在三角形外的一种特殊点及向量关系

郭德强

广州一智通供应链管理有限公司，广州，中国
Email: lihpb@qq.com

收稿日期：2020年10月28日；发布日期：2020年10月30日

摘　要

本文通过塞瓦定理找出在三角形外的对顶角区域存在另一类有别于切心(热尔岗点)和界心(奈格尔点)的特殊点，并给出该特殊点的坐标公式。

关键词

三角形，特殊点，塞瓦定理

A Kind of Special Point and Vector Relation Outside the Triangle

Deqiang Guo

Guangzhou 1ziton Supply Chain Management Co., Ltd, Guangzhou, China
Email: lihpb@qq.com

Received: Oct. 28th, 2020, published:Oct. 30th, 2020

Abstract

This paper find out that there is another kind of special point which is different from Gergonne point and Nagel point in the vertical anglearea outside the triangle through the Ceva'sTheorem, and gives the coordinate formula of the special point.

Keywords

Triangle, Special Point, Ceva's Theorem.

1. 引言

对于任意的三角形 ABC，本文约定 $BC=a$， $AC=b$， $AB=c$， $p=\dfrac{a+b+c}{2}$。

如图 1 所示。三角形 ABC 的内切圆切 BC 于 D，与 AB、AC 相切的两个旁切圆在 CA、BA 的延长线上的切点分别为 E、F。则 AD、BE、CF 三条直线在三角形 ABC 外交于一点。

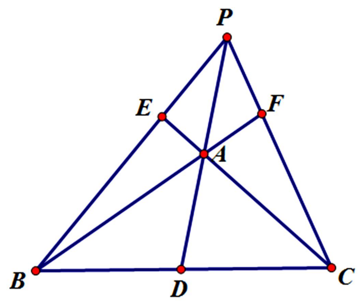

Figure 1. Triangle ABC
图 1. 三角形 ABC

证明：

因为[1]

$$AE=p-b，\quad AF=p-c，\quad CE=BF=p，\quad BD=p-b，\quad CD=p-c。$$

根据塞瓦定理[2]，可得

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{p-c}{p}\cdot\frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{p}{p-b}=1。$$

故 AD、BE、CF 三条直线在三角形 ABC 外交于一点。

设该交点为 P，将 P 称作三角形 ABC 顶点 A 所对的极心。显然，对于任意的三角形均有三个极心，这三个极心均位于三角形外，且分别在三个内角的对顶角区域。

2. 极心的坐标公式及向量恒等式

2.1. 极心的坐标公式

三角形 ABC 顶点 A 所对的极心为 P，O 为坐标原点，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OP}&=\frac{(a+b+c)\boldsymbol{OA}-(a+b-c)\boldsymbol{OB}-(a+c-b)\boldsymbol{OC}}{b+c-a}\\&=\frac{p\cdot\boldsymbol{OA}-(p-c)\boldsymbol{OB}-(p-b)\boldsymbol{OC}}{p-a}\end{aligned}。$$

证明：

由定比分点公式，有

$$\boldsymbol{OD}=\frac{(p-c)\boldsymbol{OB}+(p-b)\boldsymbol{OC}}{a}，$$

$$\boldsymbol{OA}=\frac{(p-b)\boldsymbol{OC}+b\cdot\boldsymbol{OE}}{p}\Rightarrow\boldsymbol{OE}=\frac{p\cdot\boldsymbol{OA}-(p-b)\boldsymbol{OC}}{b}，$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51030. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 October 2020, publ: 30 October 2020

$$\boldsymbol{OA}=\frac{(p-c)\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OF}}{p}\Rightarrow\boldsymbol{OF}=\frac{p\cdot\boldsymbol{OA}-(p-c)\boldsymbol{OB}}{c}。$$

