论一般形式的引力定律

王忆锋

昆明物理研究所，昆明，中国
Email: wangyifeng63@qq.com

收稿日期：2020年11月18日；发布日期：2020年11月20日

摘　要

介绍了量纲关系“能量 ≡ 质量 × (速度) × (速度)”的推导过程。从基本量纲关系推导了牛顿第二运动定律。基于力的概念和立体角的概念，推导了一般形式的引力定律，即一个质量体在空间某一点处的引力值与该质量体的质量平方成正比、与质量体和该点之间的距离平方成反比，其特例是牛顿万有引力定律。讨论了引力的动态变化。讨论了引力守恒和引力的无限可稀释性。分析了引力与时间的关系。介绍了基本引力禀性常数(Γ)的概念，其基本含义是1kg质量所对应的引力有多少N(牛顿)。基本引力禀性常数Γ与引力常数和普朗克常数的乘积成正比、与光速成反比，其量纲为N/kg，量值估计为$\Gamma = \zeta \times 1.4798 \times 10^{-52}$ (N/kg)，其中ζ是一个待定常系数。

关键词

牛顿第二运动定律，引力定律，万有引力定律，引力变化，基本引力禀性常数

On the Law of Gravitation in General Form

YiFeng Wang

Kunming Institute of Physics, Kunming, China
Email: wangyifeng63@qq.com

Received: Nov. 18th, 2020, published:Nov. 20th, 2020

Abstract

The derivation process of the dimensional relationship “energy ≡ mass × (speed) × (speed)” is presented. Newton’s second law of motion is derived from the basic dimensional relationships. Based on the concepts of force and solid angle, the law of gravitation in general form is derived, that is, the gravity value of a mass body at a certain point in space is directly proportional to the square of the mass, and inversely proportional to the square of the distance between the mass body and the point; and its special case is Newton’s law of universal gravitation. The dynamic change of gravity is discussed. The conservation of gravity and the infinite dilubility of gravity are

discussed. The relationship between gravity and time is analyzed. The concept of fundamental gravitational intrinsic constant (Γ) is proposed. Its basic meaning is how much N (Newton) the gravity corresponding to 1kg mass is. The fundamental gravitational intrinsic constant Γ is directly proportional to the product of gravitational constant G and Planck's constant, and inversely proportional to the light speed; its dimension is N/kg and its value is estimated to be $\Gamma = \zeta \times 1.4798 \times 10^{-52}$ (N/kg), in which ζ is a constant coefficient to be determined.

Keywords

Newton's Second Law of Motion, Law of Gravitation, Law of Universal Gravitation, Gravitational Change, Fundamental Gravitational Intrinsic Constant

1. 引言

引力是力的形式之一。只要有质量就有引力向外辐射，这是质量体的引力性[1] [2] [3] [4]。只要有两个或者两个以上的质量体，它们彼此就会感受到对方辐射出来的引力。本文从基本量纲关系出发，推导了牛顿第二运动定律，该定律给出了力的量纲。以此为基础导出了一般形式的引力规律。

2. 量纲关系“能量 ≡ 质量 ×(速度)^2”的推导过程

物理量的基本属性称为量纲，它们是物理量的度量单位。量纲分析是通过分析问题所涉及物理量的属性来建立因果关系的方法[5]。通过量纲分析可以判断事物间数量关系所遵循的一般规律，甚至有可能提供理解或者寻找某些物理现象内在规律的线索。

在物理学的国际单位制中，将量纲分为基本单位、导出单位和辅助单位。其中基本单位包括质量(千克，kg)、长度(米，m)、时间(秒，s)、电流(安培，A)、热力学温度(开尔文，K)、物质的量(摩尔，mol)和发光强度(坎德拉，cd)等七个物理量。基本单位彼此独立。导出单位和辅助单位均由基本单位组合而成。

相同的物理量纲可以构成等价关系，例如

$$\text{质量} \equiv \text{质量}，\quad \text{长度} \equiv \text{长度} \tag{1}$$

这里用“≡”表示量纲意义上的等价关系。量纲相同不一定量值相等。本文用符号“=”表示量值或者数值意义上的等量关系。

数学化是现代科学的特点之一。物理的数学化首先是量纲的符号化。例如，将质量记为 M，将长度记为 L，将时间记为 t，等等。

量纲不相同的物理量之间不能加减，只能相乘或者相除。例如，长度除以时间定义了速度(u)

$$\text{速度} \equiv \frac{\text{长度}}{\text{时间}} \Rightarrow u \equiv \frac{L}{t} \tag{2}$$

代入长度量纲(m)和时间量纲(s)，可知速度 u 的量纲为 m/s。速度 u 是一个导出单位。

速度除以时间定义了加速度(a)

$$\text{加速度} \equiv \frac{\text{速度}}{\text{时间}} = \frac{1}{\text{时间}} \cdot \frac{\text{长度}}{\text{时间}} = \frac{\text{长度}}{(\text{时间})^2} \Rightarrow a \equiv \frac{u}{t} \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{L}{t^2} \tag{3}$$

