

# Determination of Deck Arch Bridge Arch Rib Internal Load and Preliminary Design of Arch Axis\*

Wen-Jie Niu

College of Mechanics and Engineering Department, Liaoning Technical University, Fuxin  
Email: nwj1982@sohu.com

Received: Jan. 16<sup>th</sup>, 2013; revised: Feb. 22<sup>nd</sup>, 2013; accepted: Mar. 3<sup>rd</sup>, 2013

Copyright © 2013 Wen-Jie Niu. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** For final purpose to analyse of hingeless arch which two springs are fastened in the elastic foundation by Finite Element Method, the first preliminary task is to determine internal loads at the springs of the hingeless arch induced by the foundation bearing slope angle when the hingeless arch spring is assumed as rigidly fixed in the rigid foundation. Flexibility method and elastic center method were both used to determine the internal load acted on the arch spring induced by the slope angle of the foundation bearing assumed as rigid in a same example. Results indicate that the two methods give the almost same result. Preliminary design of arch axis was discussed.

**Keywords:** Fastened in Elastic Foundation; Hingeless Arch; Flexibility Method; Elastic Center Method; Preliminary Arch Axis

## 上承式拱桥主拱的内力计算和初始拱轴线确定方法\*

牛文杰

辽宁工程技术大学力学与工程学院, 阜新  
Email: nwj1982@sohu.com

收稿日期: 2013 年 1 月 16 日; 修回日期: 2013 年 2 月 22 日; 录用日期: 2013 年 3 月 3 日

**摘要:** 为了对主拱拱脚位置处弹性固定在地基上的无铰拱结构进行有限元分析, 需要首先确定拱固端支座发生转角位移时内力的计算公式。应用力法和弹性中心法得到了拱固端支座发生转角位移时内力的计算公式。两种计算结果基本完全一致。最后讨论了初始拱轴线的确定方法。

**关键词:** 弹性固定; 无铰拱; 力法; 弹性中心法; 初始拱轴线

### 1. 引言

拱结构常被作为拱桥的主要承重结构<sup>[1-3]</sup>。跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥长 323 m, 是世界第四, 美国第一的混凝土拱桥<sup>[4]</sup>, 如图 1, 2 所示。图 1, 2 的简化分析模型可先隔离出主拱圈进行近似分析。如果对上承式拱桥进行整体有限元分析, 并且如果认为主拱拱脚位置处是弹

性固定在地基上, 那么需要先建立主拱单元固端支座发生转角位移时杆端内力的计算公式。

对于图 3 对应的不考虑拱上建筑联合作用的连拱



Figure 1. Deck arch bridge  
图 1. 上承式拱桥<sup>[4]</sup>

\*资助信息: 辽宁工程技术大学科研启动基金资助(11-415)。



Figure 2. Deck arch bridge composed of two arch ribs and frames  
图 2. 双肋框架拱桥<sup>[4]</sup>

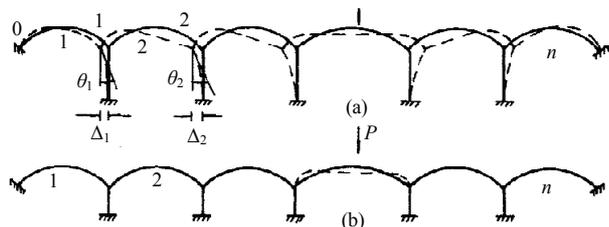


Figure 3. Multi-arch bridge arch rib analysis scheme  
图 3. 连拱桥主拱的计算简图<sup>[5]</sup>

桥计算模型，一般需要借助于有限元电算建模来解决。有限元电算建模的基本单元是桥墩以上的主拱拱圈和桥墩直杆单元。图 3 的连拱桥在荷载作用下各拱墩和主拱结点会产生水平位移和竖直位移以及转角。采用位移法计算图 3 的连拱结构时，需要先建立各拱墩结点发生转角位移时杆端内力的计算公式。

在隧道衬砌结构中，拱结构也经常使用<sup>[6]</sup>。半衬砌及厚拱薄墙衬砌常常简化为拱脚弹性固定的无铰拱进行计算<sup>[7]</sup>。当使用位移法计算拱脚弹性固定的无铰拱时，需要先建立主拱单元固端支座发生转角位移时杆端内力的计算公式。

从上述分析可见，固定无铰拱的固端支座发生转角位移时杆端内力的计算非常重要。虽然直梁的转角位移法发展的很完善<sup>[8]</sup>，但曲梁或拱的的转角位移基本方程仍需要进行深入研究。

下面分析当忽略拱的切向变形和轴向变形时，分别通过传统力法和弹性中心法计算固定端支承 B 发生转角时，杆端 B 的内力  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$ ，并通过算例比较了两种方法的计算结果。最后讨论了初始拱轴线的确定方法。

