字符串假是错的、假的)。但这构不成悖论，因为在这里“牵句假”并不是指的经过解释、“解码”、翻译后具有词义、句意的那个大家可以理解其意的“牵句假”，说这个经过翻译后有意义的“牵句假”假(错)，并不就是其“真”的说对了。因为它此时指的不是它自己(翻译后有句意的句子)，而是无意义的字符串。即更明白地说，就是“牵句假”此时指的是“本”、“句”、“假”三个真的字或干脆三个尚无意义的“符号”是假的。这当然是错(假)的，因为这三个字(符号)是真的，因此“牵句假”自己就是假(错)的，但它没有说自己假(错)，就是没有说“牵句假”假，而是说“本”、“句”、“假”三个符号假。它没说自己假，所以说它假，构不成“真”，形不成“假→真”。如此，原本的“悖论”变成“佯谬”，不再成其为悖论了。

这个解悖过程如果用逻辑公式表示，就是“有词义的牵句 \Rightarrow 无词义的字符串的牵句。显然不是矛盾进而悖论。其成立的缘由，是对“牵句”一词的歧义性导致的不同解释所致，因此也是可行的。如果说这是唯一的解悖方案，则不对。因为“牵句”歧义性的本质，并不能由于这个解释就消失了。

当然，强化说谎者悖论的“经典”形式“我正在说的是谎话”，倒是并不适用这个解悖方式。因为“说话”是有特定明确含义的，其词义含义范围很窄，它一般不会牵强附会地去指那些无意义的字符串。这是默认的。可见，对词义的稍微改变，就会实质地影响相应词义，进而影响悖论的性质和解悖方案。这里面是有些微妙的。一般情况下强化说谎者悖论的各种形式、变种，大都意思差不多，但仔细区分，还是有差别的。这源于各种不同词义的微妙差别，需要仔细辨别，不可一概而论。

18. 从“存在”、“不存在”到“牵句不存在”

“存在”、“不存在”或“有”、“没有”(“无”)，或“真存在”(存在为真)及“假存在”(存在为假)，这类概念，尽管也有二值性，但与“真”、“假”，“对”、“错”不同，尽管它们都又是描述词，又是判断词。对于某具体事物，可以说其存在或不存在。但对对应客观事物、现实已经存在的事物(广义地，包括概念、想法之类人脑思维、印象、想象等单纯信息类事物)，则就再没有什么不存在了，也就是不存在“不存在”。对于包括客观、主观世界的所有事物、概念、信息、形象、思维等的绝对存在性而言，只要一旦提到、写出、说过、想到，等等，它就是存在的，也就是已经存在了。否定不了了。极而言之，对比于“牵句假”的“牵句不存在”(更严格地，“牵句绝对不存在”)，能像前面对强化说谎者悖论那样去处理吗？显然不能。因为“牵句绝对不存在”已经确实地“存在”了，否则我们怎么能看见它？因此是错的、假的。如果仿效强化说谎者悖论“牵句假”的处理，把“牵句绝对不存在”代入“牵句”，我们得到““牵句绝对不存在”不存在”，当然也假(错)。不会因为““牵句绝对不存在”为假”就为真了。于是，得到““牵句绝对不存在”已经存在”，而“牵句”指的就是“牵句绝对不存在”，后者存在，前者当然也就存在，于是得到“牵句绝对地已经存在”。而把“牵句假”代入“牵句”，为““牵句假”假”，否定的只是“牵句假”，得到“牵句真”，而没有否定““牵句假”假”，也就是这个复合句为

“假”。否则就会得到““牵句真”假”，还是“牵句假”。这里面的微妙差别，需要读者仔细体会。总之，“牵句绝对不存在”不会导致悖论。说它“绝对不存在”，推出它“已经存在”；而从它“绝对存在”这个前提，只能是它自己说“牵句绝对不存在”在前述“绝对”的意义上是错的、假的，也就是它实际上、客观上、现实中在绝对意义上“已经存在”了，因此在绝对意义上没有悖论。而如果硬要说假设其存在，它自己却说的是“牵句绝对不存在”，也就是这个“牵句绝对不存在”已经存在，因此就是“牵句绝对不存在”，矛盾。这个矛盾、“悖论”，是“字面”意义上的悖论，不是“绝对”意义上的。也就是一个“表观”的悖论。也就是，不管“牵句绝对存在”这句话已经客观存在的事实，只是“说它存在”（字面意义），它就“说它自己不存在”（仅字面意义）。这里的存在与不存在，都只是“字面”意义的。即，字面上看，它们是矛盾的。但在前述“绝对”意义上看，没有矛盾，只有存在：无论字面上的存在与不存在，都存在。