加速度 a 的量纲为 m/s^2。

在(3)两端乘以时间，有

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

$$\text{加速度}\times\text{时间}\equiv\text{速度} \tag{4}$$

量纲相同的物理量可以执行加减乘除等代数运算，于是有

$$\text{瞬时速度}=\text{初始速度}\pm\text{加速度}\times\text{时间} \tag{5}$$

不相同的量纲不能构成等价或者等量关系，因此有“≠”关系。例如

$$\text{质量}\neq\text{速度} \tag{6}$$

假设定义一个新量纲Δ，同样有

$$\Delta\neq\text{速度} \tag{7}$$

将不等式(6)和不等式(7)两边相乘可得

$$\text{质量}\times\Delta\neq(\text{速度})\times(\text{速度})=(\text{速度})^2 \tag{8}$$

现在考虑这样一个问题：质量、新量纲Δ和速度三个物理量，与加减乘除等代数运算法则任意组合，能否“拼凑”出一个等式关系？具体地说，该等式以不等式(8)的构形为基础，左边由质量和新量纲Δ两项组合而成，右边仍然是(速度)^2。

下面分析这一问题。因为加法、减法不能直接用于不同物理量的运算，所以加法、减法被排除；根据乘法交换律，两个量 A 和 B 之间乘法关系只有一种，$A\times B=B\times A$；另外在不等式(8)中已经用了乘法，所以只剩下除法可供选用。A 和 B 之间的除法关系有两种，可以是 A/B，也可以是 B/A；故基于除法组合的等式关系有

$$\frac{\Delta}{\text{质量}}\equiv(\text{速度})^2 \tag{9}$$

或者

$$\frac{\text{质量}}{\Delta}\equiv(\text{速度})^2 \tag{10}$$

除此之外，再也没有其他可能的组合选项。

式(9)两端乘以质量，可得

$$\Delta\equiv\text{质量}\times(\text{速度})^2 \tag{11}$$

从因果关系的角度来看式(11)，就是新量纲Δ为结果，引起Δ变化的原因可以是质量、也可以是速度；从函数的角度来看，就是新量纲Δ是质量和速度的函数，新量纲Δ与质量成正比、与速度的平方成正比。

类似地，式(10)两端乘以Δ，可得

$$\text{质量}\equiv\Delta\times(\text{速度})^2 \tag{12}$$

从因果关系的角度来看式(12)，就是质量为结果，引起质量变化的原因可以是速度、也可以是新量纲Δ。从函数的角度来看，就是质量是新量纲Δ和速度的函数，质量与新量纲Δ成正比、与速度的平方成正比。

式(11)和(12)构成一个“二选一”的问题，下面看一下如何选择。首先，新量纲Δ不是七个基本单位之一，这意味着它是导出单位或者辅助单位，而导出单位或辅助单位均由基本单位组合而成，因此式(11)是合理的；式(12)的左边为基本单位，右边为导出单位或辅助单位，两者不可能等价，因此式(12)是不合理的，于是只能选式(11)。实际上，式(11)和式(12)反映了两种截然不同的物理观，如果认同一个基本单

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

位不是另外一个或者几个基本单位的函数，则选式(11)；反之，如果认同一个基本单位是另外一个或者几个基本单位的函数，则选式(12)。

事实上，看一看国际单位制中能量量纲焦耳(J)的定义

$$1\,\mathrm{J}=1\,\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m/s})^2 \tag{13}$$

可以发现焦耳(J)的定义在量纲上与式(11)相同，即前面分析的新量纲Δ就是能量的量纲。将式(11)中的Δ换成“能量”，则有

$$\text{能量}\equiv\text{质量}\times(\text{速度})^2 \tag{14}$$

3. 从基本量纲关系推导牛顿第二运动定律

将式(2)“速度≡长度/时间”代入式(14)“能量≡质量×(速度)^2”，有

$$\text{能量}\equiv\text{质量}\times\frac{\text{长度}}{\text{时间}}\times\frac{\text{长度}}{\text{时间}}\Rightarrow\frac{\text{能量}}{\text{长度}}\equiv\text{质量}\times\frac{\text{长度}}{(\text{时间})^2} \tag{15}$$

另一方面，能量是一个物理系统对其他物理系统做功的能力，简单地说就是能量等于功；而功又等于力与在力的方向上通过的位移的乘积，于是在量纲上有

$$\text{质量}\times(\text{速度})^2\equiv\text{能量}\equiv\text{功}\equiv\text{力}\times\text{长度} \tag{16}$$

以及

$$\frac{\text{力}\times\text{长度}}{\text{长度}}\equiv\text{质量}\times\frac{\text{长度}}{(\text{时间})^2}\Rightarrow\text{力}\equiv\text{质量}\times\frac{\text{长度}}{(\text{时间})^2}\Rightarrow F\equiv ma\Rightarrow F=ma \tag{17}$$

在现有物理观念中，一般认为在质量 m 和加速度 a 两者确定的情况下，力是确定的，这一点也与常识吻合。所以式(17)可以从量纲意义上的等价关系过渡到数值意义上的等量关系，即将式(17)中的“≡”替换为“=”，这就是牛顿第二运动定律，由此定义了力的量纲牛顿(N)，即

$$\mathrm{N}\equiv\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{18}$$

文献[6] [7]推导牛顿第二运动定律的方法是对动量 p 做微分，

$$p=mu\Rightarrow F=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

若质量不随时间变化，则有 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=0$。另外引入式(3)中定义的 $a=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ 有

$$F=m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=ma \tag{20}$$

4. 一般形式的引力定律

引力是一个质量体对其他质量体呈现出来的吸引作用。引力性是质量体的四个本征属性之一，引力仅与其自身的质量有关，与其他质量体的质量无关；只要有质量就有引力。质量体自身感受不到自身的引力，引力的存在只能通过其他质量体来反映，其他质量体相当于引力接收体或者引力探测器，有了它们才可以感受到引力的存在，但是不能因此反过来说，没有其他质量体，一个质量体的引力就不存在。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