## 2. 无铰拱的固端支座发生转角位移时杆端内力的计算

### 2.1. 传统力法

图 4 是圆的一半，也就是半圆。

当图 4 中的支座 B 因为在外荷载作用下发生水平位移和竖直位移是 0，转角为  $\alpha$  时，AB 杆末端必然也在图 5 所示的  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下发生了水平位移和竖直位移是 0，转角为  $\alpha$  的位移。

下面计算  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下 AB 杆末端的转角以及水平位移和竖直位移。

规定杆件截面末端的内力中弯矩以顺时针为正，逆时针为负。

首先计算图 5 中  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下，极坐标角度为  $\theta$  的截面上的弯矩。通过对隔离体进行分析得到：

$$M_\theta = -M_B - H_B R \sin \theta + V_B (R - R \cos \theta) \quad (1)$$

为了计算 AB 杆端的位移，在 AB 杆端施加图 6 所示的单位荷载。

在图 6 所示的单位弯矩作用下，极坐标角度为  $\theta$  的截面上的弯矩是：

$$M_{M1} = -1 \quad (2)$$

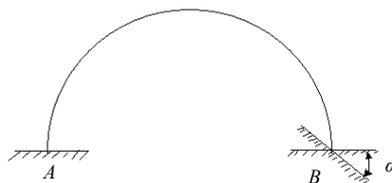


Figure 4. Computation scheme when arch bearing rotates  
图 4. 拱支座发生转动角位移时的计算示意图

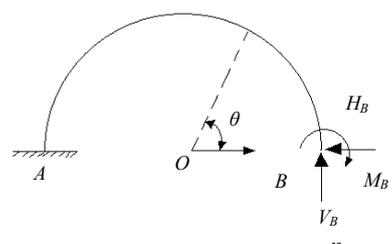


Figure 5. Fundamental system to analyse the internal load of the hingeless arch with flexibility method  
图 5. 力法分析固定无铰拱内力的基本体系

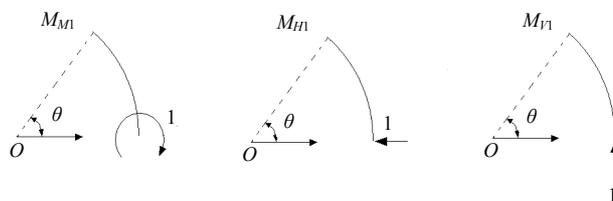


Figure 6. Unit-load acted on the end of the curved bar AB  
图 6. 单位荷载施加在 AB 曲杆末端

在图 6 所示的单位水平荷载作用下, 极坐标角度为  $\theta$  的截面上的弯矩是:

$$M_{H1} = -R \sin \theta \quad (3)$$

在图 6 所示的单位竖直荷载作用下, 极坐标角度为  $\theta$  的截面上的弯矩是:

$$M_{V1} = R - R \cos \theta \quad (4)$$

因为图 5 所示的  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下发生了转角为  $\alpha$  的位移, 所以:

$$\alpha = \int_0^\pi M_\theta M_{M1} \frac{1}{EI} R d\theta \quad (5)$$

代入公式(1)和(2), 得:

$$\alpha = \int_0^\pi [M_B + H_B R \sin \theta + V_B (-R + R \cos \theta)] \frac{1}{EI} R d\theta \quad (6)$$

(6)化简后得:

$$\frac{EI\alpha}{R} = \pi M_B + 2H_B R - V_B R \pi \quad (7)$$

因为图 5 所示的  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下发生的水平位移是 0, 所以

$$0 = \int_0^\pi M_\theta M_{H1} \frac{1}{EI} R d\theta \quad (8)$$

代入公式(1)和(3), 得:

$$0 = \int_0^\pi [M_B + H_B R \sin \theta + V_B (-R + R \cos \theta)] \times (R \sin \theta) \frac{1}{EI} R d\theta \quad (9)$$

(9)化简后得:

$$0 = -M_B \times (-2) + V_B R \times (-2) + 0.5H_B R \pi \quad (10)$$

因为图 5 所示的  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$  杆端力作用下发生的竖直位移是 0, 所以:

$$0 = \int_0^\pi M_\theta M_{V1} \frac{1}{EI} R d\theta \quad (11)$$

代入公式(1)和(4), 得:

$$0 = \int_0^\pi [M_B + H_B R \sin \theta + V_B (-R + R \cos \theta)] \times (-R + R \cos \theta) \frac{1}{EI} R d\theta \quad (12)$$

