

基于Mindlin解的搅拌桩施工挤土效应预测分析

——上海某近地铁区间隧道工程案例

龚灵迪, 王自民, 孙久平

上海两港市政工程有限公司, 上海
Email: 191196247@qq.com

收稿日期: 2021年7月25日; 录用日期: 2021年8月9日; 发布日期: 2021年8月25日

摘要

水泥土搅拌桩是地基处理的常用方法。在大直径钻孔灌注桩成孔施工时, 为了防止坍孔, 以确保邻近地层稳定, 经常采用三轴水泥土搅拌桩对钻孔桩周围地层进行加固处理。但三轴水泥土搅拌桩沉桩施工因其高压注浆和快速钻进原因, 会对邻近土层产生挤压作用, 这种挤压作用将导致邻近土体的位移。为此, 需要根据邻近地铁区间隧道的运营维护要求, 适当控制搅拌桩的注浆压力和沉桩速度, 将搅拌桩的挤土不利影响降至最低程度。本文基于Mindlin理论, 采用理论解析的方法, 就三轴水泥土搅拌桩施工对邻近土体及邻近隧道的影响进行了公式推导和计算分析, 并将计算结果和试验监测结果进行了对比。本案例表明, 采用理论解析方法来预测搅拌桩的挤土效应具有快速方便的特点, 在搅拌桩施工参数选择决策中, 不失为一种有益的方法。

关键词

三轴水泥土搅拌桩, 挤土效应, Mindlin理论解, 土体位移

Squeezing Effect Prediction and Analysis of Tri-Axial Cement-Mixing Pile (TCMP) Based on Mindlin Equation

—A Case Study of a Project near the Subway Tunnel in Shanghai

Lingdi Gong, Zimin Wang, Jiuping Sun

Shanghai Lianggang Municipal Engineering Construction Co., Ltd., Shanghai
Email: 191196247@qq.com

Abstract

Tri-axial cement-mixing pile (TCMP) is a very common option for soil improvement. During pile driving of bored pile with large diameter, TCMP is often adopted in order to avoid caving of bored hole, and accordingly to ensure the safety of the neighbouring subway tunnel. But unfortunately, TCMP can also lead to rather large movement of surrounding soil due to the high grouting pressure and rapid boring speed when TCMP driving, which is called pile-driving's squeezing effect. To meet the requirement of the displacement of subway tunnel, it is necessary to control the grouting pressure and boring speed of TCMP in order to reduce the adverse effect to the minimum. Based on Mindlin Equation, this paper has derived the analytical formula of the displacement induced to TCMP driving and carried out relevant calculation, and finally, this paper has compared this calculation with the site measurement. This paper has shown that this analytical method, being fast and convenient, is a recommendable one in predicting the squeezing effect of TCMP driving, and is very helpful in selecting appropriate grouting pressure and boring speed of TCMP.

Keywords

Tri-Axial Cement-Mixing Pile (TCMP), Squeezing Effect of Pile-Driving, Mindlin Equation, Soil Movement

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在邻近地铁区间隧道区域进行大直径钻孔灌注桩施工时, 常常采用三轴深层水泥土搅拌桩预先加固钻孔灌注桩桩周地层, 以防止孔壁坍塌。但是, 三轴水泥土搅拌桩施工时喷浆压力大、下沉速度大, 挤土效应显著, 往往导致邻近地下管线和构筑物的损坏。因此, 针对三轴搅拌桩施工, 需要首先对其挤土效应进行预测, 为选择合适的喷浆压力及沉桩速度提供依据。

对于桩基施工及其它岩土施工活动如盾构(顶管)隧道掘进等的挤土效应, 预测分析的方法有很多, 其中基于 Mindlin 基本解[1]的理论解析方法具有快速易学的优点, 是最为常用的理论解析方法之一。至今, 采用此法的工程实践积累了较为丰富的研究成果。