4.1. 基本引力禀性常数

论文应采用 A4 幅面进行排版。论文页面设置为：上边距 3 厘米，下边距 3 厘米，左右边距 2 厘米；页眉 2 厘米，页脚 1.5 厘米。

为了描述引力性，作者引入了“基本引力禀性常数(fundamental gravitational intrinsic constant)”的概念[1] [2] [4]。假定 1kg 质量所固有的引力禀性为Λ(N)，两者在量值上通过一个待定常数Γ联系在一起，即

$$1(\mathrm{kg})\cdot\Gamma=\Lambda(\mathrm{N}) \tag{21}$$

于是

$$\Gamma=\frac{\Lambda(\mathrm{N})}{1(\mathrm{kg})}=\Lambda\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right) \tag{22}$$

将Γ称为基本引力禀性常数，其量纲为

$$\Gamma\equiv\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \tag{23}$$

4.2. 宇宙总引力守恒

将质量为 M (kg)的质量体对应的引力记为 F_M，则有

$$F_M=\Gamma\cdot M \tag{24}$$

式(24)表明，一个质量体的引力性的大小或者引力总量与该质量体的质量成正比，质量越大、引力越大。另外在质量不变的前提下，质量体的引力总量值是固定的。如果质量 M 的取值为整个宇宙的总质量 M_U，相应有

$$F_{M_U}=\Gamma\cdot M_U \tag{25}$$

如果认可宇宙总质量守恒，则式(25)所对应的宇宙总引力量值也是一个恒定的常数，即宇宙总引力守恒。

4.3. 基于立体角概念推导一般形式的引力定律

在不考虑风力等外部因素影响的前提下，设想从一个距地面一定高度的浮空器上释放一个铅球，因为不管从哪一个位置释放铅球，铅球都将往地面运动，而不是往地面相反的方向运动，说明在任何位置均有引力，没有哪一个位置没有引力；另外只要高度相同，铅球在任何位置落到地面所需要的时间均相等，这说明如果以浮空器所在高度画一个与地球同心的球面，在该球面上任何一点的地球引力数值均相等。由此可以推断一个质量体的引力在空间均匀分布；若以该质量体为球心、任取一个长度为球半径画一个球面，则在该球面上任一点的引力数值相等。球半径即为引力在某一段时间内的传播距离。

球在平面上的投影为圆。为了画图简单，在图 1 中用圆来代表球面。以直角三角形的一条直角边为轴旋转 360°而成的几何体称为圆锥。用一个顶点与球心共点的圆锥去切割球面，圆锥切割下来的球面区域称为球冠，该球冠对应的锥角Ω称为立体角，如图 1(a)所示，其大小为

$$\Omega=\frac{A}{r^2} \tag{26}$$

分母中的球半径或者距离项 r^2 的量纲为 m^2，分子中的球冠面积项 A 的量纲为 m^2，两者之比是一个没有量纲的数(球面度)。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

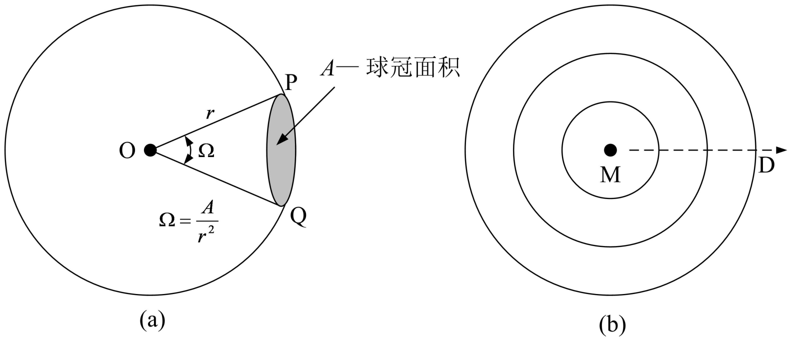

Figure 1. (a) Concept of solid angle; (b) The spreading process of gravitational circle forms a wave, which looks like gravitational wave
图 1. (a) 立体角概念；(b) 引力圆扩散的过程构成波形，看起来像引力波

根据式(24)，总量为 F_M 的引力平均分布在整个球面上，立体角Ω对应的引力数值为

$$F_\Omega = F_M \cdot \Omega = \Gamma \cdot M \cdot \Omega = \Gamma \cdot M \cdot \frac{A}{r^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2} \equiv \mathrm{N} \tag{27}$$

即式(27)的计算结果仍为力的量纲，该式表明质量体在球面上的引力分布与立体角成正比。

如果以图 1(a)所示的圆来表示引力，则圆上每一点的引力数值都是相同的，该圆可以形象地称为引力圆。如图 1(b)所示，若以质量体 M_1 为圆心画一系列引力圆，这些引力圆一圈一圈地扩展开去，看上去如同波，不妨称之为“引力波”。设想在点 D 有一个基于差值信号工作的引力探测器，当质量体 M_1 的质量不变时，引力探测器的读数是不变的，或者说探测不到引力变化；如果把质量体 M_2 与质量体 M_1 合并，那么合并之后过了一段时间，探测器就会感受到质量变化产生的引力信号差值或者扰动，从而实现引力探测。在式(27)中，如果保留距离项 r^2 不变，将其他各项量纲代入并组合为下列形式

$$\begin{aligned} F_\Omega &= \cdots \equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{r^2} \equiv \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m}^2\right) \cdot \frac{\mathrm{kg}}{r^2} \\ &\equiv \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}\right) \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} \equiv \left(\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} \end{aligned} \tag{28}$$