(12)化简后得:

$$-M_B \pi + 1.5V_B R \pi - 2H_B R = 0 \quad (13)$$

联立方程(7)、(10)和(13), 得:

$$M_B - RV_B + \frac{2H_B R}{\pi} = \frac{EI\alpha}{\pi R} \quad (14)$$

$$-M_B + RV_B - \frac{\pi}{4} RH_B = 0 \quad (15)$$

$$-M_B + \frac{3}{2} RV_B - 2 \frac{R}{\pi} H_B = 0 \quad (16)$$

联立方程(14)、(15)和(16), 得:

$$H_B = \frac{\frac{EI\alpha}{\pi R}}{\frac{2R}{\pi} - \frac{\pi}{4} R} = \frac{4EI\alpha}{8R \times R - \pi R \times \pi R} \quad (17)$$

$$M_B = \frac{(-3\pi^2 + 16)EI\alpha}{\pi R(8 - \pi^2)} \quad (18)$$

$$V_B = \frac{2EI\alpha}{\pi R^2} \quad (19)$$

## 2.2. 算例

根据参考文献[5], 对图 4 的计算参数取值如下:

$$EI = 4833.92 \text{ N} \cdot \text{m}^2, \quad R = 5 \text{ m}。$$

现取图 4 的 B 端发生了图示  $\alpha = 0.1$  的转角, 得到图 4 的两端固定拱结构在 B 端位置处的内力如下图 7 所示, 具体数值如下:

$$M_B = 224.001 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$H_B = -41.369 \text{ N}$$

$$V_B = 12.309 \text{ N}$$

## 2.3. 弹性中心法<sup>[5,8-10]</sup>

为了对图 4 按照弹性中心法进行支座转动引起的内力计算, 把图 4 转化为图 8 所示的设置刚域的计算示意图。A' 和 B' 分别是刚域末端的连接节点。

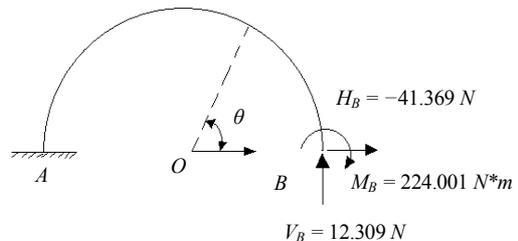


Figure 7. Internal load acted on the arch end induced by the bearing rotation  
图 7. 支座转动角位移引起的拱杆端内力

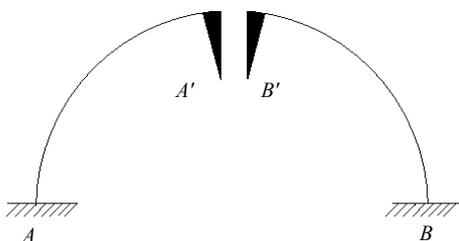


Figure 8. Determinate structural system from the original indeterminate hingeless arch when rigid zone is set according to elastic center method

图 8. 弹性中心法设置刚域后的基本结构

当支座发生如图 4 所示的支座转角位移时,  $B'$  会发生相应的转角位移  $\Delta_{1c}$ 、水平位移  $\Delta_{2c}$  和垂直位移  $\Delta_{3c}$ , 通过静定结构的位移计算公式, 可得:

$$\Delta_{1c} = \theta \quad (20)$$

$$\Delta_{2c} = (f - y_s)\theta \quad (21)$$

$$\Delta_{3c} = \theta R \quad (22)$$

为了应用力法对图 4 按照弹性中心法进行支座转动引起的内力计算, 选取图 8 对应的基本体系如图 9 所示。

选取图 9 基本体系的坐标系如图 10 所示。

按照图 10 所示的基本体系, 可得弹性中心的位置:

$$y_s = \frac{\int \frac{y}{EI} ds}{\int \frac{1}{EI} ds} = \frac{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(1 - \cos\theta) R d\theta}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R d\theta} = 0.36338R \quad (23)$$

$$y - y_s = R(1 - \cos\theta) - 0.36338R = 0.63662R - R \cos\theta \quad (24)$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI} ds = \frac{\pi R}{EI} \quad (25)$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y - y_s)^2}{EI} ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(0.63662R - R \cos\theta)^2}{EI} ds = 0.29757 \frac{R^3}{EI} \quad (26)$$

$$\delta_{33} = \int \frac{x^2}{EI} ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R \sin\theta)^2}{EI} ds = \frac{\pi R^3}{2EI} \quad (27)$$

弹性中心法的未知力计算公式是:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} \quad (28)$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2c}}{\delta_{22}} \quad (29)$$

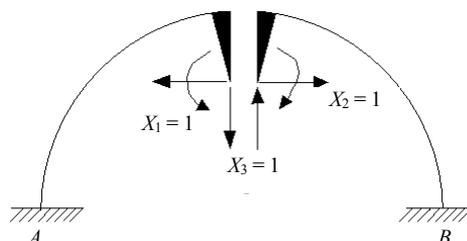


Figure 9. Fundamental system of the hingeless arch when rigid zone is set with elastic center method

