Hans Journal of Civil Engineering 土木工程, 2014, 3, 141-147
Published Online September 2014 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjce
http://dx.doi.org/10.12677/hjce.2014.35017

Hans汉斯

Finite Element Analysis of Static Geometry Nonlinear about Cantilever Beam

Pei Luo, Jianwei Tian

National Engineering Laboratory for Fiber Optic Sensing Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan
Email: zhaojx_2001@126.com

Received: Jul. 12th, 2014; revised: Aug. 10th, 2014; accepted: Aug. 20th, 2014

Abstract

The finite element model of geometry nonlinearity about cantilever has been introduced in this paper. The relation of strain-stress about cantilever has been deduced (in range of linearity). Based on this, using finite element analysis soft, the static geometry nonlinearity of cantilever beam structure has been finitely analyzed. The study finds that the existing strain-stress relation is not linear relation when the cantilever beam structure shows the geometry nonlinearity after receiving large deformation, but is nonlinearity, and that the theoretical derivation must be computed by using nonlinear system of equations. But the solution of nonlinear equations can use increment means of large distortion question, which is T.L means (Lagrange means).

Keywords

Cantilever Beam, Concentrating Load, Geometry Nonlinearity, Finite Element Analysis

悬臂梁静态几何非线性的有限元分析

罗　裴，田建伟

武汉理工大学光纤传感技术国家工程实验室，武汉
Email: zhaojx_2001@126.com

收稿日期：2014年7月12日；修回日期：2014年8月10日；录用日期：2014年8月20日

摘　要

介绍了悬臂梁几何非线性的有限元模型，并对悬臂梁的应力应变关系进行了推导(在线性范围内)，在此基础上，利用有限元分析软件，对悬臂梁结构的静态几何非线性进行了有限元分析，研究发现，当悬臂梁结构在受到大变形而出现几何非线性时，现有的应力应变关系不再呈线性关系，而是呈现非线性，其理论推导必须采用非线性方程组来计算，而非线性方程组的求解可采用大变形问题的增量法——T.L法(拉格朗日法)。

关键词

悬臂梁，集中载荷，几何非线性，有限元分析

1. 引言

几何非线性问题是不采用小位移假设，从几何上严格分析单元体的尺寸、形状变化，得到非线性的几何运动方程，由此造成基本控制方程的非线性问题。对于小变形问题的研究已经趋于成熟[1] [2]，而结构在受到大载荷的时候，将出现几何非线性，几何非线性的求解比较复杂，但在日常生活中经常遇到。

引起结构非线性行为的原因很多，主要有以下三种原因[3]：几何非线性、材料非线性、状态非线性。悬臂梁的几何非线性问题是指悬臂梁在平面内的大位移和大转动问题。在研究这类问题时，除了要考虑应变-位移的非线性关系外，还要考虑悬臂梁的基本特征是随变形而变化的，所以，平衡方程应建立在变形后的位置上。若仍用变形前的几何位置来描述，将不能反映梁的真实变形情况。但是，由于变形后的位置是未知的，这就给处理梁的几何非线性问题带来了一定的复杂性。

有限元分析是用于结构分析的有力工具[4]，它能对结构进行理论上的初步模拟，并得出与实际检测结果接近的理论结果，这些结果对后续的实验起着指导作用，因此，要得到理想的实验数据，必须首先进行有限元分析，根据理论模型，设计实验方案，从而获得理想的实际结果。

本文为了获得悬臂梁结构受到静态集中力的作用而产生非线性现象，采用 Analysis2013 进行有限元模拟，从而获得悬臂梁的非线性应变分布图，这将为悬臂梁的非线性损伤检测奠定理论基础，对后续的损伤实验起指导性作用。

2. 悬臂梁几何非线性有限元模型

当物体产生大变形时，代表所研究的点的微小体元在变形的同时可能产生较大的刚性旋转和刚性平移。为了度量大变形物体的变形状态，必须更精确地研究物体的变形。几何非线性问题不仅几何方程不同，而且由于产生大变形，应力和应变需重新定义，本构方程、平衡方程或虚功方程需按重新定义的应力和应变表示。几何非线性有限元法可以仿照线性弹性有限元法，进行离散化并选取单元位移函数后，按几何方程、本构方程和能量原理，建立以节点位移为基本未知量的非线性有限元方程。在几何非线性有限元法[3] [5]中，可以按 Euler 描述，也可以按 Lagrange 描述，一般情况下，Lagrange 描述用于固体力学问题，因此，本文采用 Lagrange 描述。