如果将式(28)中量纲组合项 $\left(\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)$ 对应一个常数项 $\tilde{G}$，则有

$$F_\Omega = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G} \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} \tag{29}$$

如图 2(a)所示，如果立体角非常小，则定义立体角Ω投影的两条直线 OP 和 OQ 几乎合并为一条直线，此时式(28)表示立体角的下标Ω可以略去，即有

$$F_\Omega = F = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G} \cdot \frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} \tag{30}$$

式(29)、(30)表明，质量体在空间某处的引力与质量的平方成正比，与距离的平方成反比；质量越大，引力越大；距离越远，引力越小。应该指出的是，式(30)中虽然省略了立体角下标Ω，但是立体角概念的本质依然存在。从因果关系的角度来说，立体角概念式(26)是原因，首先是因为立体角概念中引入了距离平方项 r^2，才演变出来后面的一系列表达式，它们的先后顺序不能搞反。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

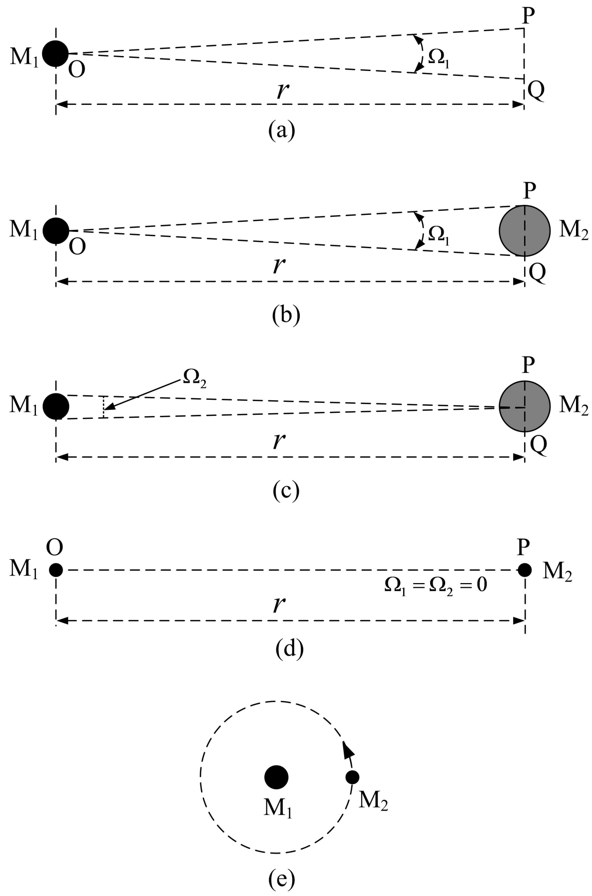

Figure 2. (a) There are no other mass bodies in the solid angle Ω_1 subtended by mass body M_1; (b) There is a mass body M_2 in the solid angle Ω_1 subtended by mass body M_1; (c) The solid angle Ω_2 of mass body M_2 to mass body M_1; (d) Solid angle equals zero, i.e., $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$; (e) Mass body M_2 rotates around mass body M_1

图 2. (a) 在质量体 M_1 所张的立体角Ω_1内没有其他质量体；(b) 在质量体 M_1 所张的立体角Ω_1内有一个质量体 M_2；(c) 质量体 M_2 对质量体 M_1 所张的立体角为Ω_2；(d) 立体角等于零，即 $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$；(e) 质量体 M_2 围绕质量体 M_1 旋转

下面进一步讨论式(29)。如图 2(a)所示，从质量体 M_1 画一个立体角Ω_1投射出去，在立体角Ω_1限定的空间范围内没有其他质量体存在，则根据式(29)可以写出

$$F_{\Omega_1} = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_1\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_1\cdot\frac{M_1^2}{r^2} \tag{31}$$

此时并不能因为立体角Ω_1内空无一物就认为其中没有从质量体 M_1 弥散出来的引力存在。

如图 2(b)所示，设在质量体 M_1 的立体角Ω_1内有一个质量体 M_2，M_1 和 M_2 之间的距离为 r。显然此时质量体 M_1 弥散出去的引力并不会因为其立体角Ω_1内存在其他质量体而发生变化，换言之，此时式(31)仍然适用，此时质量体 M_1 在距离 r 处的引力就是质量体 M_2 感受到的质量体 M_1 的引力。

类似地，如图 2(c)所示，从质量体 M_2 看质量体 M_1，M_1 也位于 M_2 所张的立体角Ω_2内，并有

$$F_{\Omega_2} = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_2\cdot\frac{M_2^2}{r^2} \tag{32}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

此时质量体 M_2 在距离 r 处的引力就是质量体 M_1 感受到的质量体 M_2 的引力。

从式(31)和式(32)可以看到，当 $M_1 \neq M_2$ 时 $F_{\Omega_1} \neq F_{\Omega_2}$，即不同质量的两个质量体彼此感受到的引力也不相同。