图 9. 弹性中心法设置刚域后的基本体系

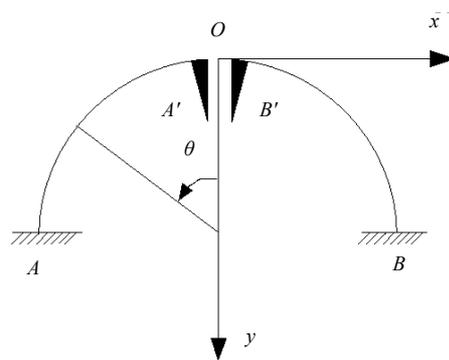


Figure 10. Coordinate System of the Fundamental System

图 10. 基本体系的坐标系

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3c}}{\delta_{33}} \quad (30)$$

根据(20)、(21)、(22)、(25)、(26)和(27), 代入(28)、(29)和(30), 得:

$$X_1 = -\frac{\theta}{\frac{\pi R}{EI}} = -\frac{EI\theta}{\pi R} \quad (31)$$

$$X_2 = -\frac{(f - y_s)\theta}{0.29757 \frac{R^3}{EI}} = -\frac{EI(R - 0.36338R)\theta}{0.29757 R^3} = -2.13940 \frac{EI\theta}{R^2} \quad (32)$$

$$X_3 = -\frac{\theta R}{\frac{\pi R^3}{2EI}} = -\frac{2EI\theta}{\pi R^2} \quad (33)$$

这说明拱支座发生图 4 方向的转动角位移时, 图 9 中刚域末端假定的内力, 包括单位弯矩  $X_1$ , 单位水平力  $X_2$ , 单位竖直力  $X_3$  都是与图 4 刚域末端实际的受力方向相反的。

根据(31)、(32)和(33), 得 B 处杆端力  $H_B$ 、 $V_B$  和  $M_B$ 。其中  $M_B$  如下:

$$M_B = \frac{EI\theta}{\pi R} + 2.13940 \frac{EI\theta}{R^2} (f - y_s) + \frac{2EI\theta}{\pi R^2} R \quad (34)$$

$$= \frac{EI\theta}{R} \left( \frac{3}{\pi} + 1.36198 \right)$$

经计算可得:

$$M_B = 223.995 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$H_B = -41.367 \text{ N}$$

$$V_B = 12.309 \text{ N}$$

### 2.4. 两种算法计算结果的比较

弹性中心法在拱顶端的对称位置设置刚域来计算超静定无铰拱的内力。本文在拱支座 B 点切开拱截面, 作为基本体系进行计算。计算结果表明, 两种计算结果基本完全一致, 如图 11 所示。两种计算方法忽略了剪切变形和轴向变形。

## 3. 上承式混凝土拱桥的初始设计

### 3.1. 跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥按跨径大小的分类

按照单孔跨径  $L_0 > 150$  米是特大桥<sup>[11]</sup>, 跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥长 323 m (图 1 和图 2) 属于特大桥。

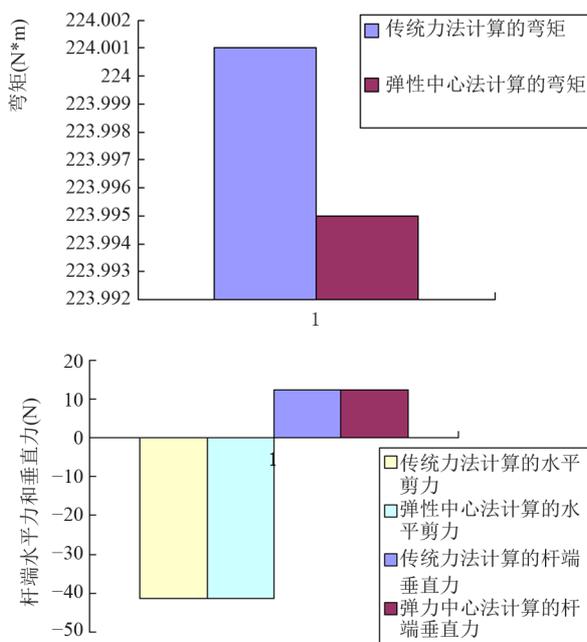


Figure 11. Comparison of the results by flexibility method and elastic center method respectively

图 11. 力法和弹性中心法的计算结果的比较

### 3.2. 拱轴线的选择原则<sup>[12]</sup>

拱轴线的选择原则是: 尽可能降低荷载作用下主拱的弯矩值<sup>[12]</sup>, 最好使主拱仅受压, 或者弯曲应力与压缩应力相比非常小<sup>[13]</sup>。

### 3.3. 三种拱轴线形<sup>[12]</sup>

拱轴通常有三种线形<sup>[12]</sup>:

- 1) 圆弧线——15 m~20 m 石拱桥、拱上腹拱;
- 2) 抛物线——轻型拱桥, 或中承式拱桥;
- 3) 悬链线——最常用的拱轴线。

### 3.4. 合理拱轴线的微分方程

例如主拱如果恰好处处截面仅受压, 则受力分析简图就可简化为上图 12 的三铰拱。图 12 中  $g_x$  是任意分布在主拱拱轴上的竖向荷载。图 12 中拱桥的跨径的一半记为  $L$ ,  $L$  的具体说明见图 13。

拱轴任意截面斜率为:  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$ , 任意截面需要满足恒载压力线  $\tan \varphi' = \frac{Q_x^0}{H_g}$ , 才能保证拱截面上只有轴力。

根据  $y$  方向合力为 0,  $Q_x^0 = V_g - \int_x^L g_x dx$ 。

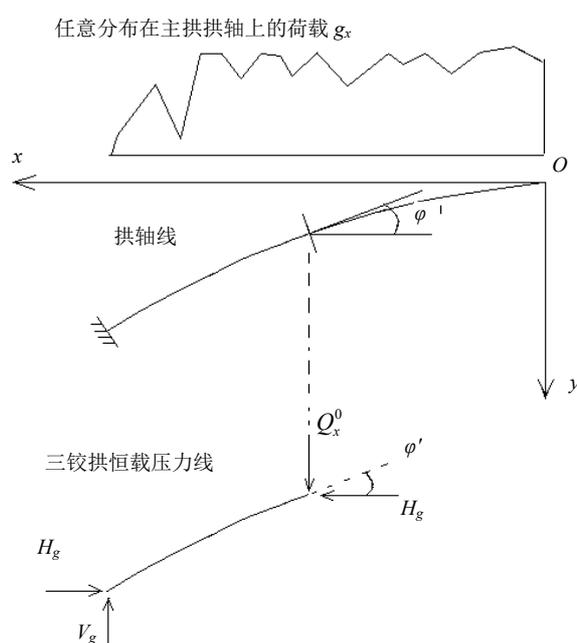


Figure 12. Three-hinged arch dead load thrust line and rational arch axis<sup>[14]</sup>

图 12. 三铰拱恒载压力线和合理拱轴线<sup>[14]</sup>

因为  $\tan \varphi = \tan \varphi'$ ，所以： $\frac{dy}{dx} = \frac{Q_x^0}{H_g}$ 。微分一次，

得合理拱轴微分方程： $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{g_x}{H_g}$ 。

### 3.5. 实腹拱合理拱轴线的微分方程

实腹拱在拱桥拱圈上腹部两侧填实土壤或粒料后铺装路面。在图 13 中，假定  $g_d$  代表铺装路面和拱圈的恒载集度， $\gamma$  代表拱圈上腹部两侧填实土壤或粒料的重度。则  $\gamma$  可表示为  $\frac{g_j - g_d}{f}$  [14]。

图 13 的拱轴线应该满足图 12 推导的合理拱轴微分方程 [14]。图 12 中的  $g_x$  在图 13 中是  $g_x = g_d + \gamma y$ 。

把  $g_x$  代入合理拱轴微分方程，得到图 13 实腹拱在恒载下的控制微分方程

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{g_d}{H_g} \left[ 1 + (m-1) \frac{y}{f} \right] \quad [14]$$

根据数学逻辑推导以及图 13 的物理边界条件，求解控制微分方程，得到图 13 的拱圈应该满足悬链线拱轴线方程，方程形式如下 [14]：

$$y = \frac{f}{m-1} (chK\xi - 1) \quad (35)$$

式中 [15]： $f$  是矢高。 $g_j$  是拱脚恒载集度。 $g_d$  是拱顶恒载集度。 $m$  是拱轴系数，且  $m = g_j/g_d$ 。

$K = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1})$ ， $\xi = 2x/L$ 。拱顶坐标原点是  $O$ 。

$L$  是跨径的一半。

方程(35)的具体形式是：

$$y = \frac{f}{m-1} \left( ch \left( \frac{2x}{L} \ln(m + \sqrt{m^2 + 1}) \right) - 1 \right) L \quad (36)$$

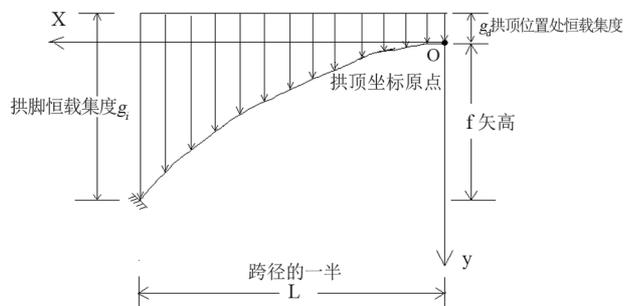


Figure 13. Dead Load on spandrel-filled arch axis and analysis scheme to obtain rational arch axis  
图 13. 实腹拱的恒载分布和合理拱轴的计算图