魏刚, 徐日庆(2005)基于 Mindlin 基本解推导了盾构隧道掌子面荷载作用下土体的应力和位移计算公式, 提出了软土隧道盾构法施工引起的纵向地面变形预测的方法[2]; 许有俊等人(2019)针对土压平衡矩形顶管正面附加推力作用, 采用基于 Mindlin 基本解导出的土体位移公式, 对地表隆起变形影响进行了分析研究, 并提出了预测顶管施工过程地表隆起变形的的方法[3]; 秦世伟等人(2013)从 Mindlin 基本解导出了静压桩沉桩施工时小孔扩张应力下半无限体内任一点处的应力和位移计算公式, 并据此就静压桩沉桩施工对临近隧道的影响进行了分析研究, 提出了保护隧道的措施[4]; 谷冠恩(2019)针对钻孔灌注桩基桩施工全过程对临近地铁隧道土体扰动行为, 采用 Mindlin 基本解进行了研究, 在此基础上提出了控制孔壁坍塌的建议[5]。上述学者的研究方法为三轴深层水泥土搅拌桩施工的挤土效应预测分析提供了有益的借鉴。

本文依托上海浦东创新中路附近的某地铁二号线跨线桥工程，采用基于 Mindlin 基本解的理论解析方法就三轴水泥土搅拌桩施工的挤土效应进行研究，推导了三轴搅拌桩施工时邻近土体的位移计算公式，并以本工程作为案例进行计算分析。

2. 三轴搅拌桩施工挤土效应的 Mindlin 理论解析

2.1. Mindlin 弹性基本解公式

事实上，所谓 Mindlin 弹性解就是在 Boussinesq 解答的基础上推导出竖向或水平向荷载作用在半无限弹性体内部时，半无限体内任一点的应力与位移。图 1 为水平向荷载作用在半无限弹性体内部时 Mindlin 弹性解示意图。1936 年，Mindlin [1]得到了均匀各向同性体三维弹性方程的解。

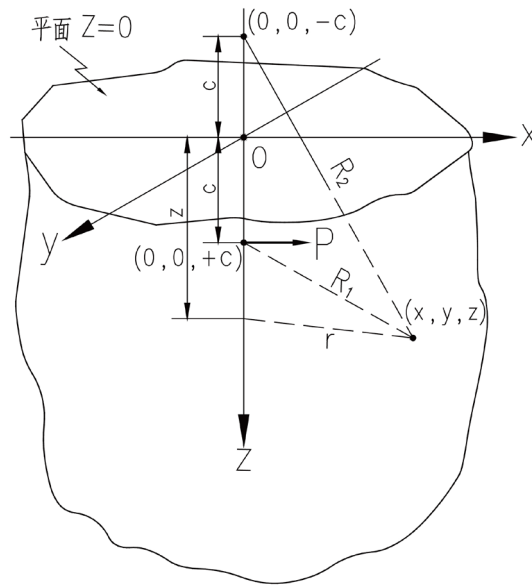


Figure 1. Sketch of Mindlin model
图 1. Mindlin 解模型示意图

$$\sigma_x = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} + \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] - \frac{6c}{R_2^5} \left[3c - (3-2\nu)(z+c) + \frac{5x^2z}{R_2^2} \right] \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R_2^3} + \frac{3(3-4\nu)y^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left[1 - \frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] - \frac{6c}{R_2^5} \left[c - (1-2\nu)(z+c) + \frac{5yz^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (2)$$

$$\sigma_z = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{1-2\nu}{R_2^3} + \frac{3(3-4\nu)(z+c)^2}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left[c + (1-2\nu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{1-2\nu}{R_2^3} + \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} + \left[1 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right] - \frac{6cz}{R_2^5} \left[1 - \frac{5x^2}{R_2^2} \right] \right\} \quad (4)$$

$$\tau_{yz} = \frac{Pxy}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{3(z-c)}{R_1^5} + \frac{3(3-4\nu)(z+c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left[1 - 2\nu + \frac{5z(z+c)}{R_2^2} \right] \right\} \quad (5)$$

$$\tau_{zx} = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{3x^3(z-c)}{R_1^5} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} + \frac{3(3-\nu)x^2(z+c)}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left[z(z+c) - (1-2\nu)z^2 - \frac{5xz(z+c)}{R_2^2} \right] \right\} \quad (6)$$

$$u_x = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left\{ \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{1}{R_2} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left[1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right] \right\} \quad (7)$$

$$u_y = \frac{Pxy}{16\pi G(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right\} \quad (8)$$

$$u_z = \frac{Px}{16\pi G(1-\nu)} \left\{ \frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right\} \quad (9)$$