如图 2(d)所示，在立体角非常小的情况下，从质量体 M_1 看质量体 M_2，质量体 M_2 看起来是一个点，或者说质量体退化为质量点，从而形成质点的概念。类似地，在立体角非常小的情况下，从质量体 M_2 看质量体 M_1，质量体 M_1 看起来也是一个点，于是质量体 M_1 和质量体 M_2 相当于一条直线上的两个点。这时式(31)可以写为

$$F_{\Omega_1} = F_1 = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_1\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_1\cdot\frac{M_1^2}{r^2} \tag{33}$$

对于质量体 M₂，式(32)可以写为

$$F_{\Omega_2} = F_2 = \cdots \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_2\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{r^2} = \tilde{G}_2\cdot\frac{M_2^2}{r^2} \tag{34}$$

上述情况可以合并为一个公式表达，

$$F_M = \tilde{G}_M\cdot\frac{M^2}{r^2} \tag{35}$$

即一个质量体在空间某一点处的引力值与该质量体的质量平方成正比，与质量体和该点之间的距离平方成反比，这就是一般形式的引力定律。

4.4. 万有引力定律只是一般形式的引力定律的特例

上述公式中的 kg^2 被视为一个质量体的质量的平方；如果将 kg^2 改写为 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{kg}$，则与之对应的是两个质量体的质量的乘积，据此可以写出

$$F_{12} = \cdots \equiv \tilde{G}_{12}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{kg}}{r^2} \Rightarrow \tilde{G}_{12}\cdot\frac{M_1M_2}{r^2} \tag{36}$$

以及

$$F_{21} = \cdots \equiv \tilde{G}_{21}\cdot\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{kg}}{r^2} \Rightarrow \tilde{G}_{21}\cdot\frac{M_1M_2}{r^2} \tag{37}$$

比较一下式(36)和(37)的右端，可以看出两式均有一个相同项 $\frac{M_1M_2}{r^2}$，因此如果 $\tilde{G}_{12} = \tilde{G}_{21} = G$，则有 $F_{12} = F_{21}$，这是只有 M_1 和 M_2 两个质量体、并且质量体 M_2 围绕质量体 M_1 旋转的情况，如图 7(e)所示，此时有

$$F = G\frac{M_1M_2}{r^2} \tag{38}$$

这就是牛顿万有引力定律[6]，其中 G 称为引力常数，其数值和量纲为

$$G = 6.673\times10^{-11}\left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right) \tag{39}$$

如上所述，万有引力定律即式(38)的导出有两个前提条件，一个条件是只有两个质量体，实际情况是不止两个质量体，这意味着忽略了其他质量体的引力对这两个质量体的影响；另一个条件是一个质量体以另一个质量体为中心旋转，其运动轨迹是圆或者椭圆。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

一般情况下，质量体的数量不止两个，相应地它们受到的引力也不止两个，这些引力的整体效果体现为一个合力。以图 3(a)为例，当质量体 M_2 受到一个大引力作用时，圆形轨迹将变为椭圆、如图 3(b)所示；最后变成一条直线、如图 3(c)所示，这时式(38)就不再适用。

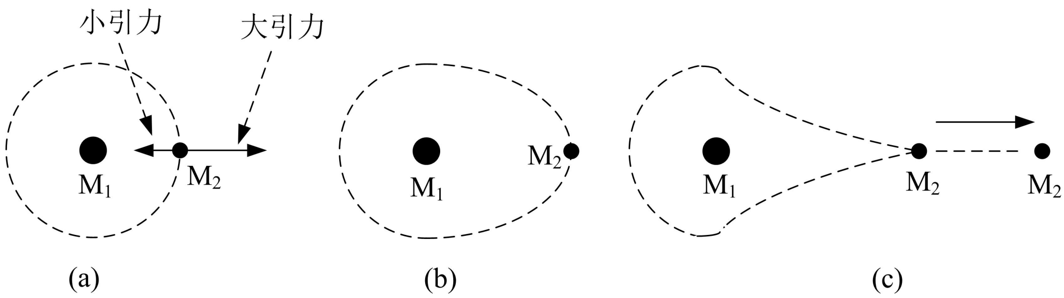

Figure 3. Mass body M₂ moves in a circle. Under the action of a great gravity, the motion track of mass body M_2 is gradually flattened and elongated, from the beginning circle (a) to the ellipse (b), and finally to a straight line (c)
图 3. 质量体 M_2 作圆周运动，在一个大引力的作用下，质量体 M_2 的运动轨迹被逐渐压扁拉长，从开始的圆(a)变成椭圆(b)，最后变成一条直线(c)

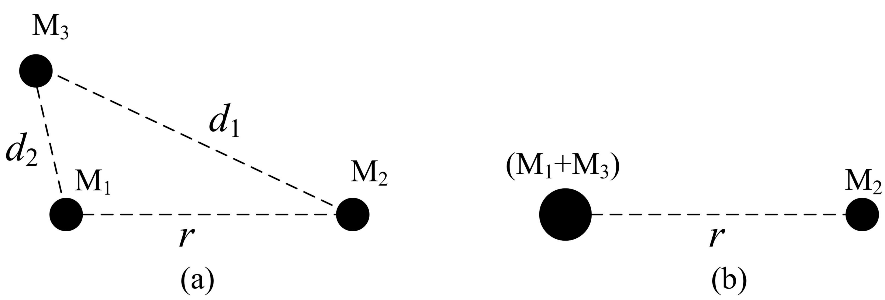

Figure 4. The merge of mass bodies
图 4. 质量体的合并

下面来看一下，如果式(38)是一个普遍适用的公式，它将衍生出什么结论？本节前面指出，只有两个质量体是导出式(38)的前提条件。如图 4(a)所示，假设有三个质量体，根据牛顿万有引力定律，任何两个质量体之间均存在引力。以质量体 M_2 为例，M_2 与 M_1 之间距离为 r，两者之间的引力为

$$F_{21} = F_{12} = G\frac{M_1M_2}{r^2} \tag{40}$$

M_2 与 M_3 之间距离为 d_1，两者之间的引力为

$$F_{23} = F_{32} = G\frac{M_3M_2}{d_1^2} \tag{41}$$

质量体 M_2 产生的引力之和为

$$F_2 = F_{21} + F_{23} = G\left(\frac{M_1}{r^2} + \frac{M_3}{d_1^2}\right)M_2 \tag{42}$$