以初始构形为参考构形，将初始构形进行有限单元离散，选用固定不动的直角坐标系。在大变形情况下，Green 应变 E 可分解为线性和非线性两部分之和

$$E = E_L + E_N \tag{1}$$

式中，E_L 为线性应变，E_N 为非线性应变。其中，

$$E_L = B_L d^e \tag{2}$$

$$E_N = \bar{B}_N d^e \tag{3}$$

式中，d^e 为单元节点位移矢量，矩阵 B_L 是 Green 应变线性部分与单元节点位移之间的转换矩阵。

将(2)、(3)两式代入(1)式，得

$$E = \left(B_L + \bar{B}_N\right) d^e = \bar{B} d^e \tag{4}$$

式(4)给出 Green 应变和单元节点位移矢量之间的关系，包含非线性项，故 Green 应变矢量和单元节点位移矢量之间是非线性关系。应用虚功原理，将 Green 应变式(4)两边同时变分，可得

$$\delta E = B \cdot \delta d^e \tag{5}$$

其中，$B = B_L + B_N$。

将(5)式代入由 Green 应变和 Kirchhoff 应力表述的虚功方程，整理得离散系统的平衡方程为

$$\psi\left(d\right) = \int_{V_0} B^T \cdot S\mathrm{d}V_0 - F = 0 \tag{6}$$

式中，F 为有限元离散系统的外力等效节点力。上式即为有限元系统的位移形式的平衡方程组。若用矩阵形式表示，则为

$$K_T^e \cdot dd^e = F^e \tag{7}$$

$$K_T^e = K_{DL}^e + K_{DN}^e + K_S^e$$

式中，K_T^e 即为单元的切线刚度矩阵，为对称矩阵。K_{DL}^e 是小位移刚度矩阵，K_{DN}^e 是由大位移引起的，称为初位移矩阵或大位移矩阵，矩阵 K_S^e 是由于应力状态 S 引起的切线刚度，通常称为几何矩阵或初应力矩阵，F^e 为单元外部荷载的等效节点力。

有限元非线性方程组的求解过程是一个非常复杂的过程，可采用大变形问题的增量法——拉格朗日法(即 T.L 法)来求解，T.L 法是一个复杂的过程，在此不多赘述。

3. 悬臂梁应力-应变关系的理论计算

在悬臂梁上粘贴应变片。h 代表梁的厚度，b 代表应变片所在位置宽度，X 代表应变片中心距离自由力端的距离，L 表示单臂梁自由端到固定端的距离。悬臂梁的材料为不锈钢，弹性模量在 196~216 Gpa 之间，故取弹性模量 $E = 210\ \text{Gpa}$。由材料力学[6]可知：悬臂梁的抗弯截面系数

$$W = \frac{bh^2}{6} \tag{8}$$

贴应变片位置的弯矩为

$$M = \frac{FLX}{L} = FX \tag{9}$$

贴应变片位置的应力为

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6FX}{bh^2} \tag{10}$$

式中，F 为悬臂梁的受力，L 为受力点到固定端的距离，b 为梁截面的宽，h 为梁截面的高。

贴应变片位置的应变为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{11}$$

□□综合上面各式有：

$$\varepsilon = \frac{6FX}{bh^2 E} \tag{12}$$

这就是悬臂梁的应变计算公式，由上式可知，当悬臂梁为等截面梁时，受力位置固定时，悬臂梁的应变只与待计算位置有关，即应变与悬臂梁上各点的位置坐标呈线性关系。而当悬臂梁呈几何非线性时，这种关系将被打破，应变位置将发生变化，不能再应用这种关系来计算悬臂梁的应变。要详细了解悬臂梁的应变分布状况，采用有限元软件对悬臂梁进行分析，可以得到悬臂梁的整体应变分布状况。

悬臂梁发生大变形时，其应力应变也将发生大的变化，此时不能再采用前面的计算线性范围内的公式，而应该采用非线性方程来计算应力应变之间的关系，即拉格朗日法。

4. 悬臂梁结构的有限元静态非线性模拟

悬臂梁结构是目前最常见的一种结构，并且计算简单，易于分析。本文针对具体的悬臂梁结构，对悬臂梁在受大载荷情况下的静态非线性特性进行了有限元模拟，待模拟的悬臂梁的基本尺寸如下：弹性模量: $E = 210\ \text{Gpa}$，泊松比：$\nu = 0.3$，长：400 mm，宽：70 mm，厚：2 mm。应用 ansys2013 进行有限元模拟，图 1~4 为悬臂梁的非线性静态分析，其临界屈曲载荷为：

$$F_0 = \frac{\pi^2 EI}{4D^2} = \frac{\pi^2 E \times \dfrac{Bh^3}{12}}{4D^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^{11} \times 0.07 \times 8 \times 10^{-9}}{12 \times 4 \times 0.4^2} = 144\,(\text{N}),$$