式中, $R_1 = [r^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}}$, $R_2 = [r^2 + (z+c)^2]^{\frac{1}{2}}$;

c ——水平力作用点与土体表面的垂直距离(m);

z ——计算点与土体表面间的垂直距离(m);

x ——水平力作用点与计算点之间在 X 轴上的投影距离(m);

P ——水平集中力的大小(N);

G ——土体剪切模量(MPa), 可通过弹性模量 E 折算 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$;

ν ——土体泊松比。

2.2. 三轴水泥土搅拌桩挤土效应的 Mindlin 理论解析

2.2.1. 简化假定

三轴水泥土搅拌桩施工过程中, 喷浆压力和沉桩压力均会对桩侧土体产生压力。搅拌桩的挤土效应

实质上就是在半无限土体中作用了水平荷载，因此，可以采用 Mindlin 理论求解。图 2 为三轴搅拌桩 Mindlin 理论解析的模型示意图。

为了分析验算方便，特做如下简化假定：

- 1) 所研究的土体为各向同性线弹性体；
- 2) 喷浆压力和沉桩钻进压力合并成单一荷载考虑；
- 3) 三轴搅拌桩横截面等效成外包圆截面，每次加载段长度固定，为 d_1 ；
- 4) 假定搅拌桩施工过程荷载分段施加，位移场分段累加：前一阶段为后一阶段的初始位移场。

因此，求解某一段搅拌桩施工荷载对计算点的位移时，需要先按圆周对 Mindlin 理论解进行积分，然后对各段结果进行位移场叠加。

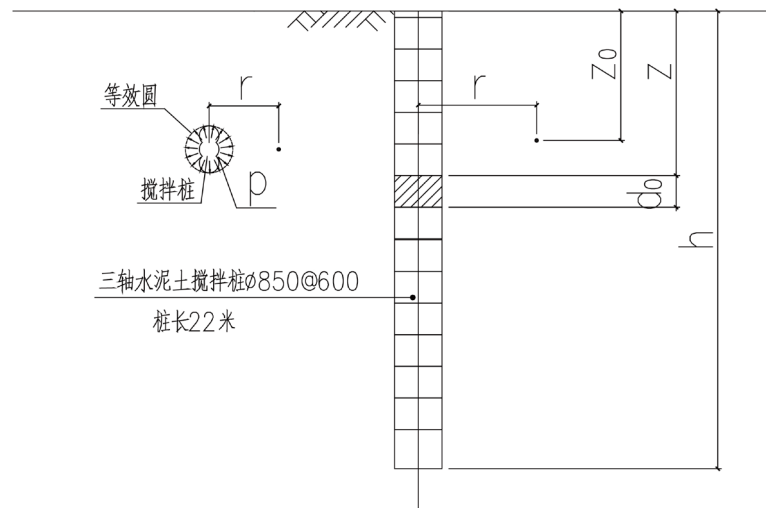


Figure 2. Mindlin model sketch of TMCP
图 2. 三轴搅拌桩 Mindlin 解模型示意图

2.2.2. 单段加载时的位移公式

先求算分段情况下的位移场。图 3 和图 4 为圆形桩与计算点的位置关系计算简图(俯视图)。综合图 3 和图 4， r 的计算在转角 θ 取任意值都可按式(10)计算。

$$r = \left(r_0^2 + (r_0 + r_1)^2 - 2(r_0 + r_1)r_0 \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

将式(7)、式(9)中的 x^2 替换为 $[(r_0 + r_1) \cos \theta - r_0]^2$ ，令：

$$R_1' = \left[r_0^2 + (r_0 + r_1)^2 - 2(r_0 + r_1)r_0 \cos \theta + (z - c)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$R_2' = \left[r_0^2 + (r_0 + r_1)^2 - 2(r_0 + r_1)r_0 \cos \theta + (z + c)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