类似地，如果还有一个质量体 M_4，它与质量体 M_2 之间的距离为 d_2，则质量体 M_2 产生的引力之和为

$$F_2 = F_{21} + F_{23} + F_{24} = G\left(\frac{M_1}{r^2} + \frac{M_3}{d_1^2} + \frac{M_4}{d_2^2}\right)M_2 \tag{43}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

现今宇宙是一个由无穷多个质量体构成的体系，M_2 与其他每一个质量体之间均存在引力，于是质量体 M_2 产生的引力之和为

$$F_2 = F_{21} + F_{23} + F_{24} + \cdots = G\left(\frac{M_1}{r^2} + \frac{M_3}{d_1^2} + \frac{M_4}{d_2^2} + \cdots\right)M_2 \tag{44}$$

式(44)表明，一个质量体的引力与所有其他质量体的质量相关；此外，由于式(44)中引入了一个无穷多的正数项之和，因此在逻辑上式(44)的计算结果有可能为无穷大；如果无穷大不可能，那么仍然有相当概率呈现为“非常大”，与之对应的物理结论是：质量体 M_2 所具有的引力至少不小。因为对于每一个质量体都可以写出与式(44)类似的表达式，故该结论适用于每一个质量体，即宇宙中任何一个质量体都具有不小的引力。

另一方面，如果式(38)是计算引力的唯一公式，那么当只有一个质量体时，该质量体的引力如何描述也是一个问题。若仍然使用式(38)，因为只有一个质量体，设该质量体为 M_1，则有 M_2=0，于是质量体 M_1 的引力等于零，但是这又与前面得到的“宇宙中任何一个质量体都具有不小的引力”的论断相矛盾。

上述分析表明，式(38)并不具有普适性，它仅适用于只有两个质量体、并且一个质量体围绕另一质量体旋转的情况。

4.5. 引力的动态变化

物质是运动意味着只要是质量体都是运动的，没有不运动的质量体，因此从概念上说，引力计算公式中的距离 r 随时都在发生变化，距离 r 的变化又导致质量体引力分布的变化，因此从整体上说，引力是动态变化的。当然引力是否变化与能否感知引力的变化是两个不同的概念。

式(17)给出的牛顿第二运动定律在概念上同样适用于引力。将质量体因为引力作用而产生的加速度称为引力加速度。

设两个小质量体 m_1 和 m_2，并且 $m_1>m_2$；两者的初始速度相同、均为 u_0。同时设有一个大质量体 M，并有 $M \gg m_1$，$M \gg m_2$，于是 M 对 m_1 和 m_2 的引力远大于 m_1 和 m_2 的引力对 M 的引力，即可以只考虑 m_1 和 m_2 在 M 的引力作用下向 M 的直线运动。

设小质量体 m_1 和 m_2 与大质量体 M 之间的距离相同、均为 r。假设引力加速度的方向与初始速度的方向相同，则可以根据式(5)写出速度的关系式；一般情况下，大质量体的引力 F_M 根据式(35)计算。根据牛顿第二运动定律，小质量体 m_1 在引力 F_M 的作用下产生的加速度为 $a_1 = F_M/m_1$，小质量体 m_2 在引力 F_M 的作用下产生的加速度为 $a_2 = F_M/m_2$，综合在一起可以写出下列关系式

$$\left.\begin{aligned} &F_M = \tilde{G}_M \cdot \frac{M^2}{r^2} \\ &u_1(t) = u_0 + a_1 \cdot t = u_0 + \frac{F_M}{m_1} \cdot t \\ &u_2(t) = u_0 + a_2 \cdot t = u_0 + \frac{F_M}{m_2} \cdot t \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

式中 u_1 和 u_2 分别为质量体 m_1 和 m_2 的瞬时速度，u_0 为它们的初始速度。

式(45)相当于引力动态变化过程中的一个片断：大质量体的引力产生加速度，加速度使小质量体的速度发生变化；速度变化又使距离 r 发生变化，距离 r 变化进一步使引力发生变化，引力变化又使加速度发生变化，如此等等，循环往复。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

从式(45)可以看到：

1) 因为 $m_1> m_2$，故有 $a_1=F_M/m_1<a_2=F_M/m_2$，相应有 $u_1<u_2$，即质量较大的质量体 m_1 的运动速度小于质量较小的质量体 m_2 的运动速度；此时若设定一个有限的距离，因为小质量体的运动速度较快，故小质量体先走完这段距离；

2) 如果 $a_1≈a_2$，例如一般认为地面附近质量体受地球引力作用在真空中下落的加速度 g(≈9.9m/s^2)相同，此时有 $a_1≈a_2=g$，于是 $u_1=u_2$，两个质量不同的质量体同时走完一段距离；例如，看起来就是从某一高处同时落下的大小不同的两个质量体同时落地；