要进行悬臂梁的几何非线性的有限元分析，施加在悬臂梁端的荷载必须大于临界屈曲荷载，才能使悬臂梁呈非线性。采用有限元分析的悬臂梁的几何非线性所得到的结果如下各图。

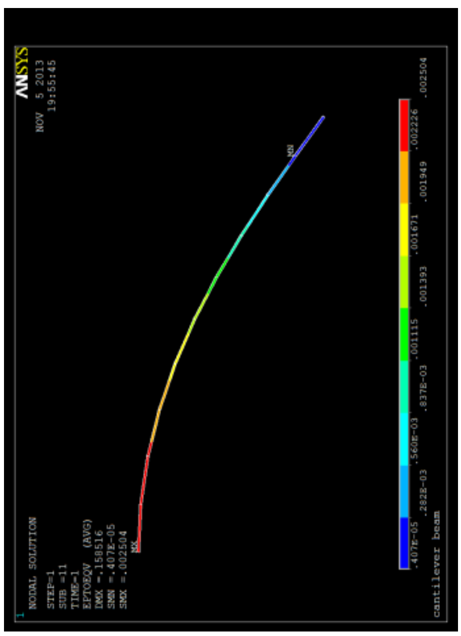

Figure 1. Distortion chart when cantilever beam supported stress is 150N
图 1. 悬臂梁受力为 150N 的变形图

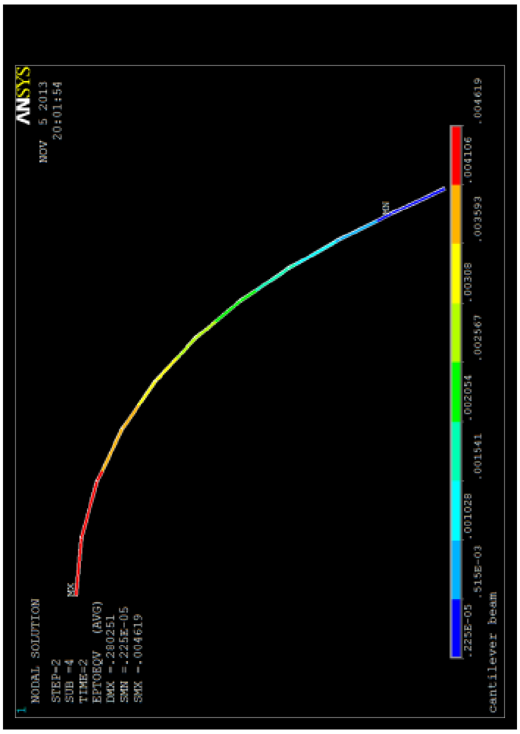

Figure 2. Distortion chart when cantilever beam supported stress is 170N
图 2. 悬臂梁受力为 170N 的变形图

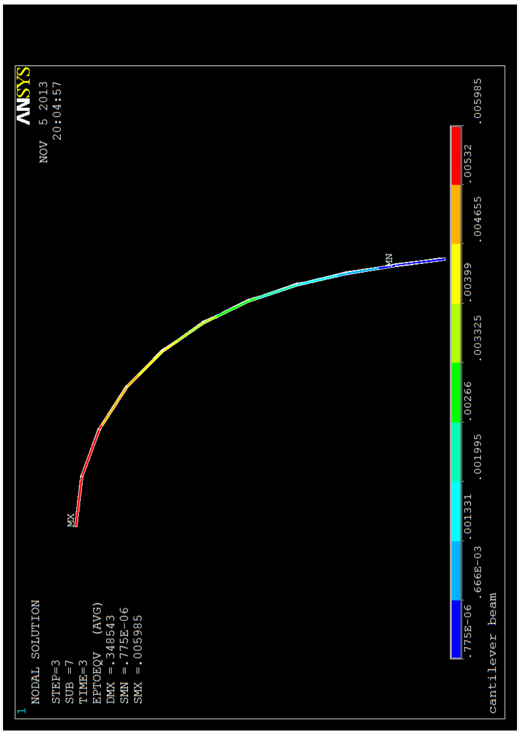

Figure 3. Distortion chart when cantilever beam supported stress is 190N
图 3. 悬臂梁受力为 190N 的变形图