因此，在前述绝对意义上，“牵句绝对不存在”是假的。因此，虽然“牵句绝对不存在∧牵句绝对存在”虽然当然为假，但它不是推导出来的，是人为“凑”出来的，不能作为悖论看待，或不能由它得到悖论。而如果仅从“字面”意义上，这是一个字面意义的、形式上的矛盾、悖论。或说是一个表面上的、假悖论。这个悖论是仅仅针对“存在”、“不存在”在“字面意义上是矛盾的”这一点的，而不是无论“存在”、“不存在”在绝对意义上都是已经存在了的意义上的。

由以上的讨论可以看出，有人试图以禁止“自指否”甚至“自指”类语句与命题来消除悖论，不仅是限制的范围太大的问题，而是根本就做不到的问题。“牵句绝对不存在”，就是一个“牵句自指否”类的命题。它严格讲并不是“牵句自指假”，而是“牵句自指绝对不存在”（“牵句自指绝对存在为假”，或“牵句自指绝对为假存在”，或“牵句自指为绝对假存在”）意义的“牵句自指否”。它或它们就是实实在在的假命题，不会构成悖论。这反映出世间事物，无论是客观现实中的事物，还是概念性的、想象中的、现实中并不存在的、过去的、将来可能的，等等，只要被提到，被描述，被想象，甚至被梦到，它就是某种意义上的、或绝对意义上的“存在”了，这其中当然包括那个说自己不存在的句子、命题。即“牵句自指绝对不存在”，如真的绝对不存在，读者也看不到吧？看到了、我写了，就是存在。又比如“鬼”、“神”、“龙”这些概念，客观世界中是不存在的、没有的，但在人的想象、描述、脑海、图画等中，它们都是有的，这就是在概念意义上，它们已经作为人脑的创造物，是客观存在的了。又比如数学中那些公理、定理、推导，点、线、面等“抽象”的原始概念，在绝对意义上，以及自然界中原本也是不存在的，谁能拿出一个无体积的抽象点给我们看看？但这些概念被从自然界事物中抽象出来的物质存在要素、性质、规律，只要被人脑给提炼、抽象出来了，这个意义上，它也可以被看成是客观存在的事实了。明白说，就是其存在于概念中。但“概念”本身是人脑“主观”的产物。但人脑又是“客观”事物。它是“物质”的，不是抽象的。于是说概念“抽象”，非物质，是指相对人脑之外的其它事物、物质而言的。如果相对于作为物质的人脑本身，概念即为其所产生，那么，概念再“抽象”，再“非物质”，它本质上也只能是物质的，起码也是“物质形态”的。笔者早在1998年出版的《论自然科学的若干基本问题》中已有详尽讨论。

总之，任何事物、概念，只要已经提出、写出、说出、想到、梦到，等等，就已经是绝对意义的客观存在，自我否定其存在也无用，它已经存在了，包括那个自我否定存在的句子本身。总之，“牵句自指绝对地不存在”（或“绝对地没有”，“绝对地无”，“假存在”，“存在为假”，“不真实”等同义词），就是一个绝对的、彻底的假命题；而“牵句假”、“牵句错”之类的牵句自指否类命题，其本身是可能为假，也可能为真的。这就是区别。也就是说，任何命题，在任何形式下，只要“有”了，自然就存在了，否定不了这个绝对意义的存在了。说自己不存在也没用。这个问题，以往怕是未

见有人讨论过吧？

限制“自指”、“自指否”，已经是限制过度了。现在连“牵句自指否”也是了。只是“牵句自指假”（牵句假），是会导致悖论的。这就是这个讨论的意义。

既然在这里提到了概念甚至数学概念的存在性问题，于此相关地，笔者借此机会简评一下文兰院士对代数与悖论的关系问题的有关论述。文兰院士不太同意有人说的他不过是用代数方法研究悖论的说法（笔者想，毕竟，布尔代数之创立初衷，不就是为了研究语言问题的吗？）。他认为他是在“研究语言学中的代数学现象”，因为“语言学中可以有本质上是代数学的现象”（文兰，悖论的消解）。这种说法，也不能说错，但总听着总有些“别扭”。日常语言与代数之间，肯定是有想通之处的。数学那套规则、符号、数字等等，不是通常被称为“数学语言”吗？而“语言数学”呢？似乎很少听到。但“少听到”并不等于没有，布尔代数也许就是。起码是一部分。总之，有相通之处，这是肯定的。但究竟哪个更根本？我认为还是自然语言更基础一些。数学、代数，不过是从自然语言中抽象出来的、浓缩出来的、提炼出来的。这不是说说就算了的一个观点而已，是有我的依据的：任何数学、代数符号、规则、公理、概念等等，都要由自然语言来定义。换言之，如果我们绝对不允许在数学公式、表述中使用我们现在惯常使用的这些符号类的、专门的那套“数学语言”，数学、代数仍旧可以得到描述。只不过直接把符号换成自然语言的定义就完了。否则要这些定义干什么呢？当然，如此会使表述啰嗦一些（也许啰嗦很多），一本书要写的更厚一些罢了。反之，同样的语言概念，是不是由那些数学、逻辑符号定义的？当然不是。这就足以说明究竟哪个是更基本的了。陶哲轩说：“逻辑学家常常使用特殊的符号来代表逻辑关系。……但对于一般目的的数学，这些符号不常使用，英语（汉语也一样）词汇常是更可读的。并且不占太多的位置。还有，使用这些符号会把表达式与命题之间的界限搞模糊。……所以一般来说，我并不推荐使用这些符号……”。在谈到反证法时，他说：“……但有时肯定的命题与否定的命题之间的界限是模糊的……，所以这并不是一个坚实牢固的法则。”（陶哲轩实分析，P435）不得不说，大家就是大家，实话实说，不像一些人那样说什么搞数学必须要有专门的语言云云。