3) 如果基于牛顿万有引力公式(38)来做上述分析，则结论刚好相反，这是因为按照式(38)，引力正比于两个质量体质量的乘积，质量越大、引力越大，引力产生的加速度越大；于是 $F_1>F_2$，质量体 m_1 的引力加速度大于质量体 m_2 的引力加速度，进而 $u_1>u_2$，最终大质量体先走完一段相同的距离，但这个结果与实验不符；这反证了牛顿万有引力公式(38)只是引力计算的一个特例。

4.6. 引力守恒和引力的无限可稀释性

一方面，一个质量体的总的引力性或者引力的总量值不变，另一方面从引力公式可以看到，引力随着距离 r 的增加而衰减，形象地说，这是一个引力逐渐被稀释的过程。由于距离 r 没有限制，它可以是无穷大，也就是说不论距离多远都有引力，说明引力是可以无限稀释的；引力的无限可稀释性说明引力是可以无限细分的。由于在任何一个空间点都有引力，说明引力分布在可以无限稀释的同时又是致密的，不存在不受引力影响的“空点”；反之，如果存在这样的空点，那么把这些空点连接起来，就可以形成一条不受引力影响的通道，但是至少现在看来不存在这样一条不受引力影响的通道或者“窗口”。

考虑在一条无限长直线上的引力数值分布。由于引力的无限可稀释性，在该直线上的任何一点都有一个引力数值，在质量不变的前提下，质量体的质量是一个常数，于是引力数值仅是距离 r 的函数，可以按照式(31)来计算，即

$$F(r)=\tilde{G}_M\cdot\frac{M^2}{r^2},\quad 1<r<+\infty \tag{49}$$

如果把该直线上的各点的引力数值全部加起来，则有

$$F=\sum F(r)=\sum\tilde{G}_M\cdot\frac{M^2}{r^2}=\tilde{G}_M M^2\cdot\sum\frac{1}{r^2} \tag{50}$$

式(50)中的 $\sum\frac{1}{r^2}$ 是一个连续函数的求和，该式的计算没有现成的公式可用，只能做近似计算。如果距离 r 从 1 开始只取正整数，则有

$$\sum\frac{1}{r^2}\approx\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} \tag{51}$$

```
>> syms r
>> symsum(1/r^2,1,inf)
ans =1/6*pi^2
```

即

$$\sum\frac{1}{r^2}\approx\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

因为两个正整数之间可以细分为很多点，每一点所在的位置都有引力，一条直线上的引力之和还应该包括两个正整数之间各点的引力，例如 r 旁边是 r+0.1，于是有

$$\sum\frac{1}{r^2}\approx\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(r+0.1)^2}\right]=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+0.1)^2} \tag{52}$$

对于上式中的第二项无穷级数的求和，可以输入下列 MATLAB 语句

```
>> symsum(1/(r+0.1)^2,1,inf)
ans =Psi(1,11/10)
```

式中 Psi 为多伽马函数(polygamma function，Psi 函数的各阶导数统称为多伽马函数)，可用 vpa( )函数得出其数值。例如，

```
>> vpa(Psi(1,11/10))
ans =1.4332991507927586027903998910915
```

即有

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+0.1)^2}=1.4332991507927586027903998910915 \tag{53}$$

由于 r+0.1 旁边还有 r+0.2、r+0.3、….等等，采用类似的方法可以求出 $\sum\frac{1}{r^2}$ 在这些点处的数值。为此可以执行下列 MATLAB 程序

```
% MATLAB Name: Gravity01.m
close all; clear all; syms r;
s0=symsum(1/r^2,1,inf);s1=symsum(1/(r+0.1)^2,1,inf);
s2=symsum(1/(r+0.2)^2,1,inf);s3=symsum(1/(r+0.3)^2,1,inf);
s4=symsum(1/(r+0.4)^2,1,inf);s5=symsum(1/(r+0.5)^2,1,inf);
s6=symsum(1/(r+0.6)^2,1,inf);s7=symsum(1/(r+0.7)^2,1,inf);
s8=symsum(1/(r+0.8)^2,1,inf);s9=symsum(1/(r+0.9)^2,1,inf);
S=vpa((s0+s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9),10)
```

结果(取 10 位长度)为 S =10.51663357，即有

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{r^2}&\approx\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(r+0.1)^2}+\frac{1}{(r+0.2)^2}+\cdots+\frac{1}{(r+0.9)^2}\right]\\&=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+0.1)^2}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+0.2)^2}+\cdots+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(r+0.9)^2}\\&=10.51663357\end{aligned} \tag{54}$$

在式(54)中以 0.1 为间距相当于在两个相邻的正整数之间进行插值或者采样计算。如果希望采样点更多，可以选取更小的间距。但是，式(54)所示算例至少表明一条直线上各点的引力数值累加之和是收敛的，这是引力总量值守恒需要满足的必要条件。

可以用肥皂膜来理解引力的无限可稀释性，一个质量体的引力分布相当于无数多个共球心的肥皂膜顺序展开，不妨称之为引力(肥皂)膜；以最外一层引力膜为界，在膜内(包括膜表面)的任何一点均有引力，在膜外没有该质量体的引力、或者说引力还没有传播到；引力膜可以无限膨胀、无限变薄、无限变大、