式中 [15]： $x$  是图 13 中主拱在  $O_x$  坐标系中的  $x$  坐标。

在拱桥的初始具体设计中，方程(36)的  $f$  和  $L$  一般根据建筑需要确定。拱轴系数  $m$  需要根据主拱上的荷载以及拱轴线尽量吻合压力线来确定。这样可以使主拱仅受压，或者弯曲应力与压缩应力相比非常小，达到安全经济的设计拱桥的目的。

### 3.6. 大中跨径的拱桥的拱轴线性

目前大中跨径的拱桥都普遍采用悬链线拱轴线性，采用悬链线拱轴线对空腹式拱桥主拱受力是有利的 [12]。

### 3.7. 跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的拱轴线初始设计

跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥长 323 m (图 1 和图 2) 属于特大桥。因为目前大中跨径的拱桥都普遍采用悬链线拱轴线性，采用悬链线拱轴线对空腹式拱桥主拱受力是有利的 [12]。

跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥长 323 m (图 1 和图 2) 明显属于空腹拱桥，因此此桥如果采用悬链线拱轴线性是比较合理的。

### 3.8. 跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的材料选择

1900 年以前，拱桥主要采用石材。1900 年以后，拱桥的制造材料主要从石材，混凝土和钢材中选取。此后钢材逐渐成为大跨度拱桥的较经济的制造材料 [16]。

### 3.9. “五点重合法” (跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的悬链线拱轴线的具体设计) 与恒载下的初始拱轴线确定

对于图 14 的上承式混凝土拱桥主拱，可以在对应的悬链线三铰拱计算简图的基础上，反复调整方程 (36) 的拱轴系数  $m$  [14]，使图 14 的上承式混凝土拱桥主拱在尽可能多的几个关键点位置处仅有轴压力，这样就可以近似保证图 14 的上承式混凝土拱桥主拱主拱仅受压，或者弯曲应力与压缩应力相比非常小 [13]。

前文说明，跨越连接美国亚利桑那州和内华达州

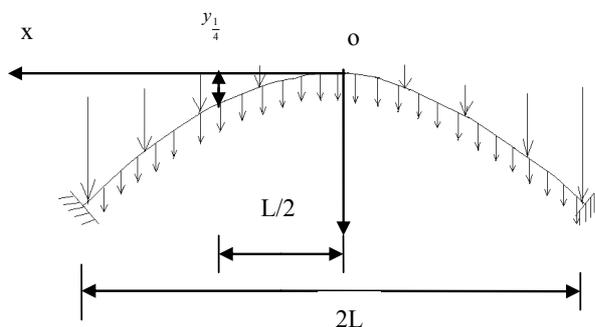


Figure 14. Structural Analysis Scheme for the arch axis of the new Mike O'Callaghan Pat Tillman Memorial Bridge at Hoover Dam (dead load including arch rib selfweight and load transmitted through posts from the deck)

图 14. 跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥主拱的计算简图(包括自重恒载和桥面板通过立柱传来的恒载)

黑峡谷的上承式混凝土拱桥采用悬链线拱轴线形是比较合理的(图 1 和图 2)。如果跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥采用悬链线拱轴, 可以使用“五点重合法”来确定拱轴悬链线的具体参数。“五点重合法”就是使悬链线拱轴线接近其恒载压力线, 即要求拱轴线在全拱有 5 点(拱顶, 拱脚和 1/4 点)与其三铰拱恒载压力线重合。这里的三铰拱恒载压力线(图 12)是根据全拱只有轴力(没有弯矩和剪力)的情况下得出的拱轴线。需要注意的是: 如果图 14 的拱轴线就是恒载压力线, 那么图 14 就可按照三铰拱进行分析计算。

### 3.10. “五点重合法”的具体计算过程<sup>[14]</sup>(以跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的初始拱轴线的确定为例)

图 15(a)是跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的所受恒载的图示。假设主拱的受力和几何形状对称。

因为假设图 15(a)主拱在恒载作用下各个截面仅承受轴压荷载, 所以拱顶 - 拱脚主拱段的受力分析如图 15(b)所示。其中  $N_g$  垂直于截面。 $H_g$  垂直于截面。图 15(c)是拱顶 - 1/4 点主拱段的受力分析图, 类似于图(b), 杆端力是轴力, 垂直于截面。

根据参考文献[14]:

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{f}{y_{1/4}} - 2 \right)^2 - 1 \quad (37)$$