总之，笔者认为，就算是用数学、代数来研究语言问题、悖论问题，也是需要二者之间有确实的相通的甚至共同的东西。但哪个更本质、基本，恐怕还是要说自然语言更基本，数学、代数甚至逻辑，都是从自然语言中提炼、抽象出来的概念。这些东西在语言中原本就有，数学、代数、逻辑把它们提炼、抽象、总结了出来，自成系统。但不应反过来说自然语言中有代数，而应该更准确地说法数中那些基本原则、规律，本身就是从客观的、自然语言及其描述的客观实际固有规律中所提炼出的。换言之，只有“提炼出来”，才是数学、代数。那么，既然如此，说自然语言中有代数，岂不是说“自然语言中有从其中固有的东西中提炼出来的、自成系统的东西”？那还提炼它做什么呢？既然自然语言中有代数，那就直接用自然语言好了，还专门用代数做什么呢？

19. 认知悖论、知道者悖论分析

1) 合理行为悖论(置信悖论，纽科曼 - 盖夫曼悖论。张建军，黄展骥，矛盾与悖论新论，P226)：甲向乙提出，乙可以选择盒子 A(它是空的)或盒子 B(它有 1000 元)，但不能两者都选。甲保证：如果乙就此作出了一个不合理的选择，他将给予 10,000 元奖励。那么乙应如何选择呢？最终结果(省略)，从而有：乙取 A 是合理的，当且仅当乙取 A 是不合理的。

据说这是一个“当年的”新型悖论，其提出与人工智能、知识处理等很有关系(矛盾与悖论新论，P228)。国外学者的解悖方案，仅就笔者所了解到的，似乎过于繁复而不得要领(见前书，省略)。事实上，在笔者看来，其悖论的结果早就“隐含”在了其表述中。一个明确的表述是：如果乙的选择不合理，则

甲给钱多。但另一个没有说出的(隐含的)表述是:什么叫“不合理”?乙得钱少为不合理。因此必有乙得钱少,当且仅当乙得钱多。当然矛盾。这个悖论提醒人们,很多表述,之所以最终导致矛盾、悖论,是因为在表述阶段就无意中引进了隐含的假设或表述,而这个隐含的假设或表述,与公开的表述是矛盾的。强化说谎者悖论也是这个情况。

2) 比较典型的知道者悖论是“绞刑难题”与“意外考试难题”(表述与推导太长,这里从略,见前书 P181)。这个悖论的解悖难点,是把表述中的矛盾,隐藏、掩盖在了冗长的推理过程和表述中。笔者所见到的国外学者的解悖方案,似乎也是未得其门而入(见前书)。实际上,我们如果精炼“绞刑难题”,把法官的决定浓缩成“今日将处死你,但你知道了就不死”。也就是,知道要死则不死,而不知要死(知道不死)则死。这实际上隐含着“知道死,当且仅当知道不死”,最终导致“不死,当且仅当死”。当然是个矛盾。这个作为推理结果的悖论,实际已经隐含在了法官的表述中了。因为从他简略的表述可以推出这个隐含表述。此类悖论,的确某种意义上就是一种“类说谎者悖论”。“意外考试难题”类似,讨论省略。

参考文献

- [1] 文兰, 悖论的消解. 科学出版社, 2019年4月第二版
- [2] 陈波, 悖论研究. 北京大学出版社, 2017年4月第二版
- [3] 张建军, 黄展骥. 矛盾与悖论新论. 河北教育出版社, 1998年4月第一版
- [4] 沈卫国. 论自然科学的若干基本问题. 海风出版社, 1998年9月第一版
- [5] 沈卫国. 论熵、不可逆过程及数学中的无穷. 海风出版社, 2009年8月第一版
- [6] 陶哲轩. 陶哲轩实分析. 人民邮电出版社, 2008年11月第一版
- [7] 内格尔, 纽曼. 哥德尔证明. 中国人民大学出版社, 2008年3月第一版
- [8] 杨熙龄. 奇异的循环——逻辑悖论探析. 辽宁人民出版社, 1986年12月第一版