设搅拌桩各加载段长度为 d_1 ，加载压力为 p ，则

$$dP = p \cdot d_1 \cdot r \cdot d\theta \quad (13)$$

将式(13)替换式(7)、式(9)中的 P ，并按圆周积分，可得某段加载对计算点的水平和竖向位移为：

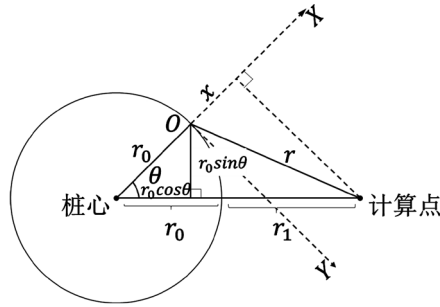


Figure 3. Calculation sketch at the interval $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$

图 3. $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 时计算简图

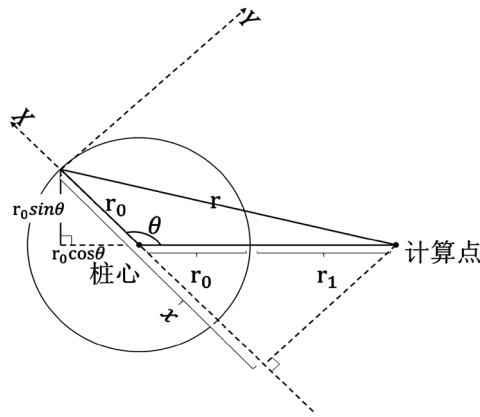


Figure 4. Calculation sketch at the interval $\theta \in [90^\circ, 270^\circ]$

图 4. $\theta \in [90^\circ, 270^\circ]$ 时计算简图

$$U_x(z) = \frac{p \cdot d_1 \cdot r}{16\pi G(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3-4\nu}{R_1'} + \frac{[(r_0+r_1)\cos\theta-r_0]^2}{R_1'^3} + \frac{1}{R_2'} + \frac{(3-4\nu)[(r_0+r_1)\cos\theta-r_0]^2}{R_2'^3} \right. \\ \left. + \frac{2cz}{R_2'^3} \left(1 - \frac{3[(r_0+r_1)\cos\theta-r_0]^2}{R_2'^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2'+z+c} \left[1 - \frac{[(r_0+r_1)\cos\theta-r_0]^2}{R_2'(R_2'+z+c)} \right] \right\} d\theta \quad (14)$$

$$U_z(z) = \frac{p \cdot d_1 \cdot r}{16\pi G(1-\nu)} \int_0^{2\pi} [(r_0+r_1)\cos\theta-r_0] \\ \cdot \left\{ \frac{z-c}{R_1'^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2'^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2'^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2'(R_2'+z+c)} \right\} d\theta \quad (15)$$

式中, d_1 ——搅拌桩的桩头加载段长度, 本工程取 0.5 m;

p ——搅拌桩的桩头荷载集度(Pa)。

从式(14)和式(15)可以看出, 邻近土体的水平向位移 $U_x(z)$ 和竖向位移 $U_z(z)$ 与等效圆圆周上的压力 p 密切相关, 也与施工时加载段长度 d_1 有关。而加载段长度 d_1 是由搅拌桩机械设备决定的, 为一定值, 即一旦施工设备确定, 则加载段长度 d_1 也即确定。所以, 控制邻近土体的水平向位移 $U_x(z)$ 和竖向位移

$U_z(z)$ 只要控制压力 p 就行了。

所以 Mindlin 理论解可以十分方便地匡算出搅拌桩挤土效应(即邻近土体的水平向位移 $U_x(z)$ 和竖向位移 $U_z(z)$)，以此作为依据，调整相应的注浆压力和沉桩速度，以达到确保周边环境安全之目的。

2.2.3. 整桩施工时的位移公式

将搅拌全过程切分为不同个小阶段，每个阶段产生的位移场成为下一阶段的初始位移场。整个过程在土体内确定一点产生的位移可以表示为：

$$u_{total} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_i + \dots + u_n \tag{16}$$

式中， u_i 为每个小阶段喷浆压力对确定一点土体造成的位移；

n ——划分的小阶段数目。

3. 案例分析

3.1. 工程概况

计算案例依托于上海市浦东新区创新中路某跨线桥工程[6] [7] [8]。该桥跨越正在运营的地铁 2 号线区间隧道，跨线桥的桥墩桩基采用钻孔灌注桩。为防止钻孔灌注桩成孔施工时发生坍塌，先采用三轴水泥土搅拌桩对钻孔灌注桩区域的地层进行地基加固，三轴搅拌桩直径 850 mm，加固深度 22 m。搅拌桩和区间隧道最小距离为 2.83 米。桩基与盾构隧道位置关系如图 5 所示。

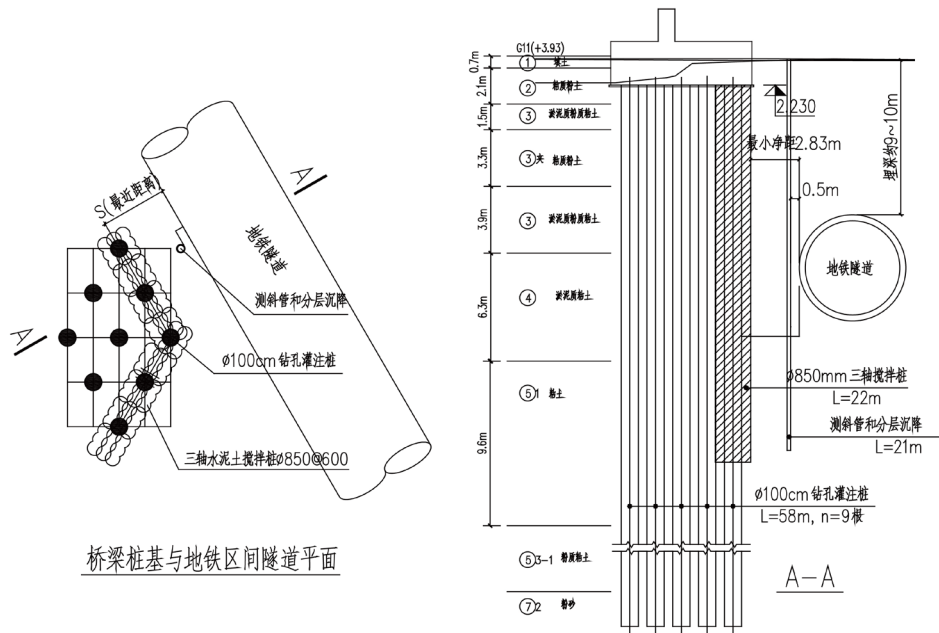


Figure 5. Subway tunnel and pile foundation of bridge
图 5. 桥梁桩基和地铁隧道的位置关系

3.2. 地质参数

地基土土层自地面而下分布如下：① 填土，② 粉质黏土，③ 淤泥质粉质黏土，④ 夹层粉质黏土，⑤ 淤泥质粘土，⑥ 1 粘土，⑦ 3-1 粉质黏土，⑧ 3-2 粘质粉土，⑨ 3-3 粉质黏土，⑩ 3-4 粉质黏土夹粉性土，⑪ 2 粉砂，⑫ 1 粉质黏土，⑬ 2-1 粉质黏土粉砂互层。

各层土的计算参数如表 1 所示。

Table 1. Properties of soils for Mindlin equation
表 1. 土层的主要计算参数一览表

土层	厚度(m)	重度(kN/m ³)	弹性模量(E/MPa)	泊松比 μ
② 层粉质黏土	1.7	18.50	30	0.4
③ 层淤泥质粉质黏土	5.1	17.8	10	0.45
③ 夹层粉质黏土	4.1	18.3	35	0.35
④ 层淤泥质粘土	6.7	16.8	7	0.5
⑤ 1 层粘土	9.0	18.9	35	0.30
⑤ 3-1 层粉质黏土	23.5	18.6	40	0.30
⑦ 2 层粉砂	7.1	20.1	45	0.25

3.3. 现场量测

为了了解三轴搅拌桩施工对邻近土体的影响，施工期间在邻近隧道边缘布置了测斜管，以便获得深层土体的水平位移。测点布置如图 6 所示。测斜管深度为 22 米，距离隧道外缘 0.5 m。

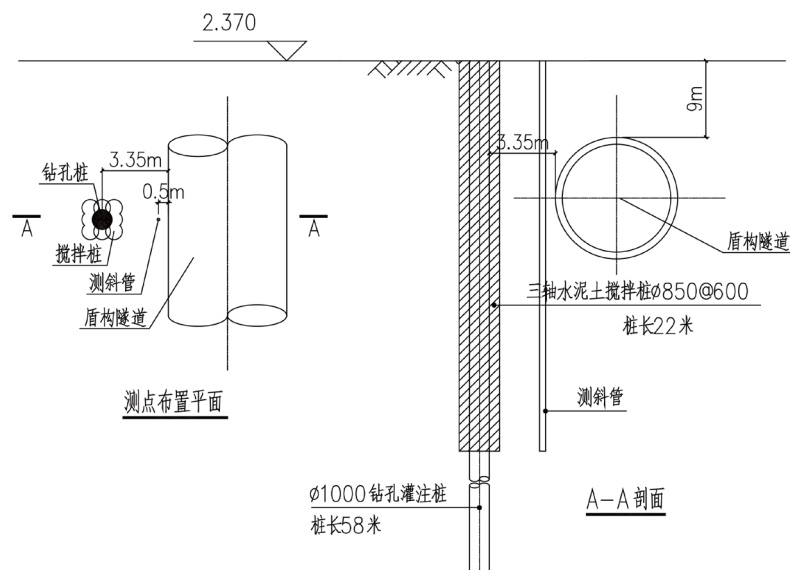


Figure 6. Layout of inclinometer casing
图 6. 测斜管布置示意图

3.4. 计算结果及其分析

根据荷载情况、土层情况，按式(13)和(14)采用 Mathcad 软件或 Matlab 软件编程计算，可得测斜管水平位置沿深度的水平位移和竖向位移。计算时土层弹性模量及泊松比取值如表 1 所示。

3.4.1. 搅拌桩施工导致邻近土体的水平位移

计算得到搅拌桩施工对邻近土体的水平位移和现场实测水平位移，如图 7 所示。结果表明，计算值在 4 m 埋深处达到最大值 3 mm，实测值也在大致深度处达到最大值 4.7 mm。位移变化规律是：理

论分析与现场实验相比，位移沿深度变化趋势相同，位移峰值点出现在较浅层土体(0~5 m)处。理论解得出的峰值位移偏小，可能是理论计算时选取的喷浆压力偏小所致。

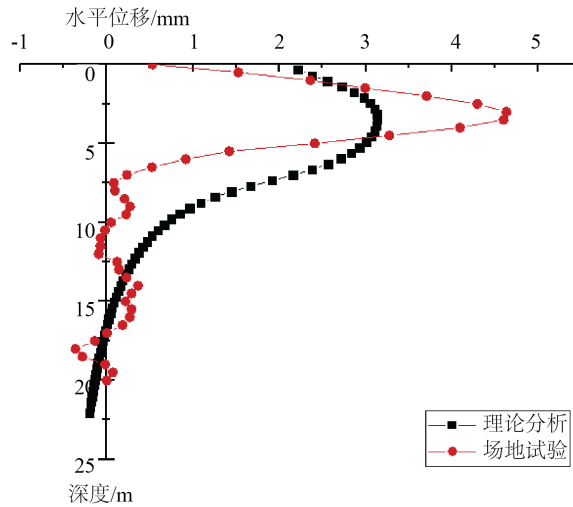


Figure 7. Horizontal displacement of surrounding soil induced to TMCP driving
图 7. 搅拌桩施工导致邻近土体的水平位移

3.4.2. 搅拌桩施工导致邻近土体的竖向位移

计算得到搅拌桩施工对邻近土体的竖向位移，如图 8 所示。结果表明，在浅层土体表现为土体隆起，随深度增加，位移减小，直至反向达到峰值，随后沉降又逐渐减弱。

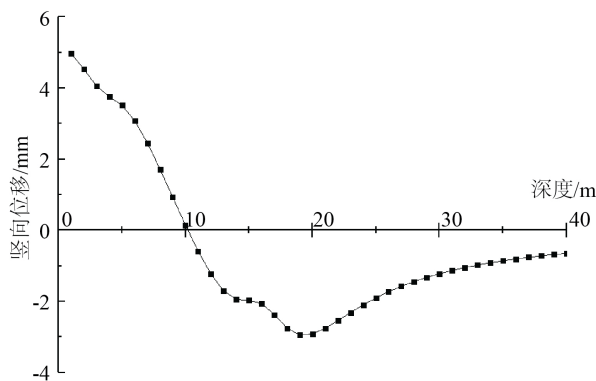


Figure 8. Vertical displacement of surrounding soil induced to TMCP driving
图 8. 搅拌桩施工对土体竖向位移影响

3.4.3. 计算结果讨论

Mindlin 基本解是在假定土体为各向同性的线弹性体基础上获得的，其解答适合于小变形情况。实际上土体是各向异性的弹塑性体，因此采用 Mindlin 公式得到的计算结果是近似的。

由于三轴搅拌桩施工对土体的扰动是在深层土体中发生的，总体上符合小变形假定。对于变形相对微小(即实际变形远小于结构如隧道的尺寸)情况，只要土层参数准确，计算结果的误差在工程允许范围内，其结论对于施工参数的初步选择仍具有指导意义，有助于快速了解注浆压力及沉桩速度对邻近土体位移

的影响程度。

4. 结论

1) 搅拌桩施工时的挤土效应本质上就是施工过程中在大地半无限体内某一区域作用了分布荷载, 因此, 可以采用 Mindlin 解来预测邻近土体的位移;

2) 三轴搅拌桩的荷载效应计算时假定在其外包等效圆周上作用了径向分布力 p , 然后依此对 Mindlin 公式进行积分得到搅拌桩施工全过程中邻近土体的位移;

3) 尽管 Mindlin 解是在各向同性线弹性体假定基础上得到的, 它仍可以真实反映搅拌桩施工时注浆压力及沉桩速度与挤土效应(及邻近土体的位移)的关系, 可以帮助现场工程师快速获得施工参数控制的关键信息, 这是采用复杂的三维有限元数值计算软件难以做到的。

致 谢

本文公式推导得到同济大学赖允瑾和谷冠思两位同志的帮助, 特此致谢。

基金项目

2019 年上海浦东新区城建系统科学技术研究项目, 项目编号: 2019-015。

参考文献

- [1] Mindlin, R.D. (1936) Force at a Point in the Interior of a Semi Infinite Solid. *Physics*, 7, 195-202. <https://doi.org/10.1063/1.1745385>
- [2] 魏纲, 徐日庆. 软土隧道盾构法施工引起的纵向地面变形预测[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(9): 1077-1081.
- [3] 许有俊, 张治华, 史明, 等. 土压平衡矩形顶管正面附加推力对地表隆起变形影响研究[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2019, 51(6): 814-824.
- [4] 秦世伟, 周艳坤, 莫泷. 静压桩沉桩施工对临近隧道的影响[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2013, 19(5): 527-533.
- [5] 谷冠思. 桩基施工全过程对临近地铁隧道土体扰动行为研究[D]: [硕士学位论文], 上海: 同济大学, 2019.
- [6] 龚灵迪, 周萌, 赖允瑾, 谷冠思. 三轴搅拌桩施工挤土效应的试验研究[J]. 土木工程, 2020, 9(9): 864-874. <https://doi.org/10.12677/HJCE.2020.99091>
- [7] 汤新春, 张荣, 赖允瑾, 谷冠思. 搅拌桩和钻孔桩先后施工对邻近地铁隧道的影响分析[J]. 土木工程, 2020, 9(9): 853-863. <https://doi.org/10.12677/HJCE.2020.99090>
- [8] 黄芹, 陈耀华, 赖允瑾. 邻近地铁隧道钻孔灌注桩套打施工的防坍孔力学机理及工程应用[J]. 现代隧道技术, 2018, 55(S2): 419-425.