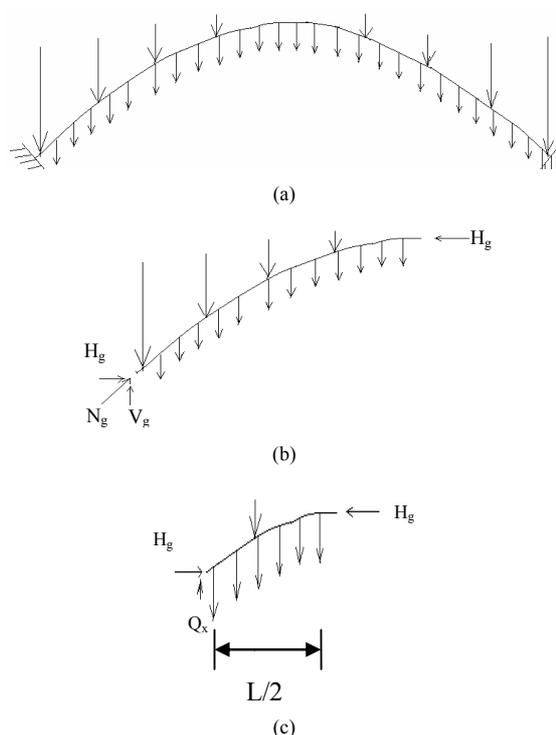


Figure 15. Five-point coincidence method to obtain the rational arch axis (Take the New Mike O'Callaghan Pat Tillman Memorial Bridge at Hoover Dam as an example): (a) Dead load on the arch axis; (b) Structural analysis for from-Arch-Crown-to-Arch-springing segment of the arch axis; (c) Structural analysis for from-arch-crown-to-one-fourth-of-the-arch-span-point segment

图 15. “五点重合法”的具体计算过程(以跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥的初始拱轴线的确定为例): (a) 主拱所受恒载; (b) 拱顶 - 拱脚主拱段的受力分析; (c) 拱顶 - 1/4 点主拱段的受力分析

方程(37)中  $f$  是矢高。 $y_{1/4}$  是图 12 和图 14 中  $O_x$  坐标系  $x = L/2$  坐标位置处也就是拱跨径四分之一长度位置处与  $O_x$  坐标轴的竖向距离。

根据参考文献[14], 对图 15(b)和(c)分别列出力偶平衡方程  $\sum M = 0$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} H_g &= \frac{\sum M_j}{f} \\ H_g &= \frac{\sum M_{1/4}}{y_{1/4}} \\ \frac{y_{1/4}}{f} &= \frac{\sum M_{1/4}}{\sum M_j} \end{aligned} \quad (38)$$

$\sum M_{1/4}$  和  $\sum M_j$  分别是跨径的 1/4 段和 1/2 段内的作用在主拱上的竖向恒载产生的力矩。

在拱桥的初始具体设计中, 方程(36)的  $f$  和  $L$  一

般根据建筑需要就可以确定。但是最终确定方程(36)还需要确定拱轴系数  $m$ 。 $m$  决定悬链拱轴线的陡缓<sup>[14]</sup>。

下面假定  $f$  和  $L$  根据建筑需要已经确定, 下面讨论如何确定  $m$  值。

根据建筑使用要求或者美学考虑, 可以随机选择一个  $y_1$  值, 根据方程(37)可计算出一个拱轴系数  $m_0$ 。

但是从结构安全经济的目的出发, 拱轴系数  $m$  需要根据主拱上的荷载以及拱轴线尽量吻合压力线来修正  $m_0$ , 以便确定最终合理  $m_F$  值。

修正  $m_0$  的方法就是根据最初选定的  $m_0$  值完全确定初始拱轴线的位置, 然后根据图 15 中作用在主拱上的竖向恒载以及方程(38)来确定  $y_1$ , 再根据确定的  $y_1$  值和方程(37)来确定新的  $m$  值, 不断迭代, 直到迭代前的  $m$  值和迭代计算后的  $m$  值不再有差异, 最后得到合理的  $m_F$  值。

### 3.11. 初始设计和最终设计拱桥所受荷载

初涉设计主拱仅受恒载(dead load), 最终设计时应验算拱桥在恒载, 活载, 温度应力, 地震等荷载下的安全系数<sup>[13,15]</sup>。

## 4. 讨论

### 4.1. 进行无铰拱的固端支座发生转角位移时杆端内力的计算的意义

无铰拱的固端支座发生转角位移时杆端内力的计算是为了最终对图 1 或者图 3 的结构进行有限元分析<sup>[5,17]</sup>。如果实际无铰拱结构的拱脚认为是弹性固定在地基上, 那么弹性固定的意思也就是当拱脚发生转角位移或者水平位移或者竖直位移时, 地基也会随同拱脚发生相应的变形, 并且施加给拱脚相应的弹性抗力<sup>[7,18,19]</sup>。

### 4.2. 上承式混凝土拱桥的初始拱轴线的 设计原则

上承式混凝土拱桥的初始设计是一个关键问题, 初始拱轴线的选择原则是: 尽可能降低恒载作用下主拱的弯矩值<sup>[12]</sup>, 最好使主拱仅受压, 或者弯曲应力与压缩应力相比非常小<sup>[13]</sup>。