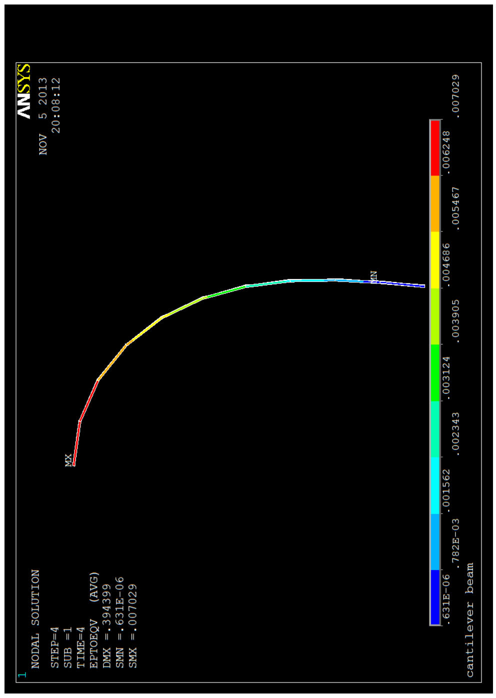

Figure 4. Distortion chart when cantilever beam supported stress is 210N
图 4. 悬臂梁受力为 210N 的变形图

由上述各图可知，悬臂梁在受到高于临界屈曲载荷时呈现非线性，随着载荷的增大，其非线性越明显，由此说明，线弹性结构在受到一定载荷时会呈现非线性。也就是说，悬臂梁结构的临界屈曲载荷是区分线性和非线性的分界点，悬臂梁结构受的载荷小于临界屈曲载荷，则悬臂梁结构所展示的应力应变关系呈线性关系，超过这个临界屈曲载荷，悬臂梁结构的应力应变关系呈非线性。因此，在研究悬臂梁的应力应变关系时，都是在其线性范围内进行(即受力小于临界载荷)。当受载超过临界载荷时，悬臂梁结构处于非线性状态，其应力应变关系不再呈线性关系，将随着结构非线性的出现而出现非线性(由上述各图可知)。因此，在静态受力的状况下，要想得到悬臂梁受力下的应力应变的非线性分布，采用有限元软件是一种好的方法，它可以形象的描绘出悬臂梁的应力应变的非线性分布，并能得到悬臂梁各点的应变值。

5. 结论

本文阐述了悬臂梁的几何非线性，并给出了悬臂梁的几何非线性的有限元模型，推导了悬臂梁的应力应变的理论计算过程，得到了线性范围内悬臂梁的应变与待测点的位置呈线性关系。采用有限元分析软件，模拟了悬臂梁在大载荷作用下的几何非线性的应力应变分布，此时，其应变不再与待测点的位置呈线性关系，而比在线性状况下有很大的变化，其待测点的位置发生了变化，不再为线性，而是呈弧形。因此，悬臂梁的非线性只有通过有限元软件进行分析，才能得到合适的结果。采用有限元分析软件对悬臂梁进行静态非线性的模拟的目的，是为了模拟悬臂梁在受到大载荷情况下的变形状况及其对应的应力应变分布状况，从而为后续的损伤实验奠定基础。

基金项目

国家自然科学基金青年基金(51308428)，武汉理工大学自主创新基金(2013-IV-027)。

参考文献 (References)

[1] 张家伟, 刘生纬, 吴亚平, 等 (2013) 考虑恒载效应对梁静力反应影响的有限元分析. *应用力学学报*, **5**, 762-767.

[2] 谢卿, 王弘 (2013) 氢致钢内部疲劳裂纹萌生和扩展的有限元分析. *北京科技大学学报*, **10**, 1313-1319.

[3] 凌道盛, 徐兴(2004)非线性有限元及程序. 浙江大学出版社, 杭州.

[4] 杨昕光, 迟世春 (2013) 基于非线性破坏准则的土坡稳定有限元上限分析. *岩土工程学报*, **6**, 1-7.

[5] 蒋友琼 (1988) 非线性有限元法. 北京工业学院出版社, 北京.

[6] 孙训方, 方孝淑, 关来泰 (1994) 材料力学(下). 高等教育出版社, 北京.