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

但是永不破裂；引力膜的膨胀速度就是引力的传播速度。一个质量体对应一个引力膜，引力膜消失表明质量体消失。例如，当两个质量体合并为一个新的质量体时，因为原有的两个质量体消失，故原有的引力膜消失，取而代之的是一个新的引力膜；对于膜外空间中的某一点来说，新的引力膜膨胀到达该点需要一定时间，当新的引力膜膨胀经过该点时，其局部形如一个或强或弱的“(引力波)涟漪”。

4.7. 引力与时间的关系

牛顿给出的万有引力定律中没有时间量。这一点被解读成牛顿认为引力速度无穷大[8]，即引力可以瞬间传播至任何地方，不管距离有多远，引力都能瞬间到达[9]。本文前面 14.3 节已经指出，引力瞬间到达是不可能的。

由于宇宙中的质量体是运动的，所以从概念上说，引力随时都在变化。注意引力的变化与能否测量到引力的变化是两个概念。引力计算公式中没有时间量，这表明引力本身与时间无关；但是引力的变化和传输需要时间，或者说引力的变化和传输过程与时间有关。

4.8. 关于基本引力秉性常数的进一步分析

将式(23)逐步改写如下

$$\begin{aligned}\Gamma &\equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \equiv \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}^2}\cdot\mathrm{kg} \equiv \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot\mathrm{kg}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}^2} \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}^2}\\ &\equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}^2} \equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{m}^2}\\ &\equiv \left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)\cdot\left(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right)\end{aligned} \tag{55}$$

式(55)中各项所对应的量纲如下所示

$$\Gamma \equiv \cdots \equiv \underbrace{\left(\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}\right)}_{\text{引力常数的量纲}}\cdot\overbrace{\left(\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)}^{\text{普朗克常数的量纲}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right)}_{\text{速度量纲的倒数}}\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right)}^{\text{体积量纲的倒数}} \tag{56}$$

如式(23)所示，基本引力秉性常数Γ是以 1 kg 质量为基础来定义的。与 1 kg 质量相对应的质量体无论多少均占有一定量的体积，式(56)中的$\left(\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right)$项通过体积量纲的倒数的形式反映了这一特征。

至此可以判断基本引力秉性常数Γ与引力常数 G、普朗克常数 h 以及光速 c 之间具有下列关系

$$\Gamma = \zeta\cdot\frac{Gh}{c} = \zeta\cdot\frac{6.673\times10^{-11}\times6.626\times10^{-34}}{2.998\times10^{8}} = \zeta\times1.4798\times10^{-52}\,(\mathrm{N/kg}) \tag{57}$$

其中 ζ 是一个待定常系数。

从式(57)可以看到，尽管常系数 ζ 的具体数值有待确定，但是从它的构成关系来看，大概率可以判断基本引力秉性常数Γ的数值小于普朗克常数 h 的数值。当然认同这一点、特别是通过实验确定其具体数值需要时间，毕竟基本引力秉性常数Γ是一个提出时间很短的新概念[1] [2] [3] [4]。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020

5. 结束语

引力是宇宙中最普遍的力，引力的大小只与其自身的质量有关、与其他质量体无关。一个质量体的引力以该质量体为中心向整个空间弥散，在空间某一点处的引力与该质量体的质量平方成正比、与该点至该质量体之间的距离平方成反比；换言之，质量体的质量越大、产生的引力越大；离质量体越近、引力越大。将引力表达为与两个质量体的质量乘积的牛顿万有引力定律只是一种特例。

本文提出了基本引力禀性常数(Γ)的概念，其基本含义是 1 kg 质量所对应的引力有多少 N(牛顿)，其量纲为 N/kg。基本引力禀性常数Γ与引力常数和普朗克常数的乘积成正比、与光速成反比，量值估计为$\Gamma = \zeta \times 1.4798 \times 10^{-52}$ (N/kg)，其中ζ是一个待定常系数。在现有物理常数中，普朗克常数的量值最小[10]。作者的分析表明，基本引力禀性常数Γ的量值比普朗克常数还小，它是一个最小的物理常数[1] [2] [3] [4]。

参考文献

[1] 王忆锋. 基于量纲分析和光速原理的质量体引力分析和计算[EB/OL]. 北京：中国科技论文在线. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/202004-231, 2020-04-23.

[2] 王忆锋. 补充完善牛顿运动定律和万有引力定律[EB/OL]. 中国科技论文在线. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/202008-55, 2020-08-31.

[3] 王忆锋. 基于光速原理的质量体引力性分析[EB/OL]. 北京：中国科技论文在线. http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/202010-1, 2020-10-09

[4] 王忆锋. 论基本引力禀性常数[J]. 科技风, 2020,(29):75-77.

[5] 谈庆明. 量纲分析[M],合肥：中国科技大学出版社, 2005.

[6] 艾萨克·牛顿著. 王克迪译.自然哲学的数学原理[M]．西安：陕西人民出版社,2001,

[7] 胡盘新．大学物理手册[M]．上海：上海交通大学出版社, 2007.

[8] 柯济. 引力的速度[N]. 光明日报，2013-01-22(3).

[9] 汤克云,华昌才,文武,等. 由固体潮发现引力以光速传播的观测证据[J]. 科学通报, 2013,58(6):907-911.

[10] 沈乃澂. 基本物理常数 1998 年国际推荐值[M]. 北京：中国计量出版社, 2004.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 18 November 2020, publ: 20 November 2020