### 4.3. “五点重合法”的应用范围和局限性

方程(36)源于对图 13 所示的实腹拱桥的合理的初始拱轴线的设计<sup>[14]</sup>, 可以保证恒荷载下实腹拱桥主拱拱圈处处受压。

但对于空腹拱桥(例如跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥)直接就使用悬链线<sup>[12]</sup>方程(36)以及使用五点重合法<sup>[14]</sup>来设计合理的初始拱轴线, 在恒载作用下仅能保证空腹拱桥的主拱在五点位置处受压, 其他截面的内力分布情况还需进行进一步计算或者通过电测法来测量。

## 5. 结论

为了对主拱拱脚位置处弹性固定在地基上的无铰拱结构进行有限元分析, 需要首先确定拱固端支座发生转角位移时内力的计算公式。

应用力法和弹性中心法得到了拱固端支座发生转角位移时内力的计算公式。两种计算结果基本完全一致。

上承式混凝土拱桥的初始设计是一个关键问题, 初始拱轴线的选择原则是: 尽可能降低荷载作用下主拱的弯矩值, 最好使主拱仅受压, 或者弯曲应力与压缩应力相比非常小。以跨越连接美国亚利桑那州和内华达州黑峡谷的上承式混凝土拱桥为例, 通过“五点重合法”分析了如何合理的设计初始拱轴线。

## 6. 致谢

论文得到了辽宁工程技术大学科研启动基金资助(11-415), 在此表示诚挚的谢意。论文的发表得到了汉斯出版社(Hans Publishers)《土木工程》期刊编辑部的大力支持, 在此表示诚挚的谢意。

## 参考文献 (References)

- [1] A. Audenaert, H. Peremans and G. Reniers. An analytical model to determine the ultimate load on masonry arch bridges. *Journal of Engineering Mathematics*, 2007, 59(3): 323-336.
- [2] A. De Zotti, C. Pellegrino and C. Modena. A Parametric Study of the Hanger Arrangement in Arch Bridges. ARCH'07, 5th International Conference on Arch Bridges, Madeira: Multicomp, Lda Publishers, 2007: 475-482.
- [3] A. Audenaert, J. Beke. Applicability analysis of 2D-models for masonry arch bridge assessment: Ring, Archie-M and the elastoplastic model. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, 2010, 5(4): 221-230.
- [4] D. Goodyear, R. Turton. The new Mike O'Callaghan Pat Tillman

- Memorial Bridge at Hoover Dam. Proceedings of the 6th International Conference on Arch Bridges, 11-13 October 2010.
- [5] 王国鼎. 拱桥连拱计算[M]. 北京: 人民交通出版社, 1983.
- [6] T. Marcher, M. John and M. Ristic. Determination of load-sharing effects in sprayed concrete tunnel linings. Underground Construction 2011 Conference and Exhibition-Incorporating the International Tunnelling Exhibition, London: Earls Court, 29-30 June 2011.
- [7] 重庆建筑工程学院, 同济大学, 哈尔滨建筑工程学院, 天津大学. 岩石地下建筑结构[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1979.
- [8] 朱伯钦, 周竞欧, 许哲明. 结构力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1993.
- [9] 龙驭球. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
- [10] 重庆大学土木工程学院. 用弹性中心法计算对称无铰拱[URL]. <http://wenku.baidu.com/view/adc6b908581b6bd97f19ea2b.html>
- [11] 百度百科. 桥梁[URL]. <http://baike.baidu.com/view/113819.htm>
- [12] 重庆交通大学土木建筑学院. 上承式拱桥 - 拱桥计算[URL]. <http://courses.cqjtu.edu.cn/kcjs/bridge2/课件/第二章第三节拱桥计算 1.ppt>
- [13] F. Fox. Arch bridges. In: W. Chen, L. Duan, Eds., bridge engineering handbook. Boca Raton: CRC Press, 2000.
- [14] 河北工业大学. 桥梁工程课件[URL]. <http://wenku.baidu.com/view/e427662b3169a4517723a37c.html>
- [15] 罗初. 桥梁工程导论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.
- [16] G. S. Richardson (deceased). Richardson, Gordon and Associates, Pittsburgh. "Arch Bridges" in Structural Steel Designer's Handbook. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [17] 黄文熙. 拱坝、壳体及平板的结构分析[A]. 黄文熙. 水工建设中的结构力学与岩土力学问题[C]. 北京: 水利电力出版社, 1984: 43-62.
- [18] doc88.com. 半拱形结构计算[URL]. <http://www.doc88.com/p-294365944745.html>
- [19] 浙江海洋学院. 船舶结构力学: 4.3 弹性固定端与弹性支座的实际概念[URL]. <http://cbjg.jpkc.cc/cbjg/showindex/247/101>