设 $\frac{AP}{PD}=\lambda_a$，$\frac{BP}{PE}=\lambda_b$，$\frac{CP}{PF}=\lambda_c$，则

$$\boldsymbol{OA}=(1-\lambda_a)\boldsymbol{OP}+\lambda_a\cdot\boldsymbol{OD}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{\boldsymbol{OA}-\lambda_a\cdot\boldsymbol{OD}}{1-\lambda_a}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{a\cdot\boldsymbol{OA}-\lambda_a(p-c)\boldsymbol{OB}-\lambda_a(p-b)\boldsymbol{OC}}{a(1-\lambda_a)},$$

$$\boldsymbol{OE}=\frac{(\lambda_b-1)\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{OB}}{\lambda_b}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{\lambda_b\cdot\boldsymbol{OE}-\boldsymbol{OB}}{\lambda_b-1}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{\lambda_b p\cdot\boldsymbol{OA}-\lambda_b(p-b)\boldsymbol{OC}-b\cdot\boldsymbol{OB}}{b(\lambda_b-1)},$$

$$\boldsymbol{OF}=\frac{(\lambda_c-1)\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{OC}}{\lambda_c}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{\lambda_c\cdot\boldsymbol{OF}-\boldsymbol{OC}}{\lambda_c-1}\Rightarrow\boldsymbol{OP}=\frac{\lambda_c p\cdot\boldsymbol{OA}-\lambda_c(p-c)\boldsymbol{OB}-c\cdot\boldsymbol{OC}}{c(\lambda_c-1)}。$$

对上面三式的 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{1-\lambda_a}=\frac{\lambda_b p}{b(\lambda_b-1)}=\frac{\lambda_c p}{c(\lambda_c-1)},\quad ①$$

$$\frac{1}{\lambda_b-1}=\frac{\lambda_c(p-c)}{c(\lambda_c-1)}=\frac{\lambda_a(p-c)}{a(1-\lambda_a)},\quad ②$$

$$\frac{1}{\lambda_c-1}=\frac{\lambda_a(p-b)}{a(1-\lambda_a)}=\frac{\lambda_b(p-b)}{b(\lambda_b-1)}。\quad ③$$

把上面三式相乘并整理可得

$$\lambda_a\lambda_b\lambda_c=\frac{abc}{p(p-b)(p-c)};$$

再分别把①②③中的任意两式相乘并整理可得

$$\lambda_a\lambda_b=\frac{ab}{p(p-c)},\quad\lambda_a\lambda_c=\frac{ac}{p(p-b)},\quad\lambda_b\lambda_c=\frac{bc}{(p-b)(p-c)}。$$

解得

$$\lambda_a=\frac{a}{p},\quad\lambda_b=\frac{b}{p-c},\quad\lambda_c=\frac{c}{p-b}。$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OP}&=\frac{(a+b+c)\boldsymbol{OA}-(a+b-c)\boldsymbol{OB}-(a+c-b)\boldsymbol{OC}}{b+c-a}\\&=\frac{p\cdot\boldsymbol{OA}-(p-c)\boldsymbol{OB}-(p-b)\boldsymbol{OC}}{p-a}\end{aligned}。$$

2.2. 推论(三角形极心的向量恒等式)

令三角形 ABC 的顶点 A 所对的极心 P 与坐标原点 O 重合，则有

$$p\cdot\boldsymbol{PA}-(p-c)\boldsymbol{PB}-(p-b)\boldsymbol{PC}=0。$$

即

$$(a+b+c)\boldsymbol{PA}-(a+b-c)\boldsymbol{PB}-(a+c-b)\boldsymbol{PC}=0。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51030. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 October 2020, publ: 30 October 2020

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 邓胜. 三角形特殊点的一般坐标公式[J]. 数学通讯, 1998, 8: 24-26.

[2] 耿宏. 塞瓦定理和梅涅劳斯定理的一种向量证法[J]. 数学教学研究, 2017, 36(7): 51-52.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51030. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 October 2020, publ: 30